Enfoque de generación de columnas para un problema de ruteo e inventarios motivado por la gestión de una red de cajeros automáticos

Cristian E. Cortes C., Universidad de Chile, ccortes@ing.uchile.cl
Pablo A. Rey, Universidad Diego Portales, pablo.rey@udp.cl
Alejandro Cataldo, Pontificia Universidad Católica de Chile, aecatald@uc.cl

RESUMEN

En este trabajo se presenta un enfoque de programación entera mixta para resolver un problema clasificado como *inventory-routing* en el contexto de una aplicación real relacionada con la planificación de reposición de dinero en una red de cajeros automáticos. El problema estudiado es distinto de otros trabajos en la literatura, ya que considera la posibilidad de que haya faltante de efectivo en los cajeros (quiebres de inventario), los cuales son penalizados. Bajo supuestos de demanda determinista y consumo homogéneo del dinero a lo largo de los periodos, se propone un esquema de generación de columnas para resolver el problema real. Se formula el problema maestro restringido que incluye variables estáticas relativas a los niveles de stock de dinero en los cajeros y a los *out-of-stocks,* mientras que las variables correspondientes a la selección de rutas son generadas de manera dinámica. Los subproblemas de generación de columnas correspondientes son resueltos con un modelo de *constraint programming*. Resultados preliminares muestran que el enfoque es factible, pero que la calidad de la relajación lineal no es muy buena, obteniendo gaps de integralidad mayores al 30% en todos los casos resueltos. El siguiente paso es implementar un esquema Branch & Price para resolver el problema a optimalidad.

Palabras claves: inventario y ruteo, generación de columnas, quiebres de stock, cajeros automáticos.

ABSTRACT

In this work we present a mixed integer programming approach to solve an inventory-routing problem in the context of a real ATM network replenishment problem. The problem is different from what is found in the specialized literature, as it considers the option of observing stock-outs of specific machines, which are penalized. Under the assumptions of deterministic demand together with a homogeneous consumption of money over the time periods, we propose a column generation approach to solve the real problem. The restricted master problem if formulated, which includes static variables related to the levels of monetary stock in the ATMs and to the out-of-stocks, while the variables corresponding to the route selection process are generated dynamically. The subproblems in the column generation scheme are solved by using a constraint programming model. Preliminary results show that the approach is feasible, although the quality of the linear relaxation is not so good, obtaining integrality gaps larger than 30% in all tested cases. The next step is to implement a Branch & Price scheme to solve the problem to optimality.

Keywords: inventory-routing problem, column generation, out-of-stocks, automatic teller machines.

1. INTRODUCCION

El presente trabajo describe un enfoque de programación entera mixta basado en generación de columnas para un problema de inventario y ruteo que surge de la planificación de la reposición de dinero en una red de cajeros automáticos.

El problema estudiado se basa en el problema de administración de fondos disponibles en los distintos cajeros de una red de cajeros automáticos y el ruteo de los camiones que realizan la reposición y retiro en los cajeros de la red. Este problema puede ser abordado como una variante del problema de ruteo e inventarios.

Los problemas de ruteo e inventarios (*inventory-routing problems*, en inglés) integran dos problemas bien estudiados: la administración de inventarios y el ruteo de vehículos. Dado un conjunto de clientes a ser servidos en un horizonte de tiempo de varios periodos, el problema de ruteo e inventarios, en términos generales, consiste en determinar cuándo visitar cada cliente, qué cantidad entregar en la visita y cómo combinar estas entregas en rutas factibles, de manera que el costo total obtenido como la suma de los costos de ruteo y los costos de inventario sea mínima (Andersson et al., 2010). De acuerdo con (Coelho et al., 2014) en la literatura especializada han sido estudiadas varias variantes y no es posible indicar cuál es *el problema clásico* sino más bien referirse a las versiones básicas o a sus extensiones.

