

## **RESTRICCIÓN DE CAPACIDAD EN UN MODELO DE ASIGNACIÓN ESTOCÁSTICA DE TRANSPORTE PÚBLICO**

Belén Barriga, Pontificia Universidad Católica de Chile [Chilebabarrig@uc.cl](mailto:Chilebabarrig@uc.cl)  
Juan Carlos Muñoz, Pontificia Universidad Católica de Chile [jcm@ing.puc.cl](mailto:jcm@ing.puc.cl)  
Sebastián Raveau, Pontificia Universidad Católica de Chile [sraveau@ing.puc.cl](mailto:sraveau@ing.puc.cl)

### **RESUMEN**

En redes de transporte público altamente congestionadas, las demoras en los tiempos de viajes causadas por no abordar al primer vehículo no son poco frecuentes. Es por esto, que se propone construir un modelo de asignación que respete la restricción de capacidad de los vehículos y el Equilibrio de Usuarios Estocástico. Para lograr este objetivo, se define un modelo de manera conceptual, luego se evalúa en una red de prueba su capacidad predictiva y desempeño, con el fin de obtener mejoras en la formulación. Finalmente, se prueba el modelo definitivo en el Metro de Santiago y se compara con dos formulaciones alternativas de demoras adicionales, mostrando que el modelo propuesto es el único de los probados que genera una asignación que respeta la restricción de capacidad estricta.

*Palabras clave:* *transporte público, modelos de asignación, capacidad de los vehículos*

## 1. INTRODUCCIÓN

La necesidad de planificar y operar en el corto plazo eficientemente, un sistema de transporte público, obliga a tener herramientas computacionales y modelos de asignación que permitan predecir con mayor certeza cómo las personas eligen sus rutas de viajes, desde un origen a un destino, considerando los servicios disponibles de la red.

La predicción por modelos de asignación, incorpora básicamente: los tiempos de viajes, las frecuencias y los tiempos de espera, la cantidad de transbordos, la tarifa, la comodidad, entre otros atributos en las decisiones de los viajeros. En redes de transporte público altamente congestionadas, además de estos atributos, la capacidad de los vehículos juega un rol determinante en las elecciones, ya que no todos los usuarios podrán subir al primer vehículo, generando un aumento en los tiempos de espera percibidos y ampliando el conjunto de líneas atractivas que consideran los viajeros.

Este trabajo tiene como objetivo, construir un modelo de asignación basado en el concepto de Equilibrio de Usuarios Estocástico (S.U.E, en adelante) que típicamente considera, los costos de tiempos de viajes totales esperados y al que se le incorpora la restricción de capacidad de los vehículos, para realizar predicciones de flujo en un sistema de transporte público.

Para esto primero se muestra como se ha estudiado la restricción de capacidad en los modelos de asignación, luego se propone un modelo heurístico de asignación de viajes de dos etapas iterativas que respeta los supuestos de S.U.E. y capacidad de los vehículos. En el siguiente capítulo, se muestran los resultados en la red de Metro de Santiago, año 2013. Finalmente se termina con las conclusiones del trabajo y futuras líneas de investigación.

## 2. LA RESTRICCIÓN DE CAPACIDAD EN MODELOS DE ASIGNACIÓN DE TRANSPORTE PÚBLICO

La restricción de capacidad de los vehículos en redes de transporte público altamente congestionadas, tiene como resultado que algunos usuarios no puedan abordar el primer vehículo que están esperando. Esto, a su vez tiene como consecuencia, que los tiempos de espera aumenten y dependiendo de la significancia del aumento, las decisiones de los viajeros podrían verse también alteradas.

El aumento del tiempo de espera, asociado a la restricción de capacidad de los vehículos ha sido estudiado bajo dos enfoques (Fu *et al.*, 2012). El primer enfoque trata el tiempo de espera como una función convexa y creciente con el flujo de pasajeros (De Cea y Fernández, 1993), esta modelación tiene ventajas en el algoritmo de solución del problema, específicamente en la diagonalización del problema, pero para casos con alta demanda podría permitir que arcos vayan con mayor flujo que su capacidad.

El segundo enfoque corresponde a considerar una restricción de capacidad estricta en el uso de los vehículos como lo hace Lam *et al.*(1999) y Lam *et al.*(2002), la ventaja de este enfoque es que los tiempos de esperas adicionales provocados por los problemas de congestión son obtenidos a

partir de las condiciones de equilibrio del problema y no tienen que ser determinados previamente por medio de una calibración, como sería el caso del modelo de De Cea y Fernández (1993). El problema de esta formulación es que el supuesto para obtener demoras adicionales de manera endógena genera resultados que no respetan el S.U.E en redes de transporte público, el detalle del problema y una posible solución se explicará en la sección 3.4.

Con respecto a las decisiones de los viajeros, los planteamientos de Chriqui y Robillard(1975), consideran que las personas esperan un conjunto de líneas atractivas con el objetivo de minimizar sus tiempos de viajes totales esperados. El problema de este enfoque es que se construye bajo el supuesto de que no existen problemas de congestión y que las personas pueden subir al primer bus que pasa dentro del conjunto de servicios atractivos, por lo que para ser utilizado en situaciones de congestión relevante requiere modificaciones.

