MODELOS DE ELECCIÓN DISCRETA CON COTAS EN LAS FUNCIONES DE UTILIDAD Y DISPOSICIÓN A PAGAR

Pedro Donoso, Universidad de Chile, pedrodonosos@gmail.com
Víctor Rocco, CEDEUS - Pontificia Universidad de Chile, victor.rocco@ing.puc.cl

RESUMEN

En los modelos de elección discreta se asume que las funciones aleatorias de utilidad y de disposición a pagar son irrestrictas. Sin embargo, la utilidad es no positiva si es un costo percibido de transporte y la disposición a pagar está acotada superiormente por el presupuesto del decisor. En este trabajo se formulan modelos generales de elección discreta con funciones que cumplen estas condiciones. En particular, se presenta un modelo con cotas superiores asociado a la distribución Gumbel, comparándolo con el Logit Multinomial usando datos sintéticos. Este enfoque puede aplicarse a otros modelos de elección discreta con errores aleatorios acotados.

Palabras clave: Elección discreta, modelo Logit multinomial, utilidad acotada.

ABSTRACT

In discrete choice models, it is assumed that the stochastic utility and willingness-to-pay functions are unrestricted. However, utility is a non-positive function when it corresponds to a perceived transport cost and willingness-to-pay is upper-bounded by decision-maker's budget. In this work, we formulate general discrete choice models complying these conditions. In particular, we present a new model with upper bounds, which is based on a Gumbel distribution and we compare it against the Multinomial Logit model using simulated data. This approach can be applied to other discrete choice models with limited random errors.

Keywords: Discrete choice, multinomial Logit model, bounded utility.

1. INTRODUCCIÓN

Los modelos de elección discreta son ampliamente utilizados en modelos de transporte (Ben-Akiva y Lerman, 1985; Ortúzar y Willumsen, 2001). Diversas estructuras de matrices de varianza y covarianza de los términos aleatorios de error han generado una amplia gama de modelos diferentes, como el ampliamente usado Logit Multinomial (MNL), el Probit, el Logit Jerárquico, y el modelo Mixed-Logit. Una característica común de estas formulaciones, es el uso de funciones de utilidad y de disposición a pagar con errores aleatorios distribuidos en todo el eje real. Sin embargo, en muchas situaciones estas funciones están acotadas y por consecuencia, también sus errores. Por ejemplo, esto ocurre cuando la disposición a pagar del decisor no puede superar un presupuesto máximo, cuando la utilidad del usuario representa un costo percibido o cuando éste elige de entre opciones con utilidades que superan valores mínimos.

El efecto de cotas que limiten las utilidades de las alternativas ha sido estudiado previamente. Krishnan (1977) incorpora al modelo MNL cotas mínimas para las diferencias de las utilidades de los atributos, estableciendo un umbral mínimo de diferencias, pero antes de realizar una elección. Otros modelos establecen cotas sobre las utilidades, por ejemplo Swait (2001) presenta un modelo de utilidad determinística en el que incorpora explícitamente cotas inferiores y superiores para los atributos de la función de utilidad y precios. Cantillo y Ortúzar (2005) formulan un modelo discreto semi-compensatorio que consiste en dos etapas; en una primera se realiza la formación del conjunto de alternativas a considerar (aquellas que no violan la restricción) y luego una elección compensatoria ocurre dentro del conjunto. Otros modelos como el *Constrained Multinomial Logit* (CMNL) (Martínez, Aguila y Hurtubia, 2009), hacen no disponible alternativas si un determinado umbral es violado, empleando una función de penalización en la utilidad. En lugar de emplear restricciones "suaves" que puedan ser violadas penalizando la función de utilidad, también se encuentran formulaciones basadas en entropía para generar Logit Jerárquicos con Cotas, como el modelo *Constrained Nested Logit* (CNL) (Espinosa-Aranda *et al.*, 2017).

El problema de las cotas en las funciones tiene especial relevancia en modelos estocásticos de localización mediante máxima postura (Ellickson, 1981; Lerman y Kern, 1983; Martinez, 1992). En estos modelos las posturas siguen distribuciones de valor Extremo de tipo I, generando probabilidades Logit Multinomiales. Esto permite que, con probabilidad no nula, un agente ofrezca una postura fuera de su restricción presupuestaria. Si bien la disposición al pago de cada individuo podrá tener un umbral declarado y ser levemente violado, la postura deberá estar acotada por su ingreso disponible. Por ejemplo, en Martínez y Hurtubia (2006) emplean una penalización en la función de utilidad que reduce la probabilidad de ganar de un agente cuando la postura viola la restricción presupuestaria.

A pesar la amplia literatura en cotas para la función de utilidad, estos esfuerzos se enfocan mayormente en su componente determinística. Sin embargo, es posible también estudiar los rangos en los que la componente estocástica es factible. Dos enfoques pueden ser considerados, en primer lugar, emplear distribuciones de valor Extremo que sean estrictamente positivas o negativas, como es el caso de la distribución Frechet o Weibull. Una alternativa diferente, es emplear distribuciones con leyes de probabilidad correspondiente al truncamiento de leyes no acotadas.