Coelho et al. (2014) presentan una clasificación de las versiones básicas del problema siguiendo siete criterios. Respecto del *horizonte de tiempo* y la *estructura* de la red de distribución, separan los problemas que tienen un horizonte finito o infinito de planificación y si los despachos son realizados en esquemas *uno-a-uno*, *uno-a-varios* o *varios-a-varios.* Respecto de la manera en que se realiza el *ruteo* de los vehículos, dividen los problemas en aquellos en que los vehículos salen de una bodega y se dirigen a los clientes, si es un cliente por ruta, lo llaman de *ruteo simple*, mientras que si se visitan varios clientes en cada ruta el *ruteo* es *múltiple*. Por otro lado, en los casos que no hay una bodega involucrada, como por ejemplo en algunas aplicaciones de transporte marítimo, se refieren al caso como *ruteo continuo*. De acuerdo a cómo se manejan los inventarios, los autores consideran dos criterios, la *política de inventarios* (reponer a *nivel máximo* o *hasta nivel*) y lo que llaman *decisiones de inventario*, que consideran condiciones en que no puede haber quiebres de inventario (*inventarios no negativos*), o en caso de observar los quiebres, estos son considerados *ventas perdidas* o se permiten *back-orders.* Finalmente, respecto de la flota empleada, clasifican los problemas de acuerdo a si la flota consiste en un único vehículo o múltiples vehículos y en este último caso, si los vehículos son idénticos (*flota homogénea*) o se cuenta con vehículos con diferentes características (*flota heterogénea*).

En la literatura se encuentran aplicaciones de problemas *inventory-routing* en un amplio abanico de áreas. Por un lado, transporte y logística marítima, donde se pueden mencionar varios trabajos relevantes (Christiansen, 1999; Christiansen et al., 2004; Shen et al., 2011; Song y Furman 2013). También se han aplicado metdologías para casos de distribución terrestre: por ejemplo, de gas (Campbell y Savelsbergh, 2004) o de autopiezas (Stacey et al., 2007); también, se observan aplicaciones en el manejo de ítems perecibles (Federgruen y Zipkin, 1984; Federgruen et al., 1986), con casos específicos como sangre (Hemmelmayr et al., 2009), animales vivos (Oppen et al., 2010) por mencionar algunos ejemplos.

Para mayores detalles de problemas *inventory-routing* en la literatura, se puede recomendar al lector los *surveys* recientes de Andersson et al. (2010) y Coelho et al., (2014). El trabajo de Andersson et al. se enfoca en las aplicaciones industriales, mientras que el de Coelho et al. pone mayor énfasis en las contribuciones metodológicas.

Recientemente, Van Anholt et al. (2013) proponen un enfoque de programación entera para un problema de ruteo e inventarios en el contexto de una red de cajeros automáticos. En ese trabajo, no son permitidas las faltas de efectivo que son una característica importante del problema práctica que motiva el presente estudio.

2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

A diferencia de la mayoría de los problemas de ruteo con inventario estudiados previamente en la literatura (Coelho et al., 2014), el problema que motiva esta investigación considera la posibilidad de faltante de dinero para satisfacer extracciones de los clientes (*out-of-stocks*).

En este caso de estudio, los *clientes* corresponden a los cajeros automáticos. El dinero es almacenado y reemplazado en *gavetas*. Además, las entregas consisten en un *cambio* de gaveta: la gaveta que estaba en el cajero es retirada (con el dinero que contiene) y es reemplazada por una nueva gaveta *llena*. Hay una cantidad finita de opciones de gavetas (que corresponden a la cantidad de dinero que contiene).

Específicamente: se cuenta con una red con I cajeros automáticos ($i = 1, \ldots, I$) y para un horizonte de tiempo predefinido compuesto por T periodos ($t = 1, \ldots, T$), se desea determinar rutas para los camiones que retiran y reponen las gavetas con dinero.