Por su parte, en la literatura se ha estudiado cómo incluir los efectos de la congestión en la definición del conjunto de líneas atractivas mediante el uso de frecuencias efectivas. Las frecuencias efectivas buscan representar el efecto de que no todos los buses que pasan en una red congestionada, tienen capacidad disponible para los usuarios que están esperando (De Cea y Fernández, 1993). Matemáticamente la frecuencia efectiva se definen dependiente de cada línea  $l$  y paradero  $i$ , como:

$$f_l'^i = \frac{\alpha_l}{w_l^i} \quad (1)$$

Donde  $\alpha_l$ , depende de las distribuciones de los intervalos de llegada de los buses de la línea  $l$  y de los tiempos de llegadas de las personas, y  $w_l^i$  es el tiempo de espera de la línea  $l$  en el paradero  $i$ , que depende del flujo que abordó la línea  $l$  antes del paradero  $i$  y de los usuarios que quieren subir en el paradero  $i$ . Es decir, a medida que aumenta la congestión, aumentan los tiempos de esperas y como resultado disminuyen las frecuencias efectivas. Esto tiene como consecuencia que los tiempos de viajes totales esperados crezcan y aparezcan nuevas líneas atractivas para el usuario.

Cominetti y Correa (2001) también generan un conjunto de líneas atractivas considerando frecuencias efectivas, la diferencia con el modelo anterior es que reescriben el problema de líneas comunes, considerando teoría de colas, y muestran que para el caso particular de llegadas exponenciales de buses con capacidades variables y llegadas de los usuarios mediante un proceso Poisson, se puede aplicar el concepto de frecuencias efectivas directamente en el problema planteado por Chriqui y Robillard (1975). Además, demuestran, matemáticamente -usando argumentos de punto fijo- la existencia de una red de equilibrio.

Finalmente Lam *et al.* (2002), también incluye los efectos de la capacidad de los vehículos en la construcción del conjunto de líneas atractivas por medio de las frecuencias efectivas, la diferencia con los dos modelos anteriores radica en que la frecuencia efectiva, en este caso, depende del tiempo de ciclo del bus, y este a su vez depende del tiempo de detención experimentado en cada paradero.

### 3. MODELO HEURÍSTICO DE ASIGNACIÓN DE VIAJES

En base a la revisión bibliográfica realizada en el capítulo 2, se definieron dos aspectos relevantes en los que la restricción de capacidad de los vehículos juega un rol determinante en las decisiones de los viajeros: (1) tiempos de esperas adicionales por no poder abordar el primer vehículo y (2) cambio de conjunto de líneas atractivas por problemas de capacidad. Ambos, serán incluidos en un Modelo de Asignación base, que considera la congestión mediante la noción de S.U.E.

#### 3.1. Modelos de Asignación base y representación de red

El modelo base de elección de rutas de transporte seleccionado, es un modelo Logit, debido a su facilidad para manejar las probabilidades de elección. Este modelo tiene el supuesto de que el error asociado a cada alternativa  $i$ , no está correlacionado con otra alternativas, por lo tanto es importante que la formulación de la utilidad representativa,  $V_i$ , sea tal que explique bien la decisión del usuario y el error modelado esté asociado solo a la percepción personal de este, (Train, 2009, pág. 39).

En cuanto a la red considerada para la modelación del problema se utiliza una red  $G(N,S)$  descrita por De Cea y Fernández (1993). El objetivo de esta red es representar el problema de líneas comunes, al que se ve enfrentado cada usuario al elegir una línea para realizar su viaje en un paradero. Para esto primero se genera la red  $G(N,A)$ , donde  $N$  es el conjunto de nodos y  $A$  el conjunto de segmentos de línea ( $a_i$ ), cada segmento de línea une un par de nodos consecutivos por donde pasa un recorrido, por ejemplo en la Figura 1 el recorrido verde pasa por los nodos 1, 2 y 3 y el recorrido rojo solo une el nodo 2 con el nodo 3.

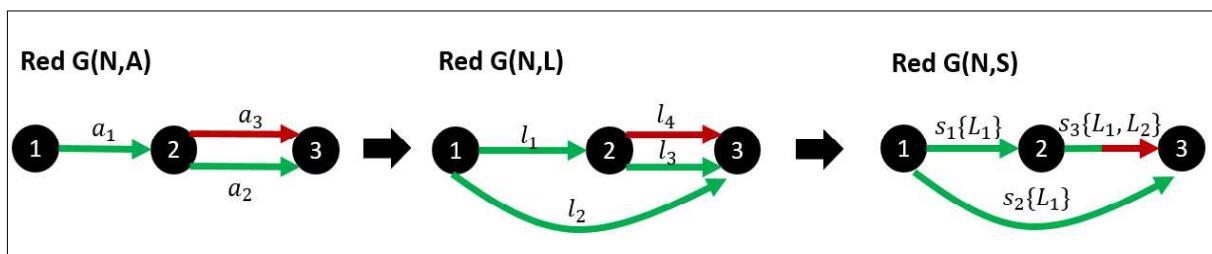


Figura 1: Construcción red  $G(N,S)$   
Fuente: Elaboración propia basada en De Cea y Fernández (1993)

Luego de tener la red  $G(N,A)$  se puede generar la red  $G(N,L)$ , la cual tiene como objetivo representar todos los posibles viajes que se pueden completar con cada línea de la red, para esto se crea un conjunto  $L$ , de arcos conocidos como secciones de línea ( $l_i$ ). En el ejemplo de la Figura 1, el recorrido verde puede ofrecer tres posibles viajes, desde el nodo 1 al nodo 2 ( $l_1$ ), del nodo 1 al nodo 3 ( $l_2$ ), y del nodo 2 al 3 ( $l_3$ ), para la línea roja solo existe un posible viaje que queda representado por la sección de línea  $l_4$ .