En este estudio, se formulan funciones de valor estocásticas con distribuciones estadísticas truncadas para representar la presencia de cotas y se obtienen nuevos modelos de elección discreta con estas distribuciones. Extendiendo la formulación del modelo Logit Multinomial al caso de errores con distribuciones truncadas se obtienen expresiones explícitas de las probabilidades de elección (con utilidades como funciones de valor) o de asignación (con disposiciones a pagar).

En el capítulo 2 se caracterizan los modelos de elección discreta con funciones de valor acotadas, revisando los modelos tradicionales irrestrictos y modelos con probabilidades acotadas. En particular, se formula y caracteriza un nuevo modelo con cotas superiores asociado a la distribución Gumbel. En el capítulo 3 se presentan resultados de estimación de los parámetros de este nuevo modelo usando datos sintéticos, los cuales se comparan con los obtenidos de la estimación de un modelo Logit Multinomial tradicional. Finalmente, en el capítulo 4 se presentan las conclusiones y trabajo futuro.

2. MODELOS DE ELECCIÓN DISCRETA CON FUNCIONES DE VALOR ACOTADAS

En esta sección se presentan modelos de elección discreta con funciones de valor acotadas que incluyen errores aditivos, independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.). Inicialmente se presentan modelos con funciones de valor irrestrictas, luego la familia de distribuciones estocásticas truncadas y finalmente, modelos basados en estas distribuciones.

2.1. Modelos de elección discreta tradicionales con errores i.i.d y función de valor no acotada

En la formulación de modelos de elección discreta se supone que el tomador de decisiones enfrenta un conjunto de alternativas de elección, le asigna un valor subjetivo a cada una de éstas y escoge aquella con el valor máximo (comportamiento racional).

Habitualmente se considera funciones de valor con errores aditivos, de la forma:

$$V_i = \bar{V}_i + \varepsilon_i \quad \forall i = 1, \dots, N \tag{1}$$

donde $\bar{V}_i$ y ε_i es la componente determinística y error aleatorio de la función de valor de la opción i, respectivamente y N es el número de alternativas disponibles para el decisor. Se asume que $E(\varepsilon_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$.

Si sumado a la estructura (1) se supone que los errores $\left(\varepsilon_j\right)_{j=1}^{N}$ son independientes y no acotados, la probabilidad de elección de la opción *i* es:

$$P_i = P\left(V_i \geq V_j \quad \forall j \neq i\right) = P\left(\varepsilon_j \leq \varepsilon_i + \Delta_{ij} \quad \forall j \neq i\right) = \tag{2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} F_j\left(z + \Delta_{ij}\right) f_i(z) dz \quad \forall i = 1, \dots, N$$

donde, f_i y F_i son las funciones de densidad y de distribución del error y $\Delta_{ij} = \bar{V}_i - \bar{V}_j$.

El modelo de elección discreta más ampliamente utilizado, es el Logit Multinomial, el cual se obtiene al asumir que los $\left(\varepsilon_j\right)_{j=1}^{N}$ son v.a.i.i.d *Gumbel(0, μ)* con $\mu > 0$, con función de distribución:

$$F_i(z) = F(z) = \exp(-\,exp(-\mu z)) \quad \forall z \in \mathbb{R} \tag{3}$$

En este caso, la probabilidad de elección de la opción i es:

$$P_i = \frac{exp(\bar{V}_i)}{\sum_{j=1}^{N} exp\left(\bar{V}_j\right)} \quad \forall i = 1, \dots, N \tag{4}$$

Como se aprecia, en este modelo se supone que las funciones de valor no están acotadas, porque el error aleatorio de cada alternativa está distribuido en todo el eje real. Esta situación se presenta también en modelos más complejos como los modelos Logit Jerárquico, Mixed Logit y Probit.

2.2. Leyes de probabilidad acotadas

Dos tipos de leyes de probabilidad continuas permiten valores en un rango acotado: funciones truncadas o naturalmente acotadas. Una densidad truncada depende de una densidad no acotada en todo el eje real, a la cual se le han eliminado las colas infactibles de la densidad y se ha normalizado el resto de la densidad con la masa de las colas removidas. Formalmente, si f es una función de densidad de probabilidad no acotada y F es la correspondiente función de distribución, entonces, las funciones de densidad y de distribución truncadas inferiormente en a y superiormente en b están definidas por:

$$f^{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq a \\ \frac{f(x)}{F(b)-F(a)} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & si\ b \leq x \end{cases} \qquad F^{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq a \\ \frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)} & si\ a \leq x \leq b \\ 1 & si\ b \leq x \end{cases} \tag{5}$$

Por otra parte, las densidades naturalmente acotadas, son aquellas que están definidas en un rango, como por ejemplo, las distribuciones Log Normal, Weibull y Fréchet, que están definidas solamente en valores positivos.

2.3. Modelos de elección discreta con errores i.i.d. y funciones de valor acotadas

En esta sección se deducen nuevos modelos de elección discreta con errores i.i.d y funciones de valor acotadas, las cuales son generadas con distribuciones truncadas de los errores.

