

MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DEL MODELO ESTOCÁSTICO DE ASIGNACIÓN DE VIAJES A REDES DE TRANSPORTE PRIVADO: MARKOVIAN TRAFFIC EQUILIBRIUM

Ernesto Castillo, Universidad de Chile, ercastil@ing.uchile.cl
Cristián E. Cortés, Universidad de Chile, ccortes@ing.uchile.cl
Pedro Donoso, Universidad de Chile, pedrodonosos@gmail.com
Leonel Gutiérrez, Universidad de Chile, lgutierrez@ing.uchile.cl
Jorge Órdenes-Odi, Universidad de Chile, joordenes@ing.uchile.cl

RESUMEN

Este trabajo propone dos métodos, uno de Mínimos Cuadrados y otro de Máxima Verosimilitud, para estimar el modelo de asignación “*Markovian Traffic Equilibrium*”. Este modelo usa cadenas de Markov absorbentes, incorpora estocasticidad en las elecciones de ruta y utiliza funciones de tiempo-flujo y de utilidad de los arcos de las rutas, con parámetros que deben estimarse. El problema de estimación es complejo porque el modelo considera congestión, con lo cual, las variables de servicio dependen del equilibrio. Se realizan pruebas con datos sintéticos y se analiza la capacidad de cada enfoque para aproximar los parámetros poblacionales en distintos escenarios.

Palabras clave: *Asignación estocástica, Estimación de parámetros, Modelo de equilibrio de transporte privado*

ABSTRACT

This research proposes a Least Squares method and a Maximum Likelihood method for estimating the “*Markovian Traffic Equilibrium*” model. This model performs a traffic assignment based on absorbing Markov Chains, adding stochasticity in route choices of individuals. The parameters to be estimated are those present in flow-time performance functions and utility functions on the arcs composing the routes. The estimation procedure is complex as the model considers traffic congestion, then the service variables depend on the equilibrium. Tests built on synthetic data are conducted; we analyze the capability of each approach to approximate the population parameters under different scenarios.

Keywords: *Stochastic Assignment, Parameter Estimation, Traffic equilibrium model*

1. INTRODUCCIÓN

En un contexto de planificación de cualquier conurbación urbana de importancia, es relevante ofrecer un diseño apropiado, tanto de los sistemas de transporte como de las políticas de desarrollo y uso del suelo, en el mediano y en el largo plazo. Uno de los objetivos relevantes de un tomador de decisiones será entonces minimizar los impactos provocados por los viajes necesarios para el buen funcionamiento y dinámica de las actividades diarias de la ciudad. Una herramienta usada comúnmente para decidir acerca de proyectos de inversión en sistemas de transporte a niveles estratégico y táctico, considerando infraestructura, diseño de flota, modalidades de operación, etc., es la simulación del funcionamiento de la ciudad, enfocándose en los sistemas de transporte y su interacción con el uso de suelo urbano, que define un cierto nivel de demanda, considerando un cierto nivel de infraestructura, flota y dispositivos dados. Lo más común es recurrir a la herramienta de planificación consistente en un modelo de cuatro o cinco etapas, dependiendo de si la modelación se hace desde el uso del suelo (movilidad), o bien este uso se considera exógeno. Surgen entonces los modelos de movilidad, generación y atracción de viajes, seguidos por la etapa de distribución de viajes, partición modal y finalmente la asignación de los viajes a las redes físicas.

El foco de este trabajo está en la estimación de un modelo de asignación de flujos vehiculares de transporte privado a la red vial. Este modelo es fundamental para simular la movilidad en la ciudad y con esto contribuir a la toma de buenas decisiones de inversión en infraestructura y dispositivos viales, a niveles táctico-estratégico. Este proceso de estimación requiere enfocarse primero en la selección de un modelo adecuado que represente las condiciones de equilibrio en una red de transporte privado, incluyendo la incertidumbre asociada tanto a la percepción de las variables de nivel de servicio por parte de los usuarios, así como a los errores de medición de tales variables. Debemos notar que, en este contexto, las fuerzas que mueven el sistema hacia una condición de equilibrio están comandadas por el mecanismo de elección de ruta. Una vez que el modelo ha sido escogido, se procede a calibrar los parámetros necesarios para representar de la mejor manera las elecciones observadas de la población de individuos que usa el sistema de transporte privado para satisfacer sus viajes. La modelación es de naturaleza estática, con un análisis que se concentra en un cierto periodo del día, donde tanto las capacidades de los arcos, así como la distribución de la demanda son datos de entrada (parámetros) que permanecen fijos.

En la etapa de asignación de los viajes a la red, uno puede distinguir la asignación del transporte privado de la asignación de los pasajeros a los sistemas de transporte público. En situaciones con congestión, tanto en la red como dentro de los vehículos, la asignación responde más bien a un fenómeno de equilibrio caracterizado por en (Wardrop, 1952) y que puede aplicarse al comportamiento de los usuarios que quieren alcanzar su destino. Recientemente (Pineda *et al*, 2016) formulan un modelo que integra el equilibrio del transporte público con el transporte privado, considerando tanto congestión como aleatoriedad en las decisiones de viaje de los individuos.

Los modelos de equilibrio más estudiados son los de transporte privado a partir de (Sheffi, 1985) en adelante. En este trabajo nos concentraremos en la modelación del transporte privado, dejando el transporte público como parte de trabajo en curso. En éstos, se simula el comportamiento de los usuarios en cuanto a qué ruta elegirán los automovilistas para realizar su viaje dadas las condiciones del sistema para un período de tiempo dado. En ese sentido entregan información

relevante para evaluar el impacto que pueda tener la realización de un potencial proyecto de transporte privado en una determinada región. Además, debido al avance de la tecnología, hoy día es posible obtener información muy detallada del movimiento de las personas y vehículos, mientras realizan sus viajes, por lo que es posible diseñar modelos más realistas, ajustando adecuadamente sus parámetros, para que tengan mayor capacidad de predecir las decisiones de los individuos ante situaciones de incertidumbre, y ante la posibilidad de obtener información en tiempo real de las características del sistema de transporte al momento de tomar decisiones de viaje y ruteo. Hoy en día es fundamental considerar aleatoriedad en las decisiones de viaje de los usuarios, considerando la variedad de información disponible que evidentemente hace que las decisiones cambien en el transcurso de los viajes producto de la nueva información que va cambiando dinámicamente a medida que el usuario se empieza a acercar a su destino. Nuestra premisa es que en la actualidad es posible desarrollar mejores herramientas de ajuste y calibración de parámetros, requeridos por modelos de equilibrio estocásticos más complejos, considerando las observaciones del tracking de los GPS, así como la posibilidad de recibir información del sistema por parte de los usuarios.