La demanda por cajero y por periodo es determinística y conocida de antemano. Se cuenta con una flota fija y homogénea de vehículos que pueden realizar un viaje por periodo. La carga total que pueden transportar los camiones, por motivos de seguridad, está limitada a un valor máximo. De la misma manera, la duración de las rutas puede estar limitada a un tiempo posiblemente menor a la duración total del turno.

Puede haber limitaciones en los turnos en que un cajero puede ser visitado, pero no se definen ventanas de tiempo de duración menor a un turno en esta versión del problema.

Los faltantes de dinero son permitidos, pero penalizados. Se busca minimizar el costo total que está compuesto por las penalidades (multas) por falta de efectivo en los cajeros más el costo de las operaciones de los camiones que realizan la reposición.

2.1 Supuestos

Para especificar el problema y permitir su modelación, hacemos los siguientes supuestos:

- Las penalidades que incurre la empresa administradora son funciones lineales de la duración total de los periodos de *out-of-stock* en los cajeros. El costo total que enfrenta la empresa es la suma de estas penalidades.

- Ningún cajero es visitado más de una vez por periodo.

- Cuando se realiza una visita a un cajero, la gaveta que está en ese cajero es retirada y reemplazada por una gaveta nueva.

- Existe un número finito de posibles montos de dinero con los que puede cargarse una gaveta. Cualquiera de estos montos puede ser utilizado para cualquier cajero. Estos montos definen los *tipos de gavetas*.

- El contenido de la gaveta con menor valor posible es siempre suficiente para satisfacer la demanda de dinero de un periodo.

- El consumo de dinero se realiza de manera continua y a una tasa constante. A esta tasa la denotaremos la *demanda* de dinero en ese cajero en el periodo.

3. MODELAMIENTO

Para construir el problema maestro se incluyen variables estáticas relativas a los niveles de stock de dinero en los cajeros y a los *out-of-stocks,* mientras que las variables correspondientes a la selección de rutas son generadas de manera dinámica. Por variables *estáticas* nos referimos a variables que son consideradas permanentemente. Las variables *dinámicas*, por su parte, no son todas incluidas en el modelo sino que van siendo generadas y agregadas al modelo durante la ejecución del algoritmo de solución. Los subproblemas de generación de columnas correspondientes son resueltos con un modelo de *constraint programming*.

Antes de presentar el modelo de programación lineal entera correspondiente al problema maestro, discutimos brevemente la idea en que se basa la representación de las dinámicas con que evolucionan los inventarios de efectivo en los cajeros y su interacción con las visitas de los camiones y los quiebres de inventario.

Fijemos la siguiente notación. Sean λ_{it} la demanda por efectivo en el cajero automático i en el período t y λ_{it}^{+}, la demanda por efectivo en el cajero automático i desde el momento que se realiza la visita hasta el final del período t. Observemos que si un cajero no es visitado, este valor es 0. Llamemos q_{it} al monto de efectivo dejado en el cajero automático i en el período t si el cajero es visitado, 0 en caso contrario. Finalmente, s_{it} es el nivel de inventario en el cajero automático i al comienzo del período t y o_{it}, el nivel de quiebre de inventario en el cajero automático i durante el período t.

La evolución de los inventarios y los montos faltantes de dinero por periodo cumplen con las relaciones:

$$s_{i,t+1} = \begin{cases} \max\{s_{it} - \lambda_{it}, 0\} & \text{si el cajero } i \text{ no es visitado el periodo } t \\ q_{it} - \lambda_{it}^{+} & \text{si el cajero } i \text{ es visitado el periodo } t \end{cases} \tag{1}$$

$$o_{it} = \begin{cases} \max\{\lambda_{it} - s_{it}, 0\} & \text{si el cajero } i \text{ no es visitado el periodo } t \\ \max\{(\lambda_{it} - \lambda_{it}^{+}) - s_{it}, 0\} & \text{si el cajero } i \text{ es visitado el periodo } t \end{cases} \tag{2}$$

Estos niveles de inventarios y quiebres de inventario serán variables en el modelo que se presenta a continuación. Para representar los casos en que hay o no quiebre de inventario, se incluirá un conjunto de variables binarias. Las visitas corresponden a rutas seleccionadas que incluyen a cada cajero. Estas serán representadas por las variables que se generan dinámicamente.