Teorema Nº1

Supongamos que las funciones de valor de las alternativas están dadas por (1) con errores i.i.d. y que la función de valor de la alternativa *i* está acotada por B_0 y B_i de la forma:

$$B_0 \leq V_i \leq B_i \quad \forall i = 1, \dots, N \tag{6}$$

y que además, sin pérdida de generalidad, se asume que todas las cotas superiores están ordenadas de menor a mayor, es decir:

$$B_0 \leq B_1 \leq B_2 \dots \leq B_N \tag{7}$$

La condición (6) impone que los errores estén acotados, y por tanto, se modelan con densidades acotadas. Se supone que los errores se distribuyen según una función de densidad truncada de f_i y función de distribución truncada de F_i definida (5).

Luego, la probabilidad de elección de la opción *i* es:

$$P_i = \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{\prod_{j=m}^{N} \left(F_j(\bar{B}_{jj}) - F_j(\bar{B}_{0j})\right)} \int_{\bar{B}_{(m-1)i}}^{\bar{B}_{mi}} \prod_{\substack{j=m \\ j \neq i}}^{N} \left(F_j(z + \Delta_{ij}) - F_j(\bar{B}_{0j})\right) f_i(z) dz \quad \forall i \tag{8}$$

donde

$$\bar{B}_{ji} = B_j - \bar{V}_i \quad \forall i = 1, \dots, N;\ \forall j = 0, \dots, N \tag{9}$$

Demostración

De (6) y (9) se deduce que los errores aleatorios están acotados de la forma:

$$\bar{B}_{0i} \leq \varepsilon_i \leq \bar{B}_{ii} \quad \forall i = 1, \dots, N \tag{10}$$

Como los errores son independientes con función de densidad truncada de f_i y función de distribución truncada de F_i según (5), al aplicar esta definición en (2), considerando (9), se obtiene:

$$P_i = \frac{1}{\left(F_i(\bar{B}_{ii}) - F_i(\bar{B}_{0i})\right)} \int_{\bar{B}_{0i}}^{\bar{B}_{ii}} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} F_j^{\bar{B}_{0j},\bar{B}_{jj}}(z + \Delta_{ij}) \right) f_i(z) dz \qquad \forall i = 1, \dots, N \tag{11}$$

donde:

$$F_j^{\bar{B}_{0j},\bar{B}_{jj}}\left(z + \Delta_{ij}\right) = \begin{cases} 0 & si\ z \leq \bar{B}_{0i} \\ \dfrac{F_j\left(z + \Delta_{ij}\right) - F_j\left(\bar{B}_{0j}\right)}{F_j\left(\bar{B}_{jj}\right) - F_j\left(\bar{B}_{0j}\right)} & si\ \bar{B}_{0i} \leq z \leq \bar{B}_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, N, j \neq i \\ 1 & si\ \bar{B}_{ji} \leq z \end{cases} \tag{12}$$

Para determinar el valor de $F_j^{\bar{B}_{0j},\bar{B}_{jj}}(z + \Delta_{ij})$ en (11) se considera la condición de que las cotas B_i, están ordenadas de menor a mayor según (7).

Esta condición y (9) permiten deducir que:

$$\bar{B}_{0i} \leq \bar{B}_{1i} \leq \bar{B}_{2i} \dots \leq \bar{B}_{Ni} \quad \forall i = 1, \dots, N \tag{13}$$

Valiéndose de (13), la expresión (11) se puede escribir del siguiente modo:

$$P_i = \frac{1}{\left(F_i(\bar{B}_{ii}) - F_i(\bar{B}_{0i})\right)} \sum_{m=1}^{i} \int_{\bar{B}_{(m-1)i}}^{\bar{B}_{mi}} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} F_j^{\bar{B}_{0j},\bar{B}_{jj}}(z + \Delta_{ij}) \right) f_i(z) dz \tag{14}$$

Supongamos que $m = 1$ y $\bar{B}_{0i} \leq z \leq \bar{B}_{1i}$. De (13) se deduce que $\bar{B}_{0i} \leq z \leq \bar{B}_{ji}$ $\forall j \geq 2$ y de (12) que:

$$F_j^{\bar{B}_{0j},\bar{B}_{jj}}\left(z + \Delta_{ij}\right) = \frac{F_j\left(z + \Delta_{ij}\right) - F_j\left(\bar{B}_{0j}\right)}{F_j\left(\bar{B}_{jj}\right) - F_j\left(\bar{B}_{0j}\right)} \tag{15}$$

Supongamos ahora que $2 \leq m \leq i$ y $\bar{B}_{(m-1)i} \leq z \leq \bar{B}_{mi}$ entonces:

- Si $j \leq m - 1$, de (13) se deduce que $\bar{B}_{ji} \leq \bar{B}_{(m-1)i}$ y luego, $\bar{B}_{ji} \leq z$. De (12) se obtiene:

  $$F_j^{\bar{B}_{0j},\bar{B}_{jj}}\left(z + \Delta_{ij}\right) = 1 \tag{16}$$

- Si $m \leq j$, de (13) se obtiene que $\bar{B}_{mi} \leq \bar{B}_{ji}$ y luego, $\bar{B}_{0i} \leq \bar{B}_{(m-1)i} \leq z \leq \bar{B}_{ji}$. De (12) se obtiene:

$$F_j^{\bar{B}_{0j},\bar{B}_{jj}}(z+\Delta_{ij}) = \frac{F_j(z+\Delta_{ij}) - F_j(\bar{B}_{0j})}{F_j(\bar{B}_{jj}) - F_j(\bar{B}_{0j})} \tag{17}$$

Luego al reemplazar (15), (16) y (17) en (14) se obtiene:

$$P_i = \frac{1}{\left(F_i(\bar{B}_{ii}) - F_i(\bar{B}_{0i})\right)} \sum_{m=1}^{i} \int_{\bar{B}_{(m-1)i}}^{\bar{B}_{mi}} \left(\prod_{\substack{j=m \\ j\neq i}}^{N} \frac{F_j(z+\Delta_{ij}) - F_j(\bar{B}_{0j})}{F_j(\bar{B}_{jj}) - F_j(\bar{B}_{0j})} \right) f_i(z)dz \qquad \forall i \tag{18}$$

De esta expresión se deduce directamente el resultado.

Q.E.D.

El resultado anterior es aplicable a todo modelo de elección discreta con errores aleatorios aditivos e i.i.d.. En lo que sigue, sólo se considerarán errores distribuidos Gumbel, porque permite obtener expresiones cerradas de las probabilidades y establecer comparaciones con el modelo clásico Logit Multinomial. Otros casos, pueden analizarse en futuros trabajos.

Corolario Nº1

Supongamos que se cumplen las condiciones del Teorema Nº1 y que los errores $(\varepsilon_j)_{j=1}^{N}$ son v.a.i.i.d con funciones de densidad y de distribución truncadas de una $Gumbel(0,\mu)$ con $\mu > 0$ (ver (3)). Entonces, la probabilidad de elección de la opción *i* es:

$$P_i = \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{\prod_{j=m}^{N}\left(F(\bar{B}_{jj}) - F(\bar{B}_{0j})\right)} \int_{F(\bar{B}_{(m-1)i})}^{F(\bar{B}_{mi})} \prod_{\substack{j=m \\ j\neq i}}^{N} \left(t^{\exp(-\mu\Delta_{ij})} - F(\bar{B}_{0j})\right) dt \qquad \forall i \tag{19}$$

Demostración

De (3) se puede ver que la distribución $Gumbel(0,\mu)$ cumple con la siguiente propiedad:

$$F(z+a) = F(z)^{\exp(-\mu a)} \quad \forall a \tag{20}$$

Al aplicar (20) en (8) y realizar el cambio de variable $t = F(z)$ en el cálculo de la integral, se obtiene directamente el resultado.

Q.E.D.

Es interesante observar que la integral de (19) se puede calcular analíticamente dado que su integrando es una función polinómica con un número finito de términos.

Corolario Nº2

Supongamos que se cumplen las condiciones del Corolario Nº1 y que no existe cota inferior a las funciones de valor ($B_0 = -\infty$). Entonces, la probabilidad de elección de la opción *i* es:

$$P_i = \sum_{m=1}^{i} \theta_m \frac{\exp(\mu \bar{V}_i)}{\sum_{j=m}^{N} \exp(\mu \bar{V}_j)} \qquad \forall i = 1, \dots, N \tag{21}$$

donde,

$$\begin{aligned}\theta_m &= \frac{\prod_{j=m}^{N} F(B_m - \bar{V}_j) - \prod_{j=m}^{N} F(B_{m-1} - \bar{V}_j)}{\prod_{j=m}^{N} F(B_j - \bar{V}_j)} \\ &= P\left(B_{m-1} \leq \max_{m \leq j \leq N} V_j \leq B_m\right)\end{aligned} \tag{22}$$

Además:

$$0 \leq \theta_m \leq 1 \quad \forall m,\ \sum_{m=1}^{N} \theta_m = 1 \ \text{ y } \ \sum_{i=1}^{N} P_i = 1 \tag{23}$$

$$\text{lím}_{\forall j \geq m \ B_j \to \infty} \theta_m = \begin{cases} 1 \ si \ m = 1 \\ 0 \ si \ m \geq 2 \end{cases} \ \text{ y } \ \lim_{\forall j \ B_j \to \infty} p_i = \frac{\exp(\mu \bar{V}_i)}{\sum_{j=1}^{N} \exp(\mu \bar{V}_j)} \tag{24}$$

$$\text{Si } B_j = B \ \ \forall j = 1, \dots, N \text{ entonces: } p_i = \frac{\exp(\mu \bar{V}_i)}{\sum_{j=1}^{N} \exp(\mu \bar{V}_j)} \tag{25}$$