A partir de la red  $G(N,L)$  se puede construir la red  $G(N,S)$ , donde los arcos se definen como secciones de rutas ( $s_i$ ) y tienen por objeto representar las secciones de líneas atractivas, para completar un viaje o una etapa de viaje en un par determinado de nodos. En el caso de la Figura

1, los posibles viajes desde el nodo 1 al nodo 2 y del nodo 1 al nodo al nodo 3, solo tienen una sección de línea disponible, por lo tanto las secciones de ruta solo poseen su respectiva línea asociada. En cambio, del nodo 2 a 3, se puede viajar mediante dos líneas, el usuario esperará ambas líneas si el costo total de viaje esperado es menor al de esperar cada línea por separado, esta situación es la que se representa en la Figura 1.

Construida la red  $G(N,S)$ , cada posible ruta del sistema queda definida por la secuencia de secciones de rutas que conectan cada par origen-destino  $w$ .

### 3.2. Tiempos de esperas adicionales y restricción de capacidad

En cuanto a los tiempos de esperas adicionales provocados por no abordar el primer vehículo, se identifican dos posibles causas: 1) no existe capacidad disponible en el vehículo, 2) el vehículo no cumple con los estándares de comodidad del usuario, por ejemplo no existen asientos disponibles. En este trabajo, interesa estudiar la primera causa y caracterizar como el no poder abordar el primer servicio por falta de capacidad de los vehículos, afecta el costo de viaje que perciben las personas.

Es por esto que se decide utilizar la formulación de capacidad estricta del modelo (Lam *et al.*, 2002), en donde los tiempos de esperas solo aumentan cuando existen problemas de capacidad, y como ya se mencionó en el capítulo 2, la ventaja de esta formulación es que los tiempos de esperas adicionales se obtienen a partir de las condiciones de equilibrio del sistema. A continuación se presenta en las ecuaciones (2) a la (6) el problema de optimización equivalente.

$$\min_{h_r^w} \sum_{sr \in S} (t_{sr} + u_{sr}) v_{sr} + \frac{1}{\theta} \sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} h_r^w (\ln h_r^w - 1) \quad (2)$$

$$s.t. \quad \sum_{r \in R_w} h_r^w = g_w, \quad \forall w \in W, \text{ restricción de demanda} \quad (3)$$

$$v_{sr} = \sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} a_{sr-r} h_r^w, \quad \forall sr \in S, \text{ restricción relacional} \quad (4)$$

$$\sum_{w \in W} \sum_{r \in R_w} \sum_{sr \in S} \gamma_{as} x_{sr}^l a_{sr-r} h_r^w \leq k_a \quad \forall a \in A, \text{ restricción de capacidad estricta} \quad (5)$$

$$h_r^w \geq 0 \quad \forall r \in R_w, \text{ restricción de no negatividad} \quad (6)$$

#### Variable de decisión

- $h_r^w$ : corresponde al flujo en la ruta  $r$  del par  $w$ .

#### Variable relacional

- $v_{sr}$ : corresponde al flujo de la sección de ruta  $sr$ .

#### Parámetros

- $t_{sr}$ : corresponde al tiempo de viaje de la sección de ruta  $sr$ .
- $u_{sr}$ : corresponde al tiempo espera de la sección de ruta  $sr$ .
- $g_w$ : corresponde a la demanda del par  $w$ .

- $a_{sr-r}$ : corresponde al elemento de la matriz de incidencia sección de ruta- ruta, e indica si la sección de ruta  $sr$  pertenece a la ruta  $r$ .

$$a_{sr} : \begin{cases} 1 & \text{si } sr \in r. \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

- $\gamma_{asr}$ : indica si el segmento de línea  $a$  pertenece a la sección de ruta  $sr$ .

$$\gamma_{asr} : \begin{cases} 1 & \text{si } a \in sr. \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

- $x_{sr}^l$ : proporción de viajes de la línea  $l$  en la sección de línea  $sr$ .
- $k_a$ : capacidad del segmento de línea  $a$ .

Lam *et al.* (2002) prueban que el problema de optimización equivalente recién descrito, corresponde a un modelo Logit de elección de ruta en transporte público que considera la restricción de capacidad estricta, si y solo si los multiplicadores de Lagrange asociados a la restricción de capacidad son iguales al inverso aditivo de los tiempos de espera adicionales de los segmentos de línea  $a$ . Esta proposición tiene como consecuencia que el tiempo de espera adicional de la ruta  $r$  del par  $w$ ,  $d_r^w$ , se obtenga directamente de las condiciones de equilibrio del problema (Lam *et al.*, 1999). La especificación de la utilidad de cada ruta  $r$  es igual a la ecuación (7):

$$V_r^w = \theta(t_r^w + u_r^w + d_r^w) \quad (7)$$

Con,

- $t_r^w$ : el tiempo de viaje en el vehículo de la ruta  $r$  del par  $w$ .
- $u_r^w$ : el tiempo espera de la ruta del par  $w$ .
- $d_r^w$ : el tiempo de espera adicional de la ruta  $r$  del par  $w$  obtenido a partir de las condiciones de equilibrio del problema.

### 3.3. Cambio del conjunto de líneas atractivas y restricción de capacidad

En relación a cómo cambia el conjunto de líneas atractivas cuando se activa la restricción de capacidad, se considera un problema de punto fijo en donde el tiempo de espera del problema de optimización descrito con las ecuaciones (2) a la (6) se obtiene de manera endógena. El tiempo de espera de cada sección de línea, correspondiente a la iteración  $n + 1$  del modelo propuesto (con  $n > 1$ ), se puede obtener a partir de la ecuación (1) de la siguiente forma.

$$te_{sl}^{n+1} = te_{sl}^n + d_{sl}^n \quad (8)$$

$$\frac{\alpha_l}{f_{sl}^{n+1}} = \frac{\alpha_l}{f_{sl}^n} + d_{sl}^n \quad (9)$$

Como  $d_{sl}^n$ , corresponde a la demora adicional de la sección de línea que se obtiene a partir de las condiciones de equilibrio del problema, se convierte en una variable endógena que tiene que ser obtenida a partir de la asignación del problema.