Para que estos modelos funcionen bien, es importante calibrar adecuadamente los parámetros asociados tanto al comportamiento de los usuarios, así como aquellos que tienen relación con el rendimiento de los dispositivos viales asociados a la infraestructura. Estos parámetros dependerán del tipo de modelo de comportamiento que se esté suponiendo, y deberán ajustarse con data observada de las decisiones de ruteo que consideran los individuos en sus viajes diarios.

El objetivo del presente trabajo es mostrar dos técnicas de estimación de los parámetros del modelo estocástico de equilibrio de asignación de flujos en redes de transporte privado, *Markovian Traffic Equilibrium* (MTE) reportado en la literatura, considerando información proveniente del funcionamiento del sistema urbano.

El modelo más comúnmente empleado es el *Deterministic User Equilibrium* (DUE), que se trata de un modelo estático determinístico en el cual se asume que los usuarios minimizan su tiempo total de viaje donde en el equilibrio ninguno puede cambiar unilateralmente de ruta para mejorar su tiempo de viaje (Sheffi, 1985). En torno al modelo DUE, se han y se siguen desarrollando una serie de algoritmos de resolución como se puede observar en un trabajo reciente (Perederieieva *et al.*, 2015), donde se realiza una comparación exhaustiva de varios métodos, siendo los más sobresalientes: algoritmo B (Dial, 2006) y algoritmo TAPAS (Bar-Gera, 2010).

El modelo DUE tiene una extensión al caso estocástico: *Stochastic User Equilibrium* (SUE) desarrollada en sus inicios por (Daganzo y Sheffi, 1977) donde los tiempos de viajes percibidos por los usuarios se consideran variables aleatorias y se introduce un modelo de elección discreta para la selección de las rutas. Cuando la variancia de los errores se acerca a cero, el método SUE aproxima al modelo determinístico por lo que puede verse como una generalización del DUE (Watling *et al.*, 2015). Estos últimos autores buscan llegar a una formulación intermedia entre el modelo DUE que considera solo la utilización de rutas de costo mínimo, y el modelo SUE, que considera todas las rutas. En cuanto a los modelos de elección discreta aplicados a la elección de ruta en el contexto estocástico (*Route Choice Models*), (Frejinger, 2008) realiza un trabajo sistemático en cuanto a distintos modelos, su estimación, datos empleados y aplicación a casos reales.

Por otra parte, utilizando un enfoque novedoso (Baillon y Cominetti, 2008) plantean el modelo MTE que es un SUE donde la elección se realiza a nivel de arcos, utilizando un enfoque de programación dinámica y el concepto de cadena de Markov absorbente aplicado al problema de asignación basándose en el trabajo de (Akamatsu, 1996). El MTE tiene una ventaja considerable en contraste con el enfoque basado en elección de ruta por su elegancia en reducir el costo en términos de cálculo computacional. Por esta razón, el MTE se incorporó en el modelo de equilibrio integrado de transporte público y privado *Integrated Equilibrium Model* mencionado anteriormente (Pineda *et al*, 2016), en el cual se abre la opción de moverse de una red a la otra por medio de instalaciones *Park-and-Ride*. Tanto en el trabajo original (Baillon y Cominetti, 2008) como en (Pineda *et al*, 2016), se utiliza una variación del modelo Logit multinomial para elección de ruta debido a su popularidad y conveniencia de entregar expresiones analíticas cerradas.

Es importante destacar como desarrollo más reciente el *Distributionally Robust Markovian Equilibrium* (Ahipaşaoğlu *et al*, 2017), que extiende las capacidades del MTE sugiriendo cambios en el modelo de elección discreta a utilizar suponiendo que se posee solo información de las distribuciones marginales de los errores.

Con respecto a los modelos de elección discreta aplicados al enfoque de selección por arcos, (Fosgerau *et. al*, 2013) plantean el modelo *Recursive Logit* que cae dentro de la categoría de los *Dynamic Discrete Choice Models* por el carácter recursivo que plantea el problema dinámico en el que se basan; en el caso del MTE, se refiere a la cadena de Markov subyacente. En este trabajo realizan una estimación por máxima verosimilitud tomando como datos una muestra de rutas reales de GPS considerando los tiempos de viajes estáticos y determinísticos, a diferencia del MTE donde son estocásticos y existe congestión.

En un trabajo posterior, (Mai, 2015) extiende el trabajo de (Fosgerau *et. al*, 2013), proponiendo modelos de elección de ruta más generales, así como la estimación de estos modelos y algoritmos de optimización asociados. En particular, se elabora el modelo *Nested Recursive Logit* como una extensión del *Recursive Logit* donde existe un factor de escala para cada arco de la red, el cual se estima utilizando el método de máxima verosimilitud (Mai *et al*, 2015). Cabe destacar la similitud del modelo *Nested Recursive Logit* y el modelo de elección utilizado en este trabajo, donde la principal diferencia viene por el hecho de que (Mai *et al*, 2015) consideran una red sin congestión.

Dados los antecedentes que existen respecto de la calibración de los parámetros asociados a los modelos estocásticos de equilibrio en el contexto de transporte privado, en el presente artículo nos enfocamos en la estimación de los parámetros del MTE utilizando dos métodos: uno basado en mínimos cuadrados y el otro en máxima verosimilitud. En la siguiente sección se entrega un resumen del modelo MTE. A continuación, en la Sección 3, se desarrollan las técnicas de estimación de parámetros propuestas. En la Sección 4 se muestran resultados de estos procedimientos para algunos casos de redes sintéticas. Finalmente, en la Sección 5 se hace una síntesis, se destacan las conclusiones principales y se esbozan las de investigación en curso y futuras de este trabajo.