Demostración

Si $B_0 = -\infty$, entonces de (9) se obtiene que $\bar{B}_{0j} = -\infty$ y por tanto, $F(\bar{B}_{0j}) = 0$. En este caso, (19) se reduce a:

$$P_i = \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{\prod_{j=m}^{N} F(\bar{B}_{jj})} \int_{F(\bar{B}_{(m-1)i})}^{F(\bar{B}_{mi})} \prod_{\substack{j=m \\ j \neq i}}^{N} t^{\exp(-\mu \Delta_{ij})} \, dt \qquad \forall i \tag{26}$$

Al desarrollar la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} P_i &= \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{\prod_{j=m}^{N} F(\bar{B}_{jj})} \int_{F(\bar{B}_{(m-1)i})}^{F(\bar{B}_{mi})} t^{\sum_{\substack{j=m \\ j \neq i}}^{N} \exp(-\mu \Delta_{ij})} \, dt = \\ &= \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{1 + \sum_{\substack{j=m \\ j \neq i}}^{N} \exp(-\mu \Delta_{ij})} \left(\frac{F(\bar{B}_{mi})^{1 + \sum_{\substack{j=m \\ j \neq i}}^{N} \exp(-\mu \Delta_{ij})} - F(\bar{B}_{(m-1)i})^{1 + \sum_{\substack{j=m \\ j \neq i}}^{N} \exp(-\mu \Delta_{ij})}}{\prod_{j=m}^{N} F(\bar{B}_{jj})} \right) = \end{aligned} \tag{27}$$

$$= \sum_{m=1}^{i} \frac{\exp(\mu \bar{V}_i)}{\sum_{j=m}^{N} \exp(\mu \bar{V}_j)} \left(\frac{F(\bar{B}_{mi})^{\exp(-\mu \bar{V}_i) \sum_{j=m}^{N} \exp(\mu \bar{V}_j)} - F(\bar{B}_{(m-1)i})^{\exp(-\mu \bar{V}_i) \sum_{j=m}^{N} \exp(\mu \bar{V}_j)}}{\prod_{j=m}^{N} F(\bar{B}_{jj})} \right)$$

De (20) y (9) se deduce (21) y la primera expresión de θ_m en (22).

A continuación, se demuestra la segunda expresión de los coeficientes θ_m en (22). De (7), (5) y (1) se tiene:

$$F(B_k - \bar{V}_j) = P(\varepsilon_j \leq B_k - \bar{V}_j) * F(B_j - \bar{V}_j) = P(V_j \leq B_k) * F(B_j - \bar{V}_j) \qquad \forall j \geq k \tag{28}$$

Considerando este resultado en la primera expresión de θ_m en (22) se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta_m &= \frac{\prod_{j=m}^{N} P(V_j \leq B_m) * F(B_j - \bar{V}_j) - \prod_{j=m}^{N} P(V_j \leq B_{m-1}) * F(B_j - \bar{V}_j)}{\prod_{j=m}^{N} F(B_j - \bar{V}_j)} = \\ &= \prod_{j=m}^{N} P(V_j \leq B_m) - \prod_{j=m}^{N} P(V_j \leq B_{m-1}) \end{aligned} \tag{29}$$

Dado que $(V_j)_j$ son variables independientes y la condición (7) se deduce:

$$\begin{aligned} \theta_m &= P(V_j \leq B_m \quad \forall j \geq m) - P(V_j \leq B_{m-1} \quad \forall j \geq m) = \\ &= P\left(\max_{m \leq j \leq N} V_j \leq B_m\right) - P\left(\max_{m \leq j \leq N} V_j \leq B_{m-1}\right) = \\ &= P\left(B_{m-1} \leq \max_{m \leq j \leq N} V_j \leq B_m\right) \end{aligned} \tag{30}$$

Como θ_m corresponde a una probabilidad se cumple que $0 \leq \theta_m \leq 1 \quad \forall m$. A continuación, demostraremos que $\sum_{m=1}^{N} \theta_m = 1$.

De la primera expresión de θ_m en (22) se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N} \theta_m &= \sum_{m=1}^{N} \prod_{j=m}^{N} \frac{F(B_m - \bar{V}_j)}{F(B_j - \bar{V}_j)} - \sum_{m=1}^{N} \prod_{j=m}^{N} \frac{F(B_{m-1} - \bar{V}_j)}{F(B_j - \bar{V}_j)} = \\ &= \sum_{m=1}^{N} \prod_{j=m}^{N} \frac{F(B_m - \bar{V}_j)}{F(B_j - \bar{V}_j)} - \sum_{s=0}^{N-1} \prod_{j=s+1}^{N} \frac{F(B_s - \bar{V}_j)}{F(B_j - \bar{V}_j)} = \\ &= \sum_{m=1}^{N} \prod_{j=m}^{N} \frac{F(B_m - \bar{V}_j)}{F(B_j - \bar{V}_j)} - \sum_{s=0}^{N-1} \prod_{j=s}^{N} \frac{F(B_s - \bar{V}_j)}{F(B_j - \bar{V}_j)} = 1 \end{aligned} \tag{31}$$

A continuación demostraremos que $\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$