3.1 Problema maestro

A continuación se presenta el modelo correspondiente al problema maestro en el enfoque propuesto. Por completitud, se incluyen todas las variables y parámetros utilizados, aunque ya hayan sido definidos anteriormente.

Observemos que la demanda por dinero en cada cajero, λ_{it} no depende de la ruta que realiza la visita, mientras que tanto la demanda desde el momento de la visita hasta el final del periodo λ_{it}^{+} como la carga entregada q_{it}, sí lo hacen: λ_{it}^{+} depende del momento de la visita y q_{it} es una decisión que está incluida en la definición de ruta. Por esta razón, para formular el problema maestro, la carga entregada y la demanda hasta el final del periodo son parámetros asociados a la ruta que visita al cajero automático.

Parámetros

Q_{irt}: cantidad de efectivo entregado al cajero automático i en el período t por la ruta r.

λ_{it}: demanda por efectivo en el cajero automático i en el período t.

Λ_{irt}^{+}: demanda por efectivo en el cajero automático i en el período t después que llega el camión que ejecuta la ruta r.

R_{it}: conjunto de rutas que visitan al cajero automático i en el período t.

c_{rt}: costo fijo asociado a realizar la ruta r en el período t.

g: costo variable asociado a quiebres de inventario.

Variables estáticas

y_{it}: variable binaria que vale 1 si hay quiebre de inventario en el cajero automático i en el período t.

s_{it}: variable continua no negativa que registra el nivel de inventario en el cajero automático i al comienzo del período t.

o_{it}: variable continua no negativa que registra el nivel de quiebre de inventario en el cajero automático i durante el período t.

Variable dinámica

x_{rt}: variable binaria que vale 1 si la ruta r es seleccionada en el período t.

El problema maestro restringido (observar que el conjunto de columnas para el periodo t es $\mathcal{R}_t = \bigcup_i R_{it}$) es el siguiente:

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{r \in \mathcal{R}_t} c_{rt} x_{rt} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in I} g o_{it}$$

sujeto a

$$-s_{it} + s_{i,t+1} - M y_{it} - M \sum_{r \in R_{it}} x_{rt} \leq -\lambda_{it} \quad \forall i, t \quad (3)$$

$$s_{it} - s_{i,t+1} - M \sum_{r \in R_{it}} x_{rt} \leq \lambda_{it} \quad \forall i, t \quad (4)$$

$$- s_{i,t+1} + \sum_{r \in R_{it}} (Q_{irt} - \Lambda^{+}_{irt}) x_{rt} \leq 0 \quad \forall i, t \quad (5)$$

$$s_{i,t+1} + M\, y_{it} + \sum_{r \in R_{it}} (M - Q_{irt} + \Lambda^{+}_{irt}) x_{rt} \leq M \quad \forall i, t \quad (6)$$

$$s_{i,t+1} - \sum_{r \in R_{it}} (Q_{irt} - \Lambda^{+}_{irt}) x_{rt} \leq M \quad \forall i, t \quad (7)$$

$$- \sum_{r \in R_{it}} \Lambda^{+}_{irt} x_{rt} - o_{it} \leq -\lambda_{it} \quad \forall i, t \quad (8)$$

$$- M y_{it} + o_{it} \leq 0 \quad \forall i, t \quad (9)$$

$$\sum_{r \in R_{it}} x_{rt} \leq 1 \quad \forall t \quad (10)$$

La función objetivo minimiza el costo total asociado a las decisiones tomadas. Este costo es la suma de los costos de ejecutar las rutas seleccionadas y el costo asociado a enfrentar quiebres de inventario. Las restricciones (3)-(7) son para describir la dinámica de la evolución del inventario en cada cajero automático descrita por las ecuaciones (1) y (2). Las restricciones (8) y (9) se construyen para determinar el nivel del quiebre de inventario – si se produce– en cada cajero automático. La restricción (10) asegura que para cada cajero automático, y en cada período, no se seleccionará más de una ruta que lo visite.