La forma de abordar este problema es similar a lo que hace Lam *et al.* (2002) con las frecuencias elásticas, pero en vez de calcularlas a partir de los tiempos de detención, se calculan las frecuencias efectivas despejando la ecuación (9), así la frecuencia efectiva de la iteración iteración  $n + 1$ , con  $n > 1$  es:

$$f_{sl}^{n+1} = \frac{\alpha_l}{\left(\frac{\alpha_l}{f_{sl}^n} + d_{sl}^n\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{f_{sl}^n} + \frac{d_{sl}^n}{\alpha_l}\right)} \quad (10)$$

La frecuencia efectiva de la iteración  $n = 1$  corresponde a la frecuencia nominal (la frecuencia del servicio cuando no existen problemas de congestión). Además, es importante mencionar que cuando el bus no tiene capacidad disponible en el nodo inicial de la sección de línea, la frecuencia efectiva es cero.

### 3.4. Modelo final

El modelo heurístico de asignación de viajes propuesto, es un modelo que consta de dos etapas consecutivas e iterativas, ver Figura 4 en Apéndice 7.1. La primera etapa, Red de Asignación, tiene como *input* las demoras adicionales de la iteración anterior (en la primera iteración estas demoras son iguales a 0), a partir de estas demoras se obtienen frecuencias efectivas con la ecuación (10) y se resuelve el problema de líneas comunes, generando una red G(N,S).

La segunda etapa, Restricción de capacidad, recibe la red G(N,S) de la primera etapa y realiza una asignación de flujos mediante un modelo Logit. El objetivo de esta etapa es obtener demoras adicionales a partir de las condiciones de equilibrio del problema, para esto se realiza un proceso iterativo en el que se asigna y luego se obtienen demoras adicionales mediante el algoritmo de solución formulado por Bell (1995), este proceso se repite hasta que las asignaciones del subproblema del modelo converjan en los flujos.

Alcanzada la convergencia de los flujos de la segunda etapa, se revisa la convergencia de los flujos de las asignaciones finales de la etapa 2, para cada iteración  $n$  del modelo propuesto, si la convergencia no es alcanzada se repite el proceso desde la etapa Red de asignación.

Definido el modelo de asignación de manera conceptual, se propuso una red de prueba (ver Figura 2) para evaluar la capacidad predictiva del modelo. La red de prueba, se definió de manera tal que los problemas de congestión se concentraran en el arco que conecta el nodo 2 y 3 del sistema. Las demandas consideradas y los niveles de servicios asociados se muestran en la Figura 2.

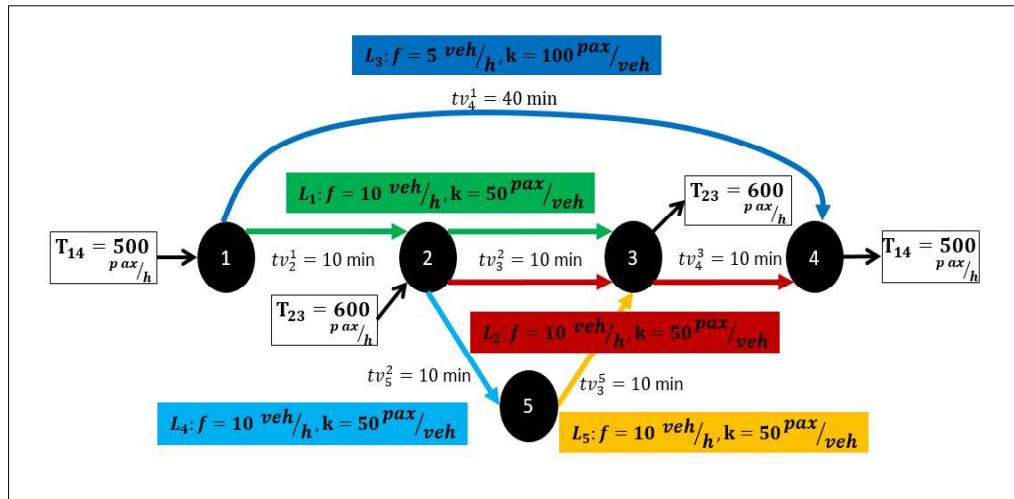


Figura 2: Red de prueba  
Fuente: Elaboración propia

Al construir la red  $G(N,S)$  de la red de prueba (ver Figura 3), se identifican tres posibles rutas que conectan los viajes desde nodo 1 al nodo 4 y dos rutas que conectan los nodos 2 y 3. Las secciones de ruta y niveles de servicios asociados a cada ruta, se muestran en la Tabla 1.