De (21) y de (31) se obtiene este resultado:

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{i}\theta_m \frac{\exp(\mu\bar{V}_i)}{\sum_{j=m}^{N}\exp(\mu\bar{V}_j)} = \sum_{m=1}^{N}\sum_{i=m}^{N}\theta_m \frac{\exp(\mu\bar{V}_i)}{\sum_{j=m}^{N}\exp(\mu\bar{V}_j)} = \\ = \sum_{m=1}^{N}\theta_m \sum_{i=m}^{N}\frac{\exp(\mu\bar{V}_i)}{\sum_{j=m}^{N}\exp(\mu\bar{V}_j)} = \sum_{m=1}^{N}\theta_m = 1 \tag{32}$$

Por otra parte, de la primera expresión de θ_m en (22) se deduce directamente:

$$\lim_{\forall j\geq m\ B_j\to\infty}\theta_m = \begin{cases}1 & si\ m = 1\\ 0 & si\ m \geq 2\end{cases} \tag{33}$$

Y aplicando este resultado a (21) se deduce:

$$\lim_{\forall j\ B_j\to\infty} p_i = \frac{\exp(\mu\bar{V}_i)}{\sum_{j=1}^{N}\exp(\mu\bar{V}_j)} \tag{34}$$

Finalmente, de la primera expresión de θ_m en (22) se obtiene:

Si $B_j = B\ \ \forall j = 1, \dots, N$ entonces:

$$p_i = \frac{\exp(\mu\bar{V}_i)}{\sum_{j=1}^{N}\exp(\mu\bar{V}_j)} \tag{35}$$

Se observa que el modelo (21) es una combinación lineal de modelos Logit Multinomial, pero no es un promedio ponderado, porque si bien los coeficiente θ_m son positivos, la suma de éstos es igual a 1, sólo si se suman todos (ver (23)). Sin embargo, la sumatoria que define el modelo de la probabilidad de la alternativa *i* llega sólo hasta *i*.

Este modelo de probabilidad se puede interpretar si se considera la segunda expresión de (22), es decir, que $\theta_m = P\left(B_{m-1} \leq \max_{m\leq j\leq N} V_j \leq B_m\right)$. Para esto, supongamos en (21) que existe un $m^* \leq i$ tal que $\theta_{m^*} = 1$, es decir, se cumple que $B_{m^*-1} \leq \max_{m^*\leq j\leq N} V_j \leq B_{m^*}$ en probabilidad. Por (23) el modelo se reduce a:

$$p_i = \frac{\exp(\mu\bar{V}_i)}{\sum_{j=m^*}^{N}\exp(\mu\bar{V}_j)} \tag{36}$$

Es decir, corresponde a un modelo Logit Multinomial donde las alternativas de elección se ha reducido del conjunto completo $\{1, \dots, N\}$ al subconjunto $\{m^*, \dots, N\}$. Esto tiene sentido si se considera que para todo j tal que $j \leq m^* - 1$ se tiene que $V_j \leq B_j$ (de (6)) y $B_j \leq B_{m^*-1}$ (de (7)), entonces, se cumple que $V_j \leq B_{m^*-1}$. Por lo tanto, $\max_{j\leq m^*-1} V_j \leq B_{m^*-1}$. Con este resultado el espacio de elección debe reducirse porque $\max_{1\leq j\leq N} V_j = \max_{m^*\leq j\leq N} V_j$.

Por lo tanto, con la sumatoria desde m=1 hasta m=i se recorren todos los espacios factibles donde la alternativa puede ser escogida, desde $\{1, \ldots, N\}$ hasta $\{i, \ldots, N\}$, donde θ_m corresponde a la probabilidad que condiciona estos conjuntos.

Otra implicancia interesante se obtiene del resultado (25). Éste establece que el modelo con funciones de valor acotadas por un mismo valor coincide con el Logit Multinomial, cuyas funciones de valor no están acotadas. Precisamente esto ocurre cuando estas funciones corresponden a utilidades acotadas superiormente por 0 (desutilidades), como es el caso de la mayoría de funciones de valor en decisiones en transporte.

3. APLICACIÓN

En esta sección se presentan resultados de estimación del modelo de elección discreta con una función de valor acotada superiormente, usando datos sintéticos. Se asume que las cotas superiores de las distintas opciones de elección de la población son conocidas y distintas entre sí y que los errores aleatorios son i.i.d Gumbel. Por lo tanto, se asume que el modelo (21), denominado *"Logit con funciones de valor acotadas superiormente"* y denotado por MNLUB, representa a las elecciones poblacionales.

Un ejemplo relevante de este modelo, es cuando la función de valor corresponde a la disposición a pagar de un hogar o firma por localizarse en un determinado bien inmueble. En este caso la función está acotada superiormente por el presupuesto disponible para localizarse del agente. La probabilidad de elección (21) corresponde a la probabilidad de que el bien inmueble sea asignado al mejor agente postor, observándose que las opciones de elección corresponden a los agentes en este modelo.