Por claridad en la formulación, las constantes M que aparecen en las restricciones se definen con un valor igual al dinero que lleva la gaveta de mayor capacidad, salvo para la restricción (9) que corresponde al máximo valor de faltante de dinero permitido. En los experimentos, para esta restricción también se utilizó el mismo valor.

Considerando si se realiza la visita o no y si se produce falta de efectivo o no, se producen los cuatro casos que se muestran en la Figura 1 y que serán la base para representar estas dinámicas en el modelo.

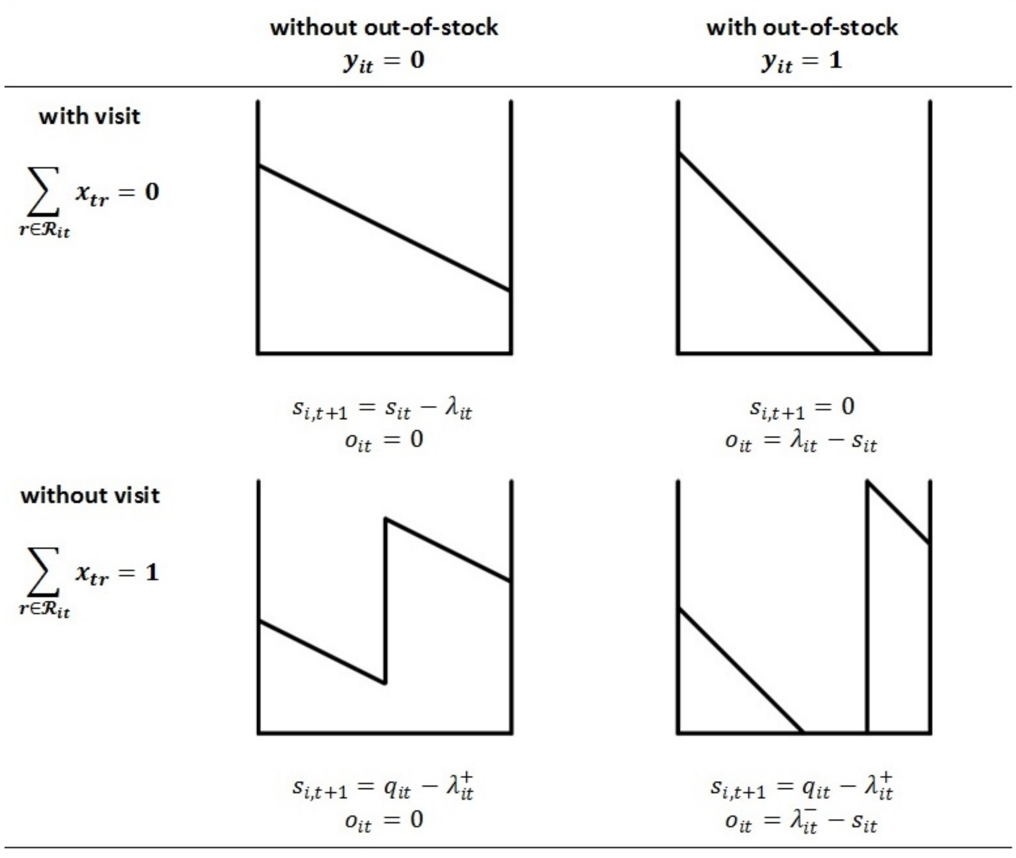

Figura 1: Casos de evolución de inventarios dependiendo de visita de camión de reposición y de que se produzca o no faltante de dinero en el periodo.