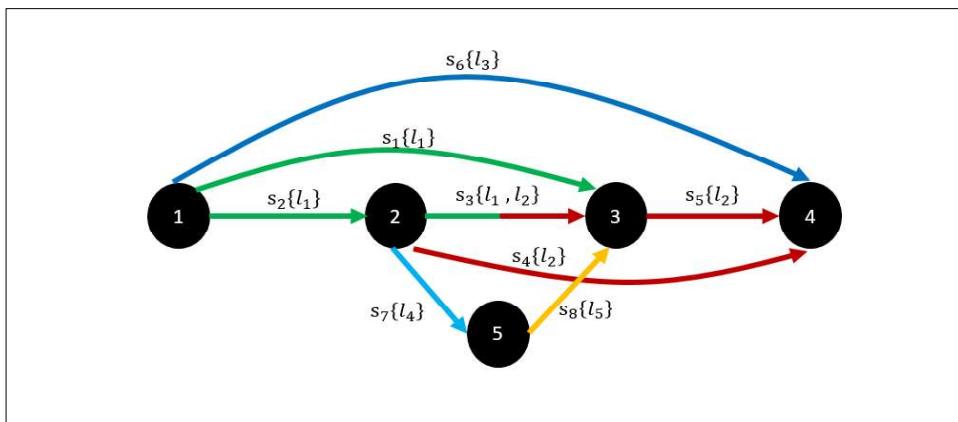


Figura 3: Red  $G(N,S)$  de red ficticia de prueba  
Fuente: Elaboración propia

Tabla 1: Rutas y niveles de servicios asociados a red de prueba

Demanda [pax/veh]	Rutas	Secciones de ruta	Tiempos de viaje [min]	Tiempos de espera [min]
$T_{14}=500$	$h_1$	$s_2 - s_4$	30	6
	$h_2$	$s_1 - s_5$	30	6
	$h_3$	$s_6$	40	6
$T_{23}=600$	$h_4$	$s_3$	10	1,5
	$h_5$	$s_7 - s_8$	20	6

El comportamiento esperado de los usuarios para la red de prueba, que respeta el S.U.E. y la restricción de capacidad de los vehículos, se puede caracterizar de la siguiente forma, los viajeros que van desde el nodo 1 al 4, eligen la segunda ruta, ya que es una de las rutas con menor costo de viaje esperado asociado y su tiempo de espera no se ve afectado por la congestión en el nodo 2. En relación a los pasajeros que van desde 2 a 3, se espera que 500 puedan viajar por la sección de ruta 3, pero sin considerar la línea verde, porque esta queda sin capacidad disponible, debido a las decisiones de los viajeros de 1 a 4, y los otros 100 tengan que viajar por la ruta de mayor costo.

Al evaluar los resultados del modelo en la red de prueba, considerando  $\theta = -1$  y  $\alpha = 0,5$ , se obtienen los resultados de Tabla 2, estos respetan la restricción de capacidad de los vehículos, pero no el S.U.E., ya que hay viajeros que eligen rutas de mayor costo para que todos logren viajar.

Tabla 2: Resultados de asignación de modelo propuesto

Demanda [pax/h]	Rutas	Secciones de ruta	Tiempos de viaje [min]	Tiempos de espera fijo [min]	Tiempo de espera adicional [min]	Flujo [pax/h]
$T_{14}=500$	$h_1$	$s_2 - s_4$	30	6	9.3	200,4
	$h_2$	$s_1 - s_5$	30	6	9.3	200,4
	$h_3$	$s_6$	40	6	0	99,2
$T_{23}=600$	$h_4$	$s_3$	10	1.5	4.6	600,0
	$h_5$	$s_7 - s_8$	20	6	0	0.0

Al revisar el detalle, se observa que existen 99,2 pasajeros que van desde el nodo 1 al 4 por la ruta de mayor costo de viaje (ruta 3), esto ocurre porque el modelo le asigna un costo de espera adicional que no corresponde a la segunda ruta y hace atractiva la tercera ruta. La razón de este problema es que la formulación de Lam *et al.* (2002), considera el tiempo de espera de cada etapa como la suma de los tiempos de esperas adicionales de los segmentos de línea que componen las secciones de líneas atractivas. Entonces la segunda ruta tiene asociado un tiempo de espera adicional en la sección de ruta  $s_1$ , porque existen problemas de congestión en el segmento de 2 a 3 de la línea verde, a pesar de que los pasajeros que toman la línea verde en el nodo 1, no experimentan demoras adicionales, porque en el paradero 1 no existen problemas de congestión.

Esto sucede, porque el modelo de Lam *et al.* (2002) se basa en el modelo de Bell (1995), que tiene como supuesto el manejo de redes del tipo *store-and-forward*. Este tipo de redes, como dice su nombre se caracterizan por almacenar y luego enviar, lo que es adecuado para redes de transporte privado, como las modeladas por Bell (1995), en donde los tiempos de espera experimentados por problemas de capacidad de las calles dependen de todos los arcos por donde pasan las rutas, ya que un vehículo no puede avanzar a la siguiente calle si no existe capacidad disponible. Sin embargo, en redes de transporte público los usuarios solo experimentan tiempos de espera en los paraderos de inicio de cada etapa y no en todos los paraderos de la ruta.

Dicho esto se realizó el primer cambio al modelo de asignación base, este consistió en redefinir la formulación del tiempo de espera adicional de cada sección de línea igual al tiempo de espera del

primer segmento de línea que la compone y no como la suma de los tiempos de esperas de todos los segmentos de línea que la componen, tal y como se muestra en la ecuación (11).

$$d_{sl}^n = d_a^n / \text{origen}(a) = \text{origen}(sl) \wedge \text{linea}(a) = \text{linea}(sl) \quad (11)$$

Tabla 3: Resultados de modelo propuesto modificado

Demanda [pax/veh]	Rutas	Secciones de ruta	Tiempos de viaje [min]	Tiempos de espera fijo [min]	Tiempo de espera adicional [min]	Flujo [pax/h]
$T_{14}=500$	$h_1$	$s_2 - s_4$	30	6	20,6	0,0
	$h_2$	$s_1 - s_5$	30	6	0	499,9
	$h_3$	$s_6$	40	6	0	0,0
$T_{23}=600$	$h_4$	$s_3$	10	3	11,4	499,2
	$h_5$	$s_7 - s_8$	20	6	0	100,8

El segundo cambio al modelo base consistió en redefinir la función de frecuencias efectivas, ecuación (10), ya que tal y como está definida la frecuencia efectiva en cada iteración se mantiene o disminuye cuando existe una demora adicional mayor a 0 ( $d_{sl}^n > 0$ ), pero nunca aumenta. El problema de esta consideración, es que puede distorsionar los tiempos de espera asociados a cada línea y sus respectivas reparticiones de flujo.