El objetivo de este ejercicio, consiste en determinar la factibilidad de estimar los parámetros del modelo MNLUB y el sesgo de sus estimaciones, comparando los resultados obtenidos con los de la estimación de parámetros del modelo tradicional Logit Multinomial (MNL). En ambos modelos, MNLUB y MNL, se usa la misma especificación de la componente determinística de la función de valor. Por lo tanto, se generan datos sintéticos de elección discreta empleando el modelo MNLUB con cotas y parámetros poblacionales dados, y luego, se estiman estos parámetros suponiendo que las elecciones simuladas provienen de un modelo MNLUB y alternativamente un modelo MNL.

En estas simulaciones se consideran tres alternativas de elección cuyas funciones de valor, en sus componentes determinísticas están dadas por:

$$\begin{aligned} b1 &= 0 \\ b2 &= a1 + a2 * Z1 + a3 * Z2 \\ b3 &= a4 + a5 * Z1 + a6 * Z2 \end{aligned} \tag{37}$$

En un modelo de localización por máxima postura, este ejemplo corresponde a especificar a 3 tipos de agentes con sus respectivas funciones de disposición a pagar determinísticas especificadas en (37).

Los parámetros usados en las simulaciones son los siguientes:

Tabla Nº1 Valores poblacionales de los parámetros usados

Parámetro	Valor Poblacional
$a1$	1,4
$a2$	-0,3
$a3$	0,7
$a4$	1,3
$a5$	0,5
$a6$	-0,5

Los atributos Z1 y Z2 son generados aleatoriamente con una distribución $N(0,1)$. Con estos valores se dispone de una distribución de valores de las disposiciones a pagar *b2 y b3* que se presenta en la siguiente tabla:

Tabla Nº2 Valor promedio de b2 y b3 por quintil

Variable	Quintil 1	Quintil 2	Quintil 3	Quintil 4	Quintil 5
$b2$	-0,66	0,83	1,33	1,79	3,08
$b3$	-0,51	0,87	1,34	1,90	3,76

A cada disposición a pagar determinística (*b1*, *b2* y *b3*) se le agrega un error aleatorio distribuido según una Gumbel truncada, de modo que el valor de la disposición a pagar aleatoria sea menor o igual a su respectiva cota presupuestaria. El valor máximo que puede tomar este error para cada alternativa (agente) será la diferencia entre su presupuesto disponible (denotado por I1,I2 o I3) y la componente determinística (*b1*, *b2* y *b3*).

Dado que interesa estudiar el efecto de las cotas de presupuesto sobre la estimación de los parámetros, se plantean experimentos con distintos valores de estas cotas, los cuales se presentan en la siguiente tabla.

Tabla Nº3 Experimentos según niveles de presupuesto de los agentes

Experimento	I1	I2	I3
E1	1,00	3,08	3,76
E2	1,00	1,79	1,90
E3	1,00	1,33	1,34
E4	3,00	3,08	3,76
E5	0,75	1,79	1,90
E6	0,50	1,33	1,34

Como se aprecia, en los escenarios E1, E2 y E3, se mantiene el valor de cota para las alternativas 1 y fijan las cotas de las alternativas 2 y 3 en los quintiles 4 y 5. Por su parte, en los escenarios

E4, E5 y E6 usan las mismas cotas de los escenarios anteriores para las alternativas 2 y 3, pero se varía drásticamente la cota de la alternativa 1.

Se generan 1500 simulaciones de cada escenario y en las siguiente tablas se presenta el sesgo de la estimación de los modelos MNLUB y MNL en cada uno de los 6 escenarios considerados. El sesgo se define como el módulo del promedio de las diferencias entre la estimación de cada parámetro y su valor poblacional en las 1500 simulaciones. En estos casos, el factor de escala se supone conocido, fijándose en $\mu = 1$.

Tabla Nº4 Sesgo de la estimación de parámetros del Modelo MNLUB según escenario

Escenario	Parámetro					
	$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$
E1	0,157	0,001	0,016	0,230	0,020	0,010
E2	0,060	0,008	0,014	0,077	0,010	0,004
E3	0,035	0,005	0,013	0,036	0,007	0,001
E4	0,019	0,003	0,013	0,022	0,011	0,003
E5	0,156	0,014	0,018	0,204	0,055	0,002
E6	0,280	0,010	0,047	0,294	0,026	0,036

Tabla Nº5 Sesgo de la estimación de parámetros del Modelo MNL según escenario

Escenario	Parámetro					
	$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$	$a6$
E1	3,901	0,199	0,217	3,709	0,196	0,173
E2	2,235	0,154	0,171	2,083	0,159	0,131
E3	1,116	0,061	0,135	1,098	0,079	0,108
E4	0,289	0,007	0,062	0,069	0,006	0,015
E5	3,981	0,365	0,225	3,822	0,371	0,180
E6	4,095	0,174	0,151	4,075	0,184	0,133

Los resultados muestran que en todos los casos simulados se obtuvieron estimaciones de los parámetros con el modelo MNLUB y que éstas son apreciablemente más precisas que las del modelo MNL. Por ejemplo, en el caso del parámetro $a1$, el sesgo de estimación del modelo MNLUB oscila entre el 1% y el 20% del valor poblacional (*a1=1,4)*, mientras que en el caso del modelo MNL este rango es entre el 21% y el 279%. Como era de esperar, cuando las cotas son más grandes, caso del escenario 4, el sesgo del modelo MNL disminuye, aun cuando el MNLUB sigue siendo superior.