3.2 Subproblema

El subproblema de generación de columnas, corresponde a obtener rutas que pueden ser realizadas por los camiones. Una vez resuelta la relajación lineal del problema maestro restrigindo, se utiliza la información de las variables duales para determinar si existen rutas no consideradas que tengan, en las condiciones actuales, costo reducido negativo. Para esto se minimiza el costo reducido entre las rutas factibles no incluidas en el problema maestro.

Para construir una ruta, se debe determinar la secuencia de cajeros, los instantes de las visitas y el monto que llevará la gaveta que se dejará en cada cajero. Para los fines del problema maestro, esta información se traduce en los parámetros Q_{irt}, Λ^{+}_{irt} y c_{rt}.

Denotemos las variables duales asociadas a las restricciones (3)-(10) del problema maestro restringido así: α_{it} son las duales de las restricciones (3), β_{it} son las duales de las restricciones (4), γ_{it} son las duales de las restricciones (5), ϕ_{it} son las duales de las restricciones (6), ζ_{it} son las duales de las restricciones (7), δ_{it} son las duales de las restricciones (8), π_{it} son las duales de las restricciones (9) y μ_t son las duales de las restricciones (10).

El subproblema puede ser formulado con un modelo de *constraint programming.* Para los fines de la modelación, consideramos que todas las rutas visitan un número fijo K de cajeros. Se definen unos cajeros *dummy* para completar la ruta en caso que se quiera visitar un número menor que K cajeros. Estos cajeros *dummy* son indizados $i = I + 1, \dots, I + K$. Denotemos por t_{ij} al tiempo de viaje entre el cajero i y el cajero j y con P, al límite máximo de dinero que se permite que un camión transporte.

El modelo propuesto para el subproblema para determinar una ruta para el periodo t es:

Variables

z_{ik}: variable binaria que vale 1 si el cajero i es el k-ésimo de la ruta.

v_{il}: variable binaria que vale 1 si la gaveta entregada en cajero i es de tipo l. La carga de una gaveta de tipo l es Q_l.

w_i: variable continua no negativa que registra horario, relativo al inicio del periodo, en que el cajero i es visitado por la ruta.

Restricciones

$$\sum_{i=1}^{I+K} z_{ik} = 1 \qquad k = 1, \dots, K \qquad (11)$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_{ik} \leq 1 \qquad i = 1, \dots, I + K \qquad (12)$$

$$z_{ik} \leq \sum_{j=1}^{i-1} z_{j,k-1} \qquad i = I + 1, \dots, I + K; \; k = 2, \dots, K \qquad (13)$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_{ik} \geq \sum_{k=1}^{K} z_{i+1,k} \qquad i = I + 1, \dots, I + K - 1 \qquad (14)$$

$$z_{ik} = z_{j,k+1} \Rightarrow w_j = w_i + t_{ij} \qquad k = 1, \dots, I; \; i, j = 1, \dots, I + K \qquad (15)$$

$$\sum_{l=1}^{L} \sum_{k=1}^{K} Q_l v_{il} \leq P \qquad i = 1, \dots, I \qquad (16)$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_{ik} = \sum_{l=1}^{L} v_{il} \qquad i = 1, \dots, I \qquad (17)$$

Las restricciones (11) y (12) garantizan que se visiten K cajeros, de la red o *dummies* y que sean distintos. Las condiciones (13) y (14) garantizan que los cajeros *dummies* están "al final" de la ruta y son visitados en orden creciente de rótulo (para evitar simetrías innecesarias en el problema). La restricción (15) relaciona los tiempos de visita de dos cajeros consecutivos en la ruta. La restricción (16) asegura que el dinero llevado en las gavetas a entregar en los cajeros no excede el máximo permitido y la última restricción (17) garantiza que se lleve alguna gaveta para cada uno de los cajeros que se visita.

