

## UN ENFOQUE DE RED ESPACIO-TIEMPO Y GENERACIÓN DE COLUMNAS PARA EL ITINERARIO DE FISCALIZACIÓN EN PARADEROS DE BUSES DE TRANSANTIAGO

Cristián E. Cortés C., Universidad de Chile [ccortes@ing.uchile.cl](mailto:ccortes@ing.uchile.cl)

Diego Muñoz C., STP Santiago [diemunoz@ing.uchile.cl](mailto:diemunoz@ing.uchile.cl)

Pablo A. Rey, Universidad Diego Portales [pablo.rey@udp.cl](mailto:pablo.rey@udp.cl)

Luis Trujillo J., Universidad de Chile [ltrujillo@ing.uchile.cl](mailto:ltrujillo@ing.uchile.cl)

### RESUMEN

Transantiago, el rediseñado sistema de transporte público de Santiago, Chile, comenzó a operar en Febrero, 2007. Una modificación importante al sistema es el método de pago, a través de tarjetas y validadores electrónicos. Un problema relevante que ha surgido en relación con el medio de pago corresponde a los evasores, quienes evitan el pago del pasaje. Para tratar de disminuir el porcentaje de evasión, se propone desarrollar un enfoque de programación entera mixta, basado en una red espacio-tiempo, y así obtener la programación óptima de recorridos de inspectores sobre un conjunto de paradas de buses usadas por los servicios de la compañía de interés, los cuales deben ser visitados justo a tiempo por un inspector y así evitar la mayor evasión posible. Además, se consideran restricciones importantes de recursos, como imponer límite a la jornada laboral de cada inspector, junto con una hora de almuerzo o descanso. Debido a la complejidad del problema resultante, se propone una heurística basada en generación de columnas para resolver instancias de la vida real.

*Palabras claves: transporte público, fiscalización, generación de columnas*

### ABSTRACT

Transantiago, the redesigned public transport system of Santiago, Chile, started operating on February 2007. An important modification was the fare payment method, which works electronically through non-contact cards and sensors. Associated with the payment method, an important problem arises, which is related to evaders, who do not pay the fare. To somehow address this situation, a mixed integer programming approach is proposed, based on a time-space network structure, in order to obtain the optimal schedule of inspectors over a set of bus-stops used by the services of the company of interest, which have to be visited at the right moment by an inspector to avoid evasion. Furthermore, important resource constraints are considered, such as a limit in the hours of a working day and the consideration of a break of one hour for lunch. Due to the complexity of the resulting problem, we propose a heuristic method based on column generation to solve real instances.

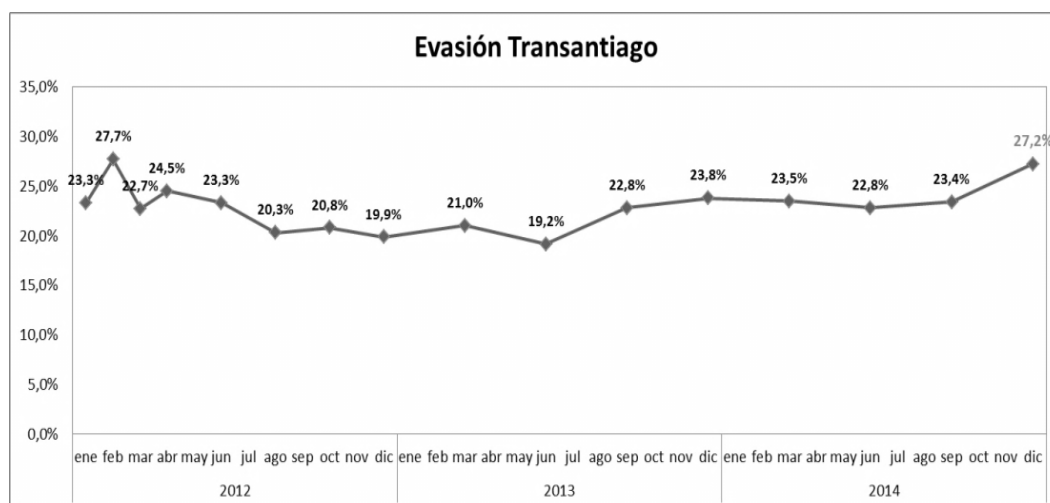
*Keywords: public transport, fare inspection, column generation*

## 1. INTRODUCCIÓN

El rediseñado sistema de transporte público de la ciudad de Santiago, Chile (llamado Transantiago) comenzó su operación en 2007 en la forma en la que se conoce hoy en día. Transantiago es un sistema complejo, compuesto por servicios de buses integrados con el Metro. Es regulado por las autoridades en términos del diseño de servicios, rango aceptable de frecuencias y capacidades, y es operado por 7 compañías privadas en una concesión regulada por contratos que definen umbrales en la forma de indicadores operacionales y nivel de servicio requerido. El sistema está también basado en una estructura troncal alimentadora, cuyo diseño permite tener un gran número de trasbordos bus a bus, o bus a Metro, etc. El sistema de pago es automático a través de un sistema de tarjetas y validadores electrónicos, como única forma de pago.