Por ejemplo, si en la iteración enésima existen dos líneas atractivas y con problemas de congestión, en la siguiente iteración sus frecuencias efectivas respectivas serán menores y el tiempo de espera asociado a esperar esas dos líneas aumentará, este aumento puede ser tal que aparezca una tercera línea atractiva. Si con la nueva línea atractiva desaparecen los problemas de congestión, entonces ¿sería correcto “castigar” a las líneas más rápidas con frecuencias efectivas menores?, la respuesta es no, porque mantener las frecuencias efectivas que consideraban los problemas de congestión en la iteración anterior, solo distorsionaría los tiempos de esperas realmente percibidos por los usuarios y las reparticiones de flujo por las líneas que están esperando.

Como solución se propone mantener la formulación de frecuencia efectiva de la ecuación (10), pero cuando el conjunto de líneas atractivas cambie de una iteración a otra, las frecuencias efectivas se definen igual a las frecuencias nominales del problema. Así cada vez que se agrega o quita una línea, todas las líneas parten con la misma oportunidad.

Finalmente, la tercera y última modificación del modelo original, tiene que ver con el desempeño del algoritmo de solución de la segunda etapa del modelo heurístico de asignación de viajes. Aquí se detecta que la formulación para ir obteniendo las demoras adicionales en cada iteración, avanza muy lentamente cuando existen problemas grandes de congestión, por ejemplo para resolver el problema de la red de prueba, en la etapa de Restricción de capacidad de la iteración 1 del problema general, el sub-problema realiza 151 iteraciones.

La formulación de la demora adicional asociada a cada segmento de línea, Bell (1995) la define a partir de los multiplicadores de Lagrange asociados a la restricción de capacidad ( $m_a$ ) y la

variable auxiliar  $M_a$ , esta última es una función de los multiplicadores de Lagrange de la restricción de capacidad, ver ecuación (12).

$$M_a = e^{\theta m_a} \quad \text{con } m_a \leq 0 \quad (12)$$

Las condiciones de  $m_a$  y  $M_a$  para asegurar la convergencia del problema a una solución de equilibrio, se presentan en las ecuaciones (13) y (14).

$$\begin{aligned} \text{si } v_a > k_a \rightarrow m_a \text{ disminuye} \rightarrow M_a \text{ disminuye}, \\ &\quad \text{hasta que } v_a = k_a, \quad \forall a \in A \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{si } v_a < k_a \rightarrow m_a \text{ aumenta} \rightarrow M_a \text{ aumenta}, \\ &\quad \text{hasta que } v_a = k_a \text{ ó } m_a = 0, \quad \forall a \in A \end{aligned} \quad (14)$$

La definición de  $M_a^{n+1}$ ,  $\forall a \in A$ , con  $n > 1$ , que cumple con las ecuaciones (13) y (14) es la siguiente:

$$M_a^{n+1} = \min\left\{1, \frac{k_a^n}{v_a^n} M_a^n\right\} \quad (15)$$

Los  $M_a^{n=1}$  se inicializan en 1, para todos los segmentos de línea  $a$ .

Otra formulación de  $M_a^{n+1}$  que cumple con las ecuaciones (13) y (14) es la ecuación (16).

$$M_a^{n+1} = \min\left\{1, \left(\frac{k_a^n}{v_a^n}\right)^d M_a^n\right\} \quad (16)$$

Se probaron distintos  $d$  y el que mejor resultó fue  $d = 4$ , de esta forma las 151 iteraciones disminuyeron a 41. Es importante mencionar que cuando el problema tiene poca congestión en los arcos, usar un  $d$  muy grande podría generar más iteraciones, con este  $d = 4$ , en ningún caso se obtuvieron más iteraciones que el caso con  $d = 1$ .

#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Luego de formular el modelo heurístico de asignación de viajes definitivo se realizaron pruebas en una red real altamente congestionada como el Metro de Santiago, año 2013, para esta red se utilizaron datos proporcionados por SECTRA y una utilidad representativa como la del modelo de elección de rutas de Raveau *et al.* (2011).

Las variables consideradas en la función de utilidad son: tiempo de viaje, tiempo de espera, tiempo de caminata, estaciones de transbordo, transbordo en subida, transbordo sin escalera mecánica, líneas nueva (línea 4 y 4A), porcentaje medio de ocupación, probabilidad de sentarse, probabilidad de subir, costo angular, percepción de alejarse y percepción de devolverse.

La probabilidad de subir y sentarse, consideradas como variables binarias que se activan cuando la ocupación es mayor al 85% o menor al 15% respectivamente, fueron reemplazadas por una

sola variable continua de ocupación al subir. Esta modificación se hizo, porque las variables binarias producían que las funciones de utilidad no fueran continuas y que el algoritmo de solución no convergiera.

$$Ocupación_{subir}^n = \left( \frac{V_{sr}^n + \tilde{V}_{sr}^n}{K_{sr}^n} \right) \quad (17)$$

Donde:

- $V_{sr}^n$ : Corresponde al flujo de la sección de ruta  $sr$ .
- $\tilde{V}_{sr}^n$ : Corresponde al flujo competente<sup>1</sup> de la sección de ruta  $sr$ .
- $K_{sr}^n$ : Corresponde a la capacidad de la sección de ruta  $sr$ .