Con las variables definidas, el costo reducido correspondiente a la ruta se puede calcular:

$$c - \mu_t + M \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} (\alpha_{it} + \beta_{it} + \phi_{it}) z_{ik} + \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} (\phi_{it} - \gamma_{it} + \zeta_{it}) Q_l v_{il} + \sum_{i=1}^{I} (\gamma_{it} - \phi_{it} - \zeta_{it} + \delta_{it}) \, \lambda_{it} \, (1 - w_i)$$

donde c es el costo de la ruta.

Los parámetros Q_{irt}y Λ_{irt}^{+} de la ruta para el problema maestro se obtienen a partir de la solución del subproblema: $Q_{irt} = \sum_{l=1}^{L} Q_l v_{il}$ y $\Lambda_{irt}^{+} = \lambda_{it} \, (1 - w_i)$.

4. EXPERIMENTOS COMPUTACIONALES

Experimentos preliminares en instancias de tamaño reducido considerando 3 turnos, 1 vehículo, hasta 2 tipos de gavetas y hasta 8 cajeros muestran resultados prometedores. La implementación preliminar para evaluar la factibilidad del enfoque y la calidad de la relajación lineal fue realizada en GAMS utilizando como *solver* de programación lineal entera CPLEX 12.2. Se generaron explícitamente todas las rutas y se incluyeron en el modelo sin considerar su generación dinámica.

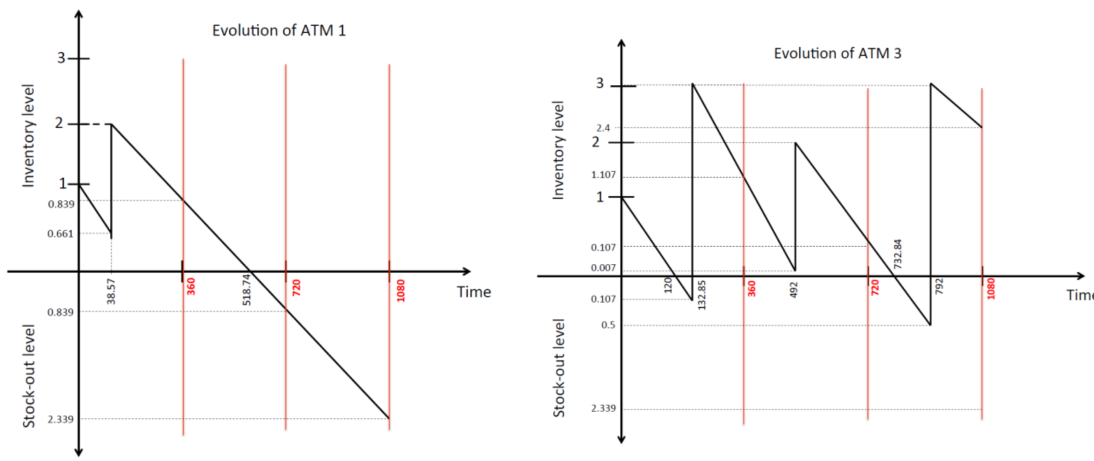

Figura 2: Evolución de inventarios en cajeros 1 y 3 para la instancia I7-1.

La Figura 2 ilustra la evolución de los inventarios y faltantes de dinero para dos de los cajeros en una de las instancias de prueba. El eje vertical representa el nivel de inventario, o de faltante de dinero acumulado en u.m. (unidades monetarias estándar), mientras que el eje horizontal es el tiempo en minutos. Las líneas rojas verticales muestran el cambio de turno.

En este caso se contaba con 7 cajeros y la duración del turno era de 6 horas, pero las rutas fueron restringidas a una duración máxima de 4 horas y la carga máxima del camión, a 10 u.m.