2. MARKOVIAN TRAFFIC EQUILIBRIUM

El modelo de equilibrio de tráfico Markoviano (*Markovian Traffic Equilibrium*, MTE) es un modelo de asignación estocástico, que busca determinar el flujo de equilibrio de transporte privado en una red a partir de la definición de una cadena de Markov absorbente, la cual atribuye una probabilidad de transición de ir desde un punto a otro a partir de la percepción del tiempo de viaje de los usuarios (Baillon y Cominetti, 2008).

La red de tráfico es modelada con un grafo $G = (N, A)$, donde N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos y con el conjunto D que está formado por nodos de destinos de la red ($D \subseteq N$). El objetivo del modelo es determinar cómo las demandas g_i^d , desde nodos de origen i a nodos de destino d ($i \neq d$) fluyen a través de la red de manera que exista un equilibrio en el sistema que satisface, además, la siguiente condición de conservación de flujo:

$$g_i^d + \sum_{a \in A_i^-} v_a^d = \sum_{a \in A_i^+} v_a^d, \quad \forall d \in D, i \neq d, \quad (1)$$

donde $\{A_i^-, A_i^+\}$ son los conjuntos de arcos que entran y salen del nodo i , respectivamente, y v_a^d es el flujo que pasa por el arco a con destino d . Modelando la incertidumbre que existe en la percepción del tiempo en un arco a como una variable aleatoria, $\tilde{t}_a = t_a + \epsilon_a$, con $\mathbb{E}(\epsilon_a) = 0$, se obtienen modelos estocásticos que asocian una probabilidad \mathbb{P} a elegir un arco u otro. El costo por ruta $\tilde{c}_r = \sum_{a \in R} \tilde{t}_a$, con R el conjunto de arcos que componen la ruta r ; por lo tanto, se define el costo óptimo de ir desde el nodo i al destino d , $\tilde{t}_i^d = \min_{r \in R_i^d} \tilde{c}_r$ (R_i^d es el conjunto de rutas que van desde i a d), y el costo asociado al arco a con destino d , $\tilde{z}_a^d = \tilde{t}_a + \tilde{t}_{j_a}^d$, donde el arco a une el nodo i_a con el nodo j_a .

La regla de distribución queda dada por un esquema iterativo, en el cual el flujo esperado en el nodo i con destino d , x_i^d , se divide a través de los arcos acorde a

$$v_a^d = x_i^d \mathbb{P}(\tilde{z}_a^d \leq \tilde{z}_b^d, \forall b \in A_i^+), \quad a \in A_i^+. \quad (2)$$

donde $\mathbb{P}(\tilde{z}_a^d \leq \tilde{z}_b^d, \forall b \in A_i^+) = P_{i_a j_a}^d = \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d)$ y $\varphi_i^d(z^d) = \mathbb{E}(\min_{a \in A_i^+} z_a^d + \epsilon_a^d)$. ϵ_a^d es la componente estocástica de la variable aleatoria $\tilde{z}_a^d = z_a^d + \epsilon_a^d = \tilde{t}_a + \tilde{t}_{j_a}^d$.

Las ecuaciones de distribución de flujo quedan determinadas por

$$v_a^d = x_i^d \frac{\partial \varphi_i^d}{\partial z_a^d}(z^d), \quad \forall a \in A_i^+, \quad x_i^d = g_i^d + \sum_{a \in A_i^-} v_a^d \quad (3)$$

Tomando el valor esperado de \tilde{z}_a^d y \tilde{t}_i^d se obtiene $z_a^d = t_a + \varphi_{j_a}^d(z^d)$ y $\tau_i^d = \varphi_i^d((t_a + \tau_{j_a}^d)_{a \in A})$. A partir de esto, se tiene que un vector en arcos $w \in R^{|A|}$ es un MTE si y sólo si $w_a = \sum_{d \in D} v_a^d$, y se satisfacen todas las condiciones anteriores.

Baillon y Cominetti en 2008 proponen el método de promedios sucesivos para encontrar los flujos de equilibrio (Method of Successive Averages, MSA), el cual estima $\tilde{w}^k = \sum_{d \in D} v_a^d$ y luego lo usa para actualizar la solución, de la forma:

$$w_a^{k+1} = w_a^k - \alpha_k [w_a^k - \tilde{w}_a^k] = (1 - \alpha_k)w_a^k + \alpha_k \tilde{w}_a^k, \quad (4)$$

donde α_k debe cumplir que $\sum_k \alpha_k = \infty$ y $\sum_k \alpha_k^2 < \infty$ para demostrar la convergencia del método.

Si se consideran modelos de elección discreta Logit se obtiene:

$$\tau_{i_a}^d = \varphi_{i_a}^d(t_a + \tau_{j_a}^d) = -\frac{1}{\beta_{i_a}^d} \log \left(\sum_{a \in A_i^+} \exp(-\beta_{i_a}^d(t_a + \tau_{j_a}^d)) \right) \quad (5)$$

$$P_{i_a j_a}^d = \frac{\exp(-\beta_i^d(t_a + \tau_{j_a}^d))}{\sum_{b \in A_i^+} \exp(-\beta_i^d(t_b + \tau_{j_b}^d))}, \quad (6)$$

donde el arco a une el nodo i con el nodo $j = j_a$; y β_i^d es el parámetro del modelo Logit. Por otro lado, se define la función $t_a = s_a(w_a)$ como:

$$t_a = t_a^0 \left(1 + b_a \left(\frac{w_a}{c_a} \right)^{p_a} \right). \quad (7)$$

con t_a representando el tiempo de viaje en el arco a a partir de una especificación BPR, con t_a^0 el tiempo de flujo libre, c_a la capacidad del arco, y (b_a, p_a) los parámetros de la función. Como funciones de rendimiento podrían considerarse otras formas funcionales (funciones cónicas por ejemplo). Se tienen entonces parámetros que modelan el comportamiento de los usuarios y la red de transporte, a saber, β_i^d , b_a , p_a . El valor de β_i^d tiene relación con la incertidumbre en la apreciación del tiempo por parte de los usuarios, donde para mayores valores de β_i^d los usuarios perciben el tiempo de viaje con menor variabilidad. A su vez, los parámetros (b_a, p_a) relacionan el nivel de congestión con el aumento en el tiempo de viaje en los arcos.