Como la medida de la ocupación al subir captura a los pasajeros que no pueden abordar el primer vehículo, esta se reemplazó por la formulación del tiempo de espera adicional descrito en el capítulo 3, para poder probar el modelo heurístico de asignación de viajes.

Además de obtener resultados para esta asignación, se generaron otras dos variaciones del modelo con el objetivo de comparar los resultados del modelo propuesto con otras formulaciones del tiempo de espera adicional por no abordar el primer vehículo. Se implementó una versión que considera ocupación al subir, variable modificada para el modelo de Raveau *et al.* (2011) y otra versión con una función tipo BPR como la propuesta por De Cea y Fernández (1993).

Para la función BPR(ecuación 18), se utilizó los parámetros calibrados para la red de Metro de Santiago 2013 y proporcionada por SECTRA. El tiempo de espera adicional tiene los mismos parámetros de calibración,  $\beta$  y  $m$ , para todas las líneas de metro, por lo tanto para cada sección de ruta  $sr$ , se obtiene la siguiente expresión para el tiempo de espera adicional:

$$d_{sr}^n = \beta \left( \frac{V_{sr} + \tilde{V}_{sr}}{K_{sr}} \right)^m = 1.5 \left( \frac{V_{sr} + \tilde{V}_{sr}}{K_{sr}} \right)^6 \quad (18)$$

Es importante mencionar, que al revisar los resultados para el Metro de Santiago, año 2013, considerando como demanda los viajes que terminan entre las 08:00 hrs y las 09:00 hrs, se obtienen asignaciones, que para la oferta entregada por SECTRA no existen problemas de congestión. Como esto es poco realista para la punta mañana, lo que se hizo fue modificar la oferta de manera de llevar el sistema al límite.

Los resultados del modelo heurístico de asignación de viajes, para la red de Metro de Santiago, año 2013, muestran que solo la formulación de tiempo espera propuesta en el capítulo 3 es capaz de encontrar una solución de equilibrio que respete el Equilibrio de Usuarios Estocástico y la restricción de capacidad estricta de los vehículos (ver Tabla 4). En relación a las iteraciones que realiza cada formulación en el algoritmo de asignación, las primeras dos formulaciones

<sup>1</sup> El flujo competente de una sección de ruta corresponde a los pasajeros que utilizan las mismas líneas atractivas de la sección de ruta y compiten por las capacidades disponibles de las líneas. Se distinguen dos tipos de flujo competente, los que quitan capacidad y los que compiten al subir.

convergen en 2 iteraciones y la tercera en 3 iteraciones. Lo anterior, puede ser irrelevante en una red pequeña, pero muy incidente en una red del tamaño necesario para representar una ciudad como Santiago.

Tabla 4: Segmentos sobrecargados en Asignación de Red de Metro de Santiago, 2013

Modelo de Asignación	Segmentos de línea sobrecargados
Modelo base + ocupación al subir	4
Modelo base + (De Cea & Fernández, 1993)	3
Modelo base + (Formulación propuesta)	0

## 5. CONCLUSIONES

Se propone un modelo heurístico de asignación de viajes que respeta el concepto de S.U.E. y restricción de capacidad de los vehículos. El modelo consta de dos etapas iterativas que se hacen cargo de cómo la restricción de capacidad activa afecta: (1) la definición de conjunto de líneas atractivas y (2) genera aumentos en los tiempos de esperas percibidos por los usuarios, debido a que no pueden abordar el primer vehículo.

Se muestra que el modelo propuesto por Lam *et al.* (2002) genera asignaciones que respetan la restricción de capacidad de los vehículos, pero no el S.U.E., ya que para que el problema cumpla con ambos supuestos es necesario que las demoras adicionales de cada ruta sean igual a las demoras de todos los segmentos de línea que componen la ruta, pero considerar este tipo demora no es compatible con las redes de transporte público, si con redes *store-and-forward*, como las redes de transporte privado.

En cuanto a la modelación de frecuencias efectivas, se detectó que formularla mediante una función decreciente con las demoras adicionales obtenidas en cada iteración puede distorsionar los tiempos de esperas y la repartición de flujo de los usuarios.

En relación, al desempeño del algoritmo de ejecución de la segunda etapa del modelo heurístico de asignación de viajes, se muestra que con una pequeña modificación de la formulación del tiempo de espera adicional de cada iteración del sub-problema, se puede mejorar significativa la convergencia del algoritmo.

Al aplicar el modelo en una red real de tamaño medio, como el Metro de Santiago, año 2013, se obtienen soluciones de equilibrio que respetan el concepto de S.U.E. y la restricción estricta de capacidad de los vehículos, no así con otro tipo de formulaciones para el tiempo de espera adicional, como las propuestas por Raveau *et al.* (2011) y De Cea y Fernández (1993). Esto implica que las soluciones que no respetan la restricción de capacidad de los vehículos, sobreestimen los flujos en algunos arcos y se subestimen en otros, generando a su vez costos asociados al viaje sobre o sub estimados y por lo tanto obteniendo predicciones de flujo de pasajeros alejadas de la realidad.