4. CONCLUSIONES

Los modelos de elección discreta más usados en el mundo son los de la familia Logit, los cuales se basan en el supuesto que las funciones de valor recorren todo el eje real debido a que usan distribuciones aleatorias con esta condición. Sin embargo, este supuesto no es realista cuando estas funciones representan desutilidades o disposiciones a pagar percibidas por los usuarios o ganancias de los proveedores de bienes y servicios. Disposiciones a pagar de hogares por localización que están acotadas por el presupuesto de estos agentes o funciones de utilidad de transporte no positivas cuando están basadas en recursos de los usuarios, como el tiempo o costo, o en otros atributos inversamente proporcionales a las utilidades y elecciones con utilidades mínimas, son sólo algunos ejemplos de esta condición.

En este trabajo se aborda este problema, deduciéndose modelos de elección discreta generales donde las funciones de valor están acotadas inferiormente por una cota igual para todas las alternativas y superiormente con cotas diferentes para las distintas opciones de elección. Como único supuesto, se asume que los términos de error de estas funciones son aditivos, independientes e idénticamente distribuidos. Además, se asume de forma general que las leyes de probabilidad de estos errores corresponden al truncamiento de leyes irrestrictas.

En el caso en que las funciones de valor no están acotadas inferiormente, pero sí superiormente y las leyes de probabilidad irrestrictas que se truncan son Gumbel, se obtiene una expresión analítica de la probabilidad de elección, la cual es una combinación lineal de las conocidas probabilidades Logit Multinomial.

Se realizaron pruebas con este nuevo modelo, usando datos sintéticos correspondientes a una población donde las funciones de valor están acotadas superiormente por barreras conocidas. Esta situación se presenta en modelos de localización residencial por máximo postor donde las funciones de valor son disposiciones a pagar de los hogares por localización y cuando es conocido el presupuesto disponible de éstos (o sus ingresos como cotas alternativas menos estrictas). En todas las pruebas sintéticas realizadas fue posible estimar los parámetros del modelo y estas estimaciones resultaron considerablemente más precisas que las del modelo Logit Multinomial.

Estos resultados promisorios permite plantear diversas líneas de investigación futuras. Algunas de estas se refieren a realizar pruebas con datos reales y a extender el enfoque a otros modelos de la familia Logit, como por ejemplo, el Logit Jerárquico y el Mixed Logit o a modelos de elección discreta que usan distribuciones de los errores parcialmente acotados, como por ejemplo, el modelo Fréchet, cuyos errores son positivos. También es interesante abordar el caso en que las barreras no son conocidas y requieran estimarse.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el soporte financiero de los proyectos FONDEF D10E1002 y del Instituto Sistemas Complejos de Ingeniería.

REFERENCIAS

Ben-Akiva, M. E. y Lerman, S. R. (1985) **Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand**. MIT Press (MIT Press series in transportation studies).

Cantillo, V. y Ortúzar, J. de D. (2005) A semi-compensatory discrete choice model with explicit attribute thresholds of perception. **Transportation Research Part B: Methodological**, 39(7), 641–657.
Ellickson, B. (1981) An alternative test of the hedonic theory of housing markets. **Journal of Urban Economics**, 9(1), 56–79.
Espinosa-Aranda, J., García-Ródenas, R., López-García, M. L. y Angulo, E. (2017) Constrained nested logit model: formulation and estimation. **Transportation**, 1–35.
Krishnan, K. S. (1977) Incorporating Thresholds of Indifference in Probabilistic Choice Models. **Management Science**, 23(11), 1224–1233.
Lerman, S. R. y Kern, C. R. (1983) Hedonic theory, bid rents, and willingness-to-pay: Some extensions of Ellickson's results. **Journal of Urban Economics,** 13(3), 358–363.
Manski, C. F. (1977) The structure of random utility models. **Theory and Decision**, 8(3), 229–254.
Martinez, F. (1992) The Bid-choice Land Use Model: an Integrated Economic Framework. **Environment and Planning A**, 24, 871–885.
Martínez, F., Aguila, F. y Hurtubia, R. (2009) The constrained multinomial logit: A semi-compensatory choice model. **Transportation Research Part B: Methodological**. Elsevier Ltd, 43(3), 365–377.
Martínez, F. y Hurtubia, R. (2006) Dynamic model for the simulation of equilibrium status in the land use market. **Networks and Spatial Economics**, 6(1), 55–73.
Ortúzar, J. de D. y Willumsen, L. G. (2001) **Modelling Transport**. Wiley.
Swait, J. (2001) A non-compensatory choice model incorporating attribute cut offs. **Transportation Research Part B**, 35(35), 903–928.