Finalmente, se puede emplear el Algoritmo 1 para obtener una solución del problema de optimización del MTE. En este cálculo, los parámetros b_a, p_a, β_i^d deben estimarse apropiadamente, lo cual es una tarea compleja, y debe ser abordada empleando un método numérico para obtener una solución.

Algoritmo 1: Implementación Algoritmo MTE.

-
- 1: Inicializar las entradas del algoritmo (g_i^d, t_a^0, c_a) , parámetros (β_i^d, b_a, p_a) , y condiciones iniciales ($w_a^0 = 0$). Iteraciones $k = 0$.
 - 2: Repetir mientras $\|w_a^{k+1} - w_a^k\| / \|w_a^{k+1}\| < \epsilon$
 - 3: $k = k + 1$.
 - 4: Calcular tiempos de viaje en arcos, t_a , usando (7).
-

-
- 5: Obtener $\tau_{i_a}^d$ resolviendo (5).
 6: Computar probabilidades $P_{i_a j_a}^d$ con la expresión (6).
 7: Calcular flujos esperados en nodo x^d usando $[I - (P)^T]x^d = g^d$.
 8: Obtener flujos en arco a con destino d , v_a^d , usando (2).
 9: Calcular flujos totales inducidos $\tilde{w}_a^{k+1} = \sum_{a \in A} v_a^d$.
 10: Emplear MSA: $w_a^{k+1} = w_a^k - \alpha_k [w_a^k - \tilde{w}_a^{k+1}]$.
 11: Fin
-

3. MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DEL MODELO MTE

Suponga que se dispone de una red de transporte privado, representada por los conjuntos N de nodos y A de arcos, con $D \subseteq N_C$ un subconjunto que contiene los nodos de destino a partir de un conjunto de nodos centroides de las zonas N_C . Además, se conoce la matriz de demanda de viajes entre zonas en el periodo de modelación, representada por $(g_i^d)_{i \in N, d \in D}$. A su vez, se suponen conocidos los tiempos de viaje de flujo libre t_a^0 y las capacidades de todos los arcos c_a de la red. El propósito de esta sección es presentar métodos para estimar los parámetros del modelo MTE, esto es los parámetros $(b, p) = ((b_a, p_a))_{a \in A}$ de la función de tiempo de viaje (7) y los parámetros $\beta = (\beta_i^d)_{i \in N, d \in D}$ de los modelos Logit de elección de arco (6).

Los métodos propuestos se diferencian inicialmente por la información disponible de la asignación de viajes a la red bajo estudio que es usada para estimar los parámetros del modelo. En primer lugar, se supone que se dispone de mediciones de flujos vehiculares w_a^* y de tiempos de viaje t_a^* en un subconjunto B de A . Con esta información, se plantea un primer método para estimar los parámetros (b, p, β) del modelo MTE, basada en el criterio de *Mínimos Cuadrados*. Si los parámetros (b, p) de las curvas de tiempo de viaje por arco son conocidos, se plantea estimar los parámetros β alternativamente, a partir de una muestra de rutas de viajes de usuarios de transporte privado. Esta información se obtiene de dispositivos móviles de GPS o de celulares que registran el posicionamiento de una muestra de usuarios mientras viajan. Este método alternativo para estimar los parámetros β emplea el criterio de la *Máxima Verosimilitud*. A continuación, se plantean estas dos metodologías de estimación de los parámetros del modelo.

3.1. Método de Mínimos Cuadrados

El método de *Mínimos Cuadrados*, de estimación de los parámetros (b, p, β) consiste en encontrar aquellos valores de los parámetros que minimizan la suma de los errores cuadráticos de las estimaciones de los flujos y de los tiempos de viajes en los arcos donde se realizaron mediciones. Formalmente, este método consiste en resolver el siguiente problema de optimización no lineal restringido:

$$\min_{b,p,\beta} f(\beta) = \sum_{a \in B} (w_a^* - w_a(b,p,\beta))^2 + \lambda \sum_{a \in B} (t_a^* - t_a(b,p,\beta))^2 \quad (8)$$

s.a.

$$\Omega(b,p,\beta) = 0$$

donde:

$$\Omega(b,p,\beta) = \begin{bmatrix} w_a(b,p,\beta) - \sum_{d \in D} v_a^d(b,p,\beta) \\ v_a^d(b,p,\beta) - P_{i_a j_a}^d(b,p,\beta) x_{i_a}^d(b,p,\beta) \\ x^d(b,p,\beta) - \left[I - (P^d(b,p,\beta))^T \right]^{-1} g^d \\ P_{i_a j_a}^d(b,p,\beta) - \frac{\exp(-\beta_{i_a}^d(t_a + \tau_{j_a}^d))}{\sum_{b \in A_i^+} \exp(-\beta_{i_a}^d(t_b + \tau_{j_b}^d))} \\ t_a(b,p,\beta) - t_a^0 \left(1 + b_a \left(\frac{w_a(b,p,\beta)}{c_a} \right)^{p_a} \right) \\ \tau_{i_a}^d(b,p,\beta) + \frac{1}{\beta_{i_a}^d} \ln \left(\sum_{a \in A_i^+} \exp(-\beta_{i_a}^d(t_a + \tau_{j_a}^d)) \right) \end{bmatrix} \quad (9)$$

El parámetro $\lambda > 0$ representa la importancia que el modelador le asigna al error en los flujos frente al error en los tiempos de viaje por arco, y convierte las unidades de medida de ambos términos de error a una unidad común para sumarlas. También el segundo sumando de la función objetivo puede interpretarse como una relajación lagrangeana del término de error en los tiempos de viaje, parametrizada en λ . Como se aprecia el espacio factible de búsqueda de este problema de optimización corresponde al conjunto de estados de equilibrio del modelo MTE, descrito en el Capítulo 2 para diferentes valores b, p y β . Esto ocurre porque los valores de los flujos y tiempos de viaje de los arcos de la muestra B depende de los valores en todos los arcos de la red. En la mayoría de casos reales, este problema es de gran tamaño y sumado a su no linealidad, tanto en la función objetivo como también en sus restricciones, se transforma en un problema complejo de resolver. Para abordarlo, se propone resolverlo secuencialmente en dos etapas:

Etapa N°1: Resolver el problema:

$$\min_{b,p} f_t(\beta) = \sum_{a \in B} (t_a^* - t_a(b,p))^2, \quad (10)$$

donde,

$$t_a(b,p) = t_a^0 \left(1 + b_a \left(\frac{w_a}{c_a} \right)^{p_a} \right)$$

Etapa N°2: Resolver el problema:

$$\begin{aligned}
 \min_{\beta} f_w(\beta) &= \sum_{a \in B} (w_a^* - w_a(\beta))^2 \\
 \text{s.a.} \\
 \Omega(\hat{b}, \hat{p}, \beta) &= 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

donde (\hat{b}, \hat{p}) son los estimadores mínimo cuadráticos solución del problema (10). Observar que el problema planteado en la primera etapa consiste en estimar un modelo de regresión lineal, porque la función de tiempo de viaje se puede transformar a una ecuación lineal en los parámetros $\ln(b_a)$ y p_a , según se aprecia a continuación:

$$\ln\left(\frac{t_a}{t_a^0} - 1\right) = \ln(b_a) + p_a \ln\left(\frac{w_a}{c_a}\right) \tag{12}$$

Este método de descomposición del problema (8) en dos etapas, ofrece la ventaja no sólo de estimar los parámetros b y p de forma sencilla, sino que también permite usar funciones de tiempo de viaje preexistentes, requiriéndose en este caso solamente resolver el problema (11). Además, con esta descomposición ya no es necesario prefijar el parámetro λ .

El problema (11) se resuelve mediante el siguiente algoritmo de optimización iterativo: Éste parte con un valor inicial del vector β , denotada por β^0 . En general, en una iteración k , con una estimación β^k del vector β se computan todos los flujos por arco en equilibrio $(w_a(\beta^k))_{a \in A}$, siguiendo los pasos presentes en el Algoritmo 1, y a continuación, se calcula el valor de la función objetivo de (11), contrastando los flujos observados con los modelados en los arcos de la muestra. Con los valores $(f_w(\beta^q))_{q \leq k}$ se calculan estimaciones de las matrices jacobiana y hessiana para establecer direcciones de descenso de la función objetivo y se encuentra un nuevo valor de β en la iteración $k + 1$, denotada por β^{k+1} . Un algoritmo que realiza lo anterior es el método de punto interior, el cual aproxima las matrices jacobianas y hessianas utilizando diferencias finitas y la fórmula de Broyden, Fletcher, Goldfarb, y Shanno (BFGS). Se considera que el método iterativo ha convergido cuando la diferencia relativa $\|\beta^{k+1} - \beta^k\| / \|\beta^{k+1}\|$ es menor o igual a un margen de tolerancia preestablecido, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclíadiana..

3.2. Método de Máxima Verosimilitud

Si los parámetros b y p son conocidos, es posible plantear un método alternativo al de *Mínimos Cuadrados* de (11) para estimar el vector de parámetros β . Como estos parámetros están definidos en el sub-modelo de elección discreta en cada nodo del arco de salida del modelo MTE, es razonable pensar que la disponibilidad de información de estas elecciones permitiría estimar estos parámetros. Esta información de preferencias reveladas se obtiene de un conjunto de rutas de viajes en transporte privado en una muestra de usuarios, la cual es capturada de dispositivos móviles de GPS o de celulares. Se propone el siguiente método de *Máxima Verosimilitud*:

$$\max_{\beta} MV(\beta) = \sum_{d \in D_M} \sum_{a \in A_M^d} n_a^d \ln(P_{i_a j_a}^d(\beta))$$

s.a.

$$\Omega(b, p, \beta) = 0$$
(13)

donde D_M es el conjunto de destinos de viaje en la muestra de rutas, A_M^d el conjunto de arcos usados por viajes destinados a d en las rutas muestreadas, n_a^d es el número de usuarios de la muestra que viajaron al destino d y que emplearon el arco a . Si la muestra fuera un censo, n_a^d correspondería a la variable v_a^d del modelo MTE.

Como se aprecia este problema de estimación de *Máxima Verosimilitud* es más complejo que el que tradicionalmente se usa para estimar modelos Logit Multinomial porque se reconoce explícitamente que las variables explicativas de la función de desutilidad, t y τ , de las probabilidades de elección de arco, son funciones implícitas de β a través de las ecuaciones de equilibrio que describe el modelo MTE. Se observa que es necesario estimar los valores de t y también de w en todos los arcos de la red y los valores de τ en todos los pares nodo-destino.

El problema (13) se resuelve de manera análoga al de Mínimos Cuadrados, explicado en la sección anterior.

4. APLICACIÓN

Para probar los métodos de estimación propuestos se emplea una red construida sintéticamente, donde se asume conocida la función de tiempo, y cuya estructura, cantidad de nodos y arcos y parámetros asociados se presentan en la Figura 1. A su vez, se considera un solo parámetro β^* tal que $\beta_i^d = \beta^*$ para todo par (i, d) . A partir de lo anterior, se define un patrón de demanda *todos contra todos*, donde se reparte una demanda idéntica entre todos los centroides. Dados los supuestos anteriores, se consideran los siguientes casos:

- **Nivel de demanda (α):** Se definen 3 niveles de demanda donde el flujo que sale de cada centroide hacia los demás está dado por $g_i^d = \alpha \cdot 125$ [veh/h] para $\alpha \in \{1,3,6\}$.
- **Nivel de dispersión (β^*):** Se definen 3 niveles de dispersión dados por $\beta^* \in \{5,10,20\}$, donde a menor valor las elecciones de ruta se tornan más estocásticas, y a mayor valor, más determinísticas.

Por último, se varía la cantidad de muestras que se toman del sistema, considerando un 100, 50, 10 y 5% como casos posibles. Cabe destacar que en cada caso donde se tienen menos muestras que el total se realiza una selección aleatoria uniformemente distribuida de la información a considerar, y debido a dicha aleatoriedad es que se realizan 10 pruebas en cada caso, de tal manera de caracterizar la estimación mediante un promedio y desviación estándar.