En cuanto al desempeño del algoritmo, si bien el modelo propuesto solo realiza una iteración más del modelo general al comparar con las otras formulaciones, el sub-problema de restricción de

capacidad requiere una gran cantidad de iteraciones para obtener el tiempo de espera adicional a partir de las condiciones de equilibrio. Esto para redes pequeñas y medianas, aún es manejable, ya que ninguna asignación demoró en total más de 4,3 minutos. Sin embargo, queda propuesto como futura línea de investigación profundizar en el desempeño computacional del algoritmo en redes más grandes como la de red de transporte público de Santiago, Transantiago.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- Bell, M. G. (1995). Stochastic user equilibrium assignment in networks with queues. **Transportation Research B** 29(2), 125-137.
- Chriqui, C., & Robillard, P. (1975). Common bus lines. **Transportation Science**, 9(2) 115-121.
- Cominetti, R., & Correa, J. (2001). Common-lines and passenger assignment in congested. **Transportation science**, 35(3), 250-267.
- De Cea, J., & Fernández, E. (1993). Transit assignment for congested public transport systems: an equilibrium model. **Transportation science**, 27(2), 133-147.
- Fu, Q., Liu, R., & Hess, S. (2012). A review on transit assignment modelling approaches to congested networks: a new perspective. **Procedia-Social and Behavioral Sciences**, 54, 1145-1155.
- Lam, W. H., Gao, Z. Y., Chan, K. S., & Yang, H. (1999). A stochastic user equilibrium assignment model for congested transit networks. **Transportation Research Part B: Methodological**, 33(5), 351-368.
- Lam, W. H., Zhou, J., & Sheng, Z. H. (2002). A capacity restraint transit assignment with elastic line frequency. **Transportation Research Part B**, 919-938.
- Raveau, S., Muñoz, J. C., & De Grange, L. (2011). A topological route choice model for metro. **Transportation Research Part A: Policy and Practice** 45.2, 138-147.
- Train, K. E. (2009). **Discrete choice methods with simulation**. 2<sup>nd</sup> Ed. Cambridge university press, Cambridge.

## 7. APÉNDICE

### 7.1. Modelo Heurístico de Asignación de Viajes

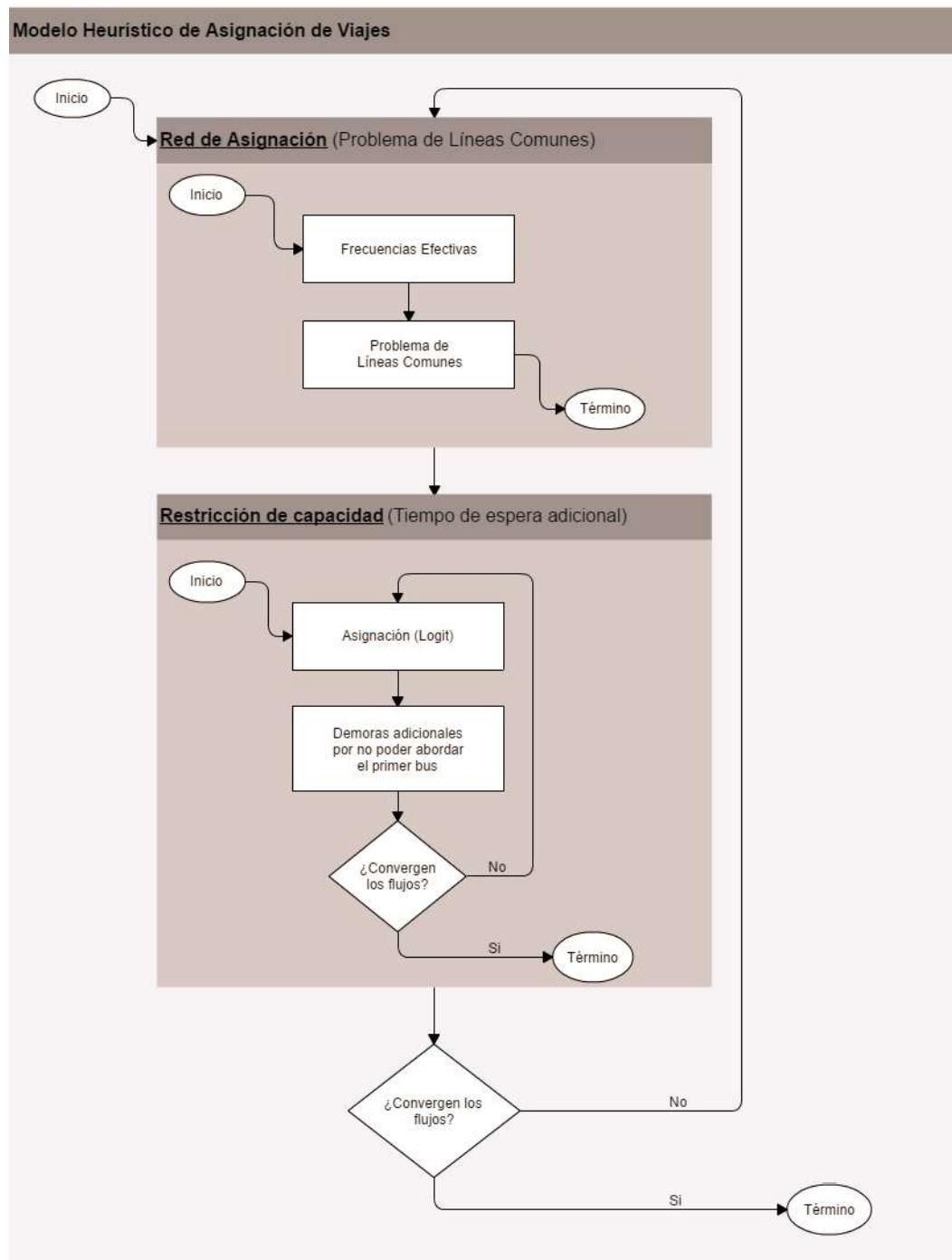


Figura 4: Modelo Heurístico de Asignación de Viajes  
Fuente: Elaboración propia