Los cajeros inician con un inventario de 1 u.m. y los dos tipos de gavetas contienen 2 o 3 u.m. Las demandas de los cajeros son constantes en todos los periodos y de 1,5 o 3 u.m. por periodo. El ejemplo que se muestra resultó con 73145 variables y 44035 restricciones. GAMS+CPLEX demoró 77,91 segundos en resolver el problema a optimalidad. El gap entre la solución óptima entera y la solución de la relajación lineal es de 36,5%.

5. SÍNTESIS, CONCLUSIONES E INVESTIGACIÓN FUTURA

En este trabajo se ha presentado un enfoque de programación entera mixta basado en generación de columnas para un problema de inventario y ruteo en el contexto de la reposición de dinero en una red de cajeros automáticos.

El problema considerado difiere de los tratados anteriormente en la literatura ya que considera la posibilidad de que haya faltante de efectivo en los cajeros (quiebres de inventario, para el problema general de ruteo e inventarios), los cuales son penalizados.

En este punto del desarrollo se ha trabajado con algunos supuestos simplificadores, como por ejemplo, que la demanda es determinística y más aún, que el dinero se consume de manera homogénea a lo largo de un periodo.

Los resultados con una implementación preliminar muestran que el enfoque es factible, pero que la calidad de la relajación lineal no es muy buena: se obtuvieron gaps de integralidad mayores al 30% en todos los casos resueltos.

En términos de la metodología propuesta, el siguiente paso, actualmente en desarrollo, es implementar un esquema de Branch & Price. Como primera opción hemos elegido implementar la solución del subproblema de generación de columnas con el modelo de *constraint programming* aquí presentado.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue apoyada por CONICYT/FONDECYT/REGULAR/ N°1141313 y el Instituto de Sistemas Complejos de Ingeniería (financiamiento ICM: P-05-004-F y CONICYT: FBO16).

Referencias

Andersson, H., A. Hoff, M. Christiansen, G. Hasle y A. Løkketangen (2010) Industrial aspects and literate survey: Combined inventory management and routing, **Computers and Operations Research**, 37, 1515 – 1536.

Campbell A., M. Savelsbergh (2004) A decomposition approach for the inventory-routing problem. **Transportation Science** 38, 488–502.

Christiansen M. (1999) A decomposition of a combined inventory and time constrained ship routing problem. **Transportation Science**, 33, 3–16.

Christiansen M., K. Fagerholt, D. Ronen (2004) Ship routing and scheduling: Status and perspectives. **Transportation Science** 38, 1–18.

Coelho, L., J.-F. Cordeau y G. Laporte (2014) Thirty Years of Inventory-Routing, **Transportation Science**, 48, 1 – 19.

Federgruen, A. y P. Zipkin (1984) A combined vehicle routing and inventory allocation problem. **Operations Research,** 1019–1037.

Federgruen A., G. Prastacos y P. Zipkin PH (1986) An allocation and distribution model for perishable products. **Operations Research** 34, 75–82.

Hemmelmayr, V., K. Doerner, R. Hartl y M. Savelsbergh (2009) Delivery strategies for blood products supplies. **OR Spectrum** 31, 707–725.

Oppen, J., A. Løkketangen y J. Desrosiers 2010) Solving a rich vehicle routing and inventory problem using column generation. **Computers and Operations Research,** 37, 1308–1317.

Shen, Q., F. Chu y H. Chen H (2011) A Lagrangian relaxation approach for a multi-mode inventory routing problem with transshipment in crude oil transportation. **Computers and Chemical Engineering,** 35, 2113–2123.

Song, J. y K. Furman (2013) A maritime inventory routing problem: Practical approach. **Computers and Operations Research,** 40, 657–665.

Stacey, J., M. Natarajarathinam y C. Sox (2007) The storage constrained, inbound inventory routing problem. **International Journal of Physical Distribution and Logistics Management,** 37, 484–500.

Van Anholt, R., L. Coelho, G. Laporte e I. Vis (2013) **An inventory-routing problem with pickups and deliveries arising in the replenishment of automated teller machines**, Technical Report CIRRELT-2013-71.