Largo arco	$l_a = 100 [m]$
Capacidad arco	$c_a \sim U(1500, 2000) [veh/h]$
Capacidad conector	$c_a = 2000 [veh/h]$
Tiempo flujo libre arco	$t_a \sim U(0.4, 0.5) [min]$
Tiempo flujo libre conector	$t_a = 1 [min]$
Parámetros Función de Tiempo	$b_a = 0.15$ $p_a = 4 \quad \forall a \in A$

Nodos	109
Centroides	9
Intersecciones	100
Arcos	324
Calles	260
Conexiones	64

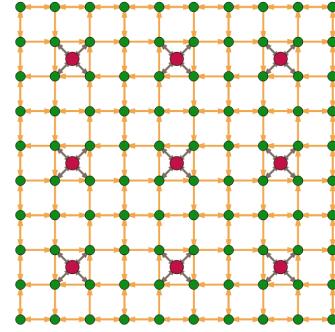


Figura 1: Red sintética para pruebas de estimación. Los círculos rojos son los centroides y los verdes los nodos de intersección. Las flechas amarillas son los arcos que representan las calles y las de color café son los arcos de conexión a centroides.

Luego, para cada uno de los escenarios posibles, se ejecuta el MTE con β^* y se obtienen los datos sintéticos que sirven para evaluar los métodos de estimación. En términos del hardware utilizado, las pruebas son realizadas en un computador Intel(R) Core (TM) i5-3330 3.00 GHz, con 8GB de RAM.

4.1. Resultados del método de Mínimos Cuadrados

La Tabla 1 presenta los resultados más representativos del método de *Mínimos Cuadrados (MC)*, donde se incluye como indicadores el error de estimación porcentual, la raíz del error cuadrático medio entre los flujos dados y estimados $RMSE_w = \sqrt{\frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} (w_a^* - w_a(\beta))^2}$ y el tiempo de ejecución del método. Las columnas de resultados indican el valor promedio y la desviación estándar (entre paréntesis) de cada variable.

Al usar niveles de demanda $\alpha = 1$ y $\alpha = 3$ el algoritmo de estimación logra representar certeramente el parámetro β^* , obteniendo errores de estimación menores a $10^{-5} \%$, incluso en las muestras de arcos más pequeñas (5%). Sin embargo, al considerar altos niveles de demanda, como en el caso $\alpha = 6$, y una cantidad baja de muestras, los datos comienzan a jugar un rol importante en la estimación, debido a que son éstos los que otorgan una dirección de búsqueda de la solución del problema de optimización.

De los resultados con peor desempeño, se observa que al disminuir las muestras aumentan las probabilidades de obtener datos con poca información, que no aportan en la búsqueda del parámetro estimado. A su vez, una mala estimación repercute en la representación de los flujos totales del sistema, donde a medida que se tiene un mayor error porcentual en la estimación del parámetro, mayor es el valor $RMSE_w$.

Tabla 1: Resultados del método de Mínimos Cuadrados, considerando distintos niveles de demanda α , parámetros β^* y porcentajes de arcos muestrados. Se incluye el promedio y la desviación estándar (entre paréntesis) de las variables.

α (Nº de arcos)	β^*	Porcentaje de arcos muestrados	β_{MC}	$100 \frac{ \beta^* - \beta_{MC} }{\beta^*} \%$	$RMSE_w$	Tiempo de ejecución [s]
1 (324 arcos)	5	5 % (16)	$5 (8,4 \cdot 10^{-9})$	$6,8 \cdot 10^{-7} (1,7 \cdot 10^{-7})$	$7,0 \cdot 10^{-7} (1,7 \cdot 10^{-7})$	4,20 (0,53)
	10	5 % (16)	$10 (2,0 \cdot 10^{-9})$	$7,2 \cdot 10^{-7} (2,0 \cdot 10^{-8})$	$3,3 \cdot 10^{-7} (9,1 \cdot 10^{-9})$	3,74 (0,33)
	20	5 % (16)	$20 (4,0 \cdot 10^{-9})$	$7,2 \cdot 10^{-7} (2,0 \cdot 10^{-8})$	$2,6 \cdot 10^{-7} (7,1 \cdot 10^{-9})$	3,16 (0,09)
3 (324 arcos)	5	5 % (16)	$5 (1,5 \cdot 10^{-8})$	$5,2 \cdot 10^{-7} (2,3 \cdot 10^{-7})$	$1,3 \cdot 10^{-6} (5,5 \cdot 10^{-7})$	9,01 (0,55)
	10	5 % (16)	$10 (2,1 \cdot 10^{-8})$	$6,4 \cdot 10^{-7} (2,1 \cdot 10^{-7})$	$6,3 \cdot 10^{-7} (2,1 \cdot 10^{-7})$	9,01 (0,46)
	20	5 % (16)	$20 (7,0 \cdot 10^{-8})$	$5,1 \cdot 10^{-7} (3,5 \cdot 10^{-7})$	$2,8 \cdot 10^{-7} (1,9 \cdot 10^{-7})$	9,34 (1,97)
6 (324 arcos)	5	50 % (162)	$5 (2,0 \cdot 10^{-9})$	$3,2 \cdot 10^{-8} (3,9 \cdot 10^{-8})$	$1,0 \cdot 10^{-7} (1,3 \cdot 10^{-7})$	23,57 (0,41)
		10 % (32)	11,21 (13,09)	124,19 (261,83)	47,88 (100,94)	23,04 (5,72)
		5 % (16)	9,56 (10,38)	91,29 (207,59)	44,23 (93,65)	26,98 (10,72)
	10	50 % (162)	$10 (1,8 \cdot 10^{-8})$	$2,5 \cdot 10^{-7} (1,8 \cdot 10^{-7})$	$3,7 \cdot 10^{-7} (2,7 \cdot 10^{-7})$	25,72 (1,80)
		10 % (32)	12,59 (8,20)	25,93 (82,01)	11,19 (35,38)	22,70 (1,19)
		5 % (16)	17,81 (12,57)	78,1 (125,7)	33,60 (54,10)	25,3 (11,5)
	20	50 % (162)	$20 (2,3 \cdot 10^{-8})$	$9,0 \cdot 10^{-8} (1,1 \cdot 10^{-7})$	$7,2 \cdot 10^{-8} (9,1 \cdot 10^{-8})$	24,37 (1,17)
		10 % (32)	21,614 (5,105)	8,072 (25,527)	4,23 (13,37)	25,71 (9,47)
		5 % (16)	23,51 (6,69)	17,53 (33,46)	10,33 (17,14)	31,73 (10,88)

Cabe destacar que de las 10 pruebas realizadas por cada configuración, son pocas las que no convergen al valor poblacional β^* . En caso de considerar un 10% de datos, se tiene que de las 10 pruebas, sólo una o dos no retornan el valor buscado. Por otro lado, al considerar sólo el 5% de las muestras, son dos a tres pruebas las que no convergen a la solución. Al utilizar una menor cantidad de datos es más probable dar con una muestra que no otorgue información relevante para la búsqueda de la solución, reduciendo el rendimiento del método. Luego, dado lo anterior, sería necesario realizar una mayor cantidad de pruebas en orden de ilustrar de mejor manera el desempeño del método. Adicionalmente, se podría variar la metodología de muestreo, considerando la componente espacial de los datos.

Por último, se muestra el tiempo que demora el método en obtener una solución, donde se observa que en general el costo computacional aumenta cuando existe un mayor nivel de demanda.

4.2. Resultados del método de Máxima Verosimilitud

En el caso del método de *Máxima Verosimilitud* (*MV*) se generan datos de rutas para estimar el parámetro β^* aplicando la regla teórica de escoger en cada nodo el arco de salida que provee el mínimo costo de la ruta que usa ese arco hacia el destino deseado, usando realizaciones de los errores estocásticos. Si se repitiese infinitamente este proceso, con el parámetro β^* , las proporciones observadas de elección de arco de salida tenderán a las probabilidades del modelo teórico. Este procedimiento se ejecuta tantas veces como la demanda considerada de la red (por ejemplo, para el caso $\alpha = 1$ existe una demanda de 125 desde un nodo i a un nodo d , luego, para dichos nodos de origen y destino, se realiza 125 veces el proceso de generación de rutas). Finalmente, se obtienen 9.000 rutas para el nivel de demanda $\alpha = 1$, 27.000 rutas para $\alpha = 3$, y 54.000 rutas para $\alpha = 6$. Se prueba el desempeño del método con porcentajes de estos totales para considerar distintos tamaños de la muestra.

Los ponderadores n_a^d en (13) se obtienen como la suma de la cantidad de rutas que pasen por el arco a con destino d . Una vez definidos los parámetros del método de *Máxima Verosimilitud*, se procede a evaluarlo en los distintos escenarios anunciados al inicio del Capítulo 4, obteniendo los resultados presentes en la Tabla 2.

Lo primero a destacar es que el método logra estimar adecuadamente el parámetro β^* en distintos escenarios, retornando estimaciones con bajos errores. A su vez, se observa que los resultados son bastante similares entre sí, independiente de la cantidad de rutas que se consideren, existiendo casos donde incluso considerar un menor porcentaje del total de rutas generadas da una mejor estimación (por ejemplo, el caso $(\alpha, \beta) = (6, 20)$). Lo anterior se explica debido a la relación que tienen los ponderadores n_a^d con las probabilidades $P_{i_a j_a}^d$. A priori, los ponderadores que mejor reflejan dicha relación serían los flujos por arco a con destino d , v_a^d , sin embargo, dada la metodología para obtener el conjunto de rutas, dicha dependencia no se conserva completamente. Luego, es posible que al tomar un subconjunto de rutas se obtengan ponderadores que mejor reflejen la proporción entre n_a^d y $P_{i_a j_a}^d$ del sistema original, retornando mejores estimaciones. Por lo tanto, en el método de maximizar la verosimilitud es esencial contar con una muestra de rutas que represente correctamente la proporción entre los flujos de las distintas rutas para obtener una buena estimación.

Tabla 2: Resultados del método de Máxima Verosimilitud, considerando distintos niveles de demanda α , parámetros β^* y porcentajes de rutas muestreadas. Se incluye el promedio y la desviación estándar (entre paréntesis) de las variables.

α (Nº de rutas)	β^*	Porcentaje de rutas muestreadas	β_{MV}	$100 \frac{ \beta^* - \beta_{MV} }{\beta^*} \%$	$RMSE_w$	Tiempo de ejecución [s]
1 (9.000 rutas)	5	10 % (900)	4,93 (0,07)	1,82% (0,86)	1,90 (0,92)	3,81 (0,93)
		5 % (450)	4,97 (0,14)	2,25% (1,62)	2,35 (1,74)	3,94 (0,86)
	10	10 % (900)	9,83 (0,26)	2,50% (1,84)	1,18 (0,89)	2,52 (1,18)
		5 % (450)	10,31 (0,64)	5,75% (3,85)	2,57 (1,69)	1,91 (0,95)
	20	10 % (900)	20,96 (0,76)	5,36% (2,90)	1,80 (0,94)	1,76 (0,35)
		5 % (450)	20,37 (1,75)	6,91% (5,29)	2,34 (1,66)	1,41 (0,161)
3 (27.000 rutas)	5	100 % (27.000)	5,02	0,46%	1,14	11,21
		50 % (13.500)	5,02 (0,01)	0,40% (0,22)	0,99 (0,55)	8,55 (1,42)
		5 % (1.350)	5,04 (0,08)	1,25% (1,28)	2,99 (2,94)	8,83 (1,92)
	10	100 % (27.000)	10,13	1,38%	1,34	9,49
		50 % (13.500)	10,13 (0,06)	1,34% (0,68)	1,30 (0,65)	8,95 (1,16)
		5 % (1.350)	10,31 (0,30)	3,29% (2,90)	3,06 (2,62)	9,66 (2,76)
	20	10 % (2.700)	19,85 (0,49)	1,75% (1,80)	1,27 (1,05)	10,35 (1,04)
		5 % (1.350)	20,57 (1,11)	4,97% (3,53)	2,71 (1,80)	7,80 (3,35)
6 (54.000 rutas)	5	10 % (5.400)	4,98 (0,03)	0,55% (0,34)	1,78 (1,10)	19,34 (5,36)
		5 % (2.700)	4,99 (0,08)	1,40% (0,89)	4,53 (2,95)	20,11 (4,89)
	10	10 % (5.400)	9,89 (0,21)	1,86% (1,26)	2,96 (1,99)	20,65 (3,37)
		5 % (2.700)	10,04 (0,28)	2,29% (1,49)	3,51 (2,11)	22,82 (6,33)
	20	100% (54.000)	19,16	4,16%	6,07	19,86
		10 % (5.400)	19,77 (0,81)	3,76% (1,53)	4,55 (2,41)	28,85 (11,94)
		5 % (2.700)	20,75 (3,27)	10,48% (12,70)	9,47 (8,49)	28,56 (13,68)

Adicionalmente, en la Tabla 2 se observa que a medida que la cantidad de rutas consideradas disminuye, la precisión de la estimación también lo hace, porque su desviación estándar aumenta. A su vez, se tiene que al aumentar β^* los errores se amplifican, porque la varianza de los tiempos

disminuye. Similar al método de *Mínimos Cuadrados*, los errores en la estimación se reflejan en el error de asignación de flujo $RMSE_w$. Por otra parte, no se observan variaciones sustanciales en los errores de estimación cuando cambia el nivel de demanda α , incluso considerando que estos escenarios poseen distintas cantidades de datos.

Por último, se observa que el costo computacional aumenta cuando el valor de α es mayor, en cuyo caso demora más en converger el algoritmo MTE al tener que asignar flujos con mayor variabilidad para cumplir las condiciones de equilibrio, y en consecuencia el método de estimación se vuelve más lento.

5. CONCLUSIONES

Se han probado dos métodos de estimación de los parámetros del modelo MTE que usan datos de naturaleza distinta. El primer método, de *Mínimos Cuadrados*, emplea datos que tradicionalmente se han usado para calibrar modelos de asignación de viajes en redes, esto es mediciones de flujos en una muestra representativa de arcos de la red bajo estudio. Por su parte, el segundo método, de *Máxima Verosimilitud*, requiere de una muestra de rutas usadas por usuarios de transporte privado. Esta información puede obtenerse del reporte de usuarios entrevistados o a través de teléfonos celulares que capturan las rutas utilizadas por usuarios de transporte privado, con el debido consentimiento de éstos últimos.

En las pruebas realizadas, ambos métodos entregan estimaciones cercanas a los valores poblacionales. No obstante, se observa que en redes con baja saturación, o saturadas pero con niveles de muestreo muy altos, el método de *Mínimos Cuadrados* genera estimaciones más precisas que el método de *Máxima Verosimilitud*. Por el contrario, este último método entrega estimaciones mucho mejores que las de *Mínimos Cuadrados* en redes de mayor congestión y ha demostrado una mayor estabilidad general en sus errores en los distintos escenarios simulados.

Adicionalmente, se observa que la precisión de las estimaciones generadas por método de *Máxima Verosimilitud* aumenta mucho en la medida que la muestra reproduce la proporción de elección de rutas, de modo que una muestra pequeña escogida para cumplir esto puede ser más determinante que simplemente aumentar el tamaño muestral.

Como trabajo futuro, se plantean diferentes líneas para validar los resultados promisorios aquí obtenidos y abordar nuevos ámbitos. Entre éstas se encuentran: aplicar el método a redes de mayor tamaño con distintas capacidades en sus arcos y, que sumado a distintas configuraciones de la demanda, se aborden distintos niveles y distribuciones de la congestión. También es interesante extender la estimación a múltiples parámetros $\beta = (\beta_i^d)_{i \in N, d \in D}$, probar otros algoritmos de optimización y distintos puntos de partida y estimar el tamaño de la muestra necesario para alcanzar un determinado nivel de precisión en la estimación de los parámetros y en variables relevantes que describen la asignación de viajes a la red.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el soporte financiero de los proyectos FONDEF D10E1002, CONICYT/FONDECYT/Regular 1141313 y del Instituto Sistemas Complejos de Ingeniería (CONICYT-PIA-FB0816).

REFERENCIAS

- Ahipaşaoğlu, S., Arıkan, U. y Natarajan, K. (2017). **Distributionally Robust Markovian Traffic Equilibrium**. Engineering Systems and Design, Singapore University of Technology.
- Akamatsu, T. (1996). Cyclic Flows, Markov Process and Stochastic Traffic Assignment. **Transportation Research Part B**, 30, 369-386.
- Baillon, J.-B., y Cominetti, R. (2008). Markovian Traffic Equilibrium. **Math. program.**, Ser. B, vol. 11, no. 1, 33-56.
- Bar-Gera, H. (2010). Traffic assignment by paired alternative segments. **Transportation Research Part B**, 44, 1022-1046.
- Daganzo, C. y Sheffi, Y. (1977). On stochastic models of traffic assignment. **Transportation Science**, 11, 253-274.
- Dial, R. (2006). A path-based user-equilibrium traffic assignment algorithm that obviates path storage and enumeration. **Transportation Research Part B**, 40, 917-936.
- Fosgerau, M., Frejinger, E. y Karlstrom, A. (2003). A link based network route choice model with unrestricted choice set. **Transportation Research Part B**, 56, 70-80.
- Frejinger, E. (2008). **Route choice analysis: data, models, algorithms and applications**. Phd Thesis, Faculté des Sciences de Base, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Mai, T. (2015). **Dynamic Programming Approaches for Estimating and Applying Large-scale Discrete Choice Models**. Phd Thesis, Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal.
- Mai, T., Fosgerau, M. y Frejinger, E. (2015). A nested recursive logit model for route choice analysis. **Transportation Research Part B**, 75, 100-112.
- Perederieieva, O., Ehrgott, M., Raith, A. y Wang, J. (2015). A framework for and empirical study of algorithms for traffic assignment. **Computers & Operations Research**, 54, 90-107.
- Pineda, C., Cortes, C., Jara-Moroni, P. y Moreno, E. (2016). Integrated traffic-transit stochastic equilibrium model with park-and-rides facilities. **Transportation Research Par C**, 71, 86-107.
- Sheffi, Y. (1985). **Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods**, 1st ed., Prentice-Hall, New Jersey.
- Wardrop, J. G. (1952). Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. **Proceedings, Institution of Civil Engineers II (1)**, 325-378.
- Watling, D., Rasmussen, T., Prato, C. y Nielsen, O. (2015). Stochastic user equilibrium with equilibrated choice sets: Part I Model formulations under alternative distributions and restrictions. **Transportation Research Part B**, 77, 166-181.