Hoy en día, un problema importante a enfrentar por las compañías, es la evasión por parte de un número considerable de usuarios del sistema Transantiago, los cuales no pagan su pasaje en varias etapas de sus viajes. En Santiago, los usuarios que no pasan su tarjeta por el sensor en los buses o estaciones, están evadiendo el pago de pasajes; evadir es más fácil ahora que antes de la implementación del sistema, debido al cambio en el método de pago, que originalmente se hacía directamente al chofer del bus, y ahora se realiza de manera más impersonal con un sistema de tarjetas y validadores sin contacto. Actualmente, en un día de trabajo, en promedio, 3,3 millones de transacciones (pagos recuperados a través de las tarjetas) son observadas en el sistema, con una evasión estimada de un 24,2% de estas transacciones en promedio, tal como lo muestra la Figura 1. Observando los números, se puede notar lo serio que es el fenómeno de la evasión para las compañías operadoras. Por un lado, la evasión implica un serio impacto en las finanzas de los proveedores; por otro, la evasión tiene enorme relevancia en la congestión presente dentro de los buses, debido a predicciones erróneas de la demanda; finalmente, se observa otro problema producto de que las estimaciones de la demanda al estar sesgadas debido a la evasión, resultan en muchas rutas donde se subestima la frecuencia necesaria, causando un escenario con menos buses que los requeridos por la demanda real.

Para hacerse cargo del problema de la evasión, las autoridades, operadores y compañías de control de evasión han lanzado campañas educativas/informativas para ampliar los puntos de carga de las tarjetas, y también han implementado más rigurosos y agresivos planes de control de pago de pasajes. Las compañías proveen una flota de inspectores para controlar la evasión en puntos importantes de alta transferencia de pasajeros, bajo escenarios congestionados de intensidad de usuarios. La acción de un inspector es fácil de cuantificar y genera resultados en el corto plazo, pues los inspectores fuerzan in situ a los potenciales evasores a pagar su pasaje. Gracias a un procedimiento externo, se sabe que las compañías pueden estimar el número de evasores que pueden cambiar su decisión de pago si un inspector está presente al momento de la transacción.



**Figura 1: Evasión en Transantiago. Fuente: Programa de Control Nacional del Gobierno Chileno.**

Ocupando una red particular de paraderos y servicios, una estimación de la demanda de evasores por paraderos y periodos, y una estimación del costo de la flota de inspectores, se puede encontrar, con la ayuda de un modelo matemático, la forma de optimizar el uso de recursos para poder capturar la mayor cantidad posible de transacciones desde potenciales evasores. Concretamente, en el presente trabajo se describe un enfoque de programación entera mixta (MIP), con el objetivo de obtener la programación de los turnos y horarios de los inspectores sobre un conjunto de paraderos asociados con las rutas de un subconjunto de servicios en el sistema. El modelo propuesto encuentra la localización y ruteo óptimo de un conjunto predefinido de inspectores en una forma integrada, persiguiendo la supervisión y control de la evasión en los paraderos más conflictivos. El modelo se formula sobre una red expandida en el espacio-tiempo, y está basado en seleccionar rutas eficientes de control de evasión, sobre el cual, finalmente, se aplica un enfoque de generación de columnas para obtener una solución al problema. Este enfoque permite resolver instancias reales, mostrando cuan efectiva puede llegar a ser una estrategia en donde se programe el recorrido de los inspectores, para poder recuperar pagos potencialmente perdidos y generar una estimación más adecuada de la demanda.

El problema de la evasión del pago en el contexto de un sistema de transporte público, junto con posibles soluciones propuestas para capturar a los evasores a través del control de los inspectores, ha sido estudiado en muchos campos de la ciencia aplicada, como microeconomía, teoría de juegos, modelos de optimización entera mixta, heurísticas, etc. El uso de una red expandida en el espacio-tiempo en conjunto con una formulación MIP parece ser un enfoque nuevo para manejar este tipo de problemas. Thorlacius et al. (2010) muestra una herramienta computacional basada en un modelo de programación entera para optimizar el ingreso proveniente de los evasores obligados a pagar, utilizando un plan sobre un horizonte de tiempo de una semana. Los autores proponen un modelo de apoyo a la toma de decisiones para averiguar el momento en el cual es más conveniente llevar a cabo las inspecciones en terreno, con el fin de maximizar el ingreso neto obtenido de las tarifas de penalización; usar una semana como horizonte de tiempo permite tomar en cuenta que las actividades durante los fines de semana difieren de las actividades en días laborales, produciendo planes genéricos que se pueden utilizar en un contexto de planificación multi-periodo. Borndörfer et al. (2011), propone un modelo en dos partes para la optimización del pago de peajes en autopistas de Alemania, usando equipos móviles de control. La primera parte

del modelo emplea un enfoque VRP para diseñar las rutas de control, mientras que la segunda parte del modelo plantea horarios factibles para los equipos de control; ambos problemas son modelados como problemas de flujo *multicommodity*. Luego, Borndörfer et al. (2012) formula el problema como un juego de Stackelberg para encontrar la estrategia óptima, en términos de la distribución espacial de los inspectores sobre la red de control, el cual es resuelto usando un enfoque de generación de columnas.

En relación a los enfoque de generación de columnas, encontramos muchas aplicaciones de este esquema en la literatura especializada asociada con el problema de ruteo de vehículos (Desrochers et al., 1992; Desrosiers et al., 1995; Desaulniers et al., 2005; Vanderbeck, 2005; Desaulniers et al., 2008; Baldacci et al., 2012; Cortés et al., 2014). En algunos enfoques basados en generación de columnas, se tiene la certeza de encontrar la solución óptima (metodología de *Branch & Price* como en Cortés et al., 2014; Baldacci et al., 2012, mostrando algoritmos exactos combinado a generación de columnas; heurísticas basadas en programación dinámica para generar nuevas columnas como en Liberatore et al., 2011), mientras que otras proveen soluciones cercanas al óptimo, pues no buscan nuevas columnas a través del árbol de *Branch & Bound* (enfoque de *set partitioning* combinado con generación de columnas estándar para resolver un problema de *Pickup & Delivery* como en Xu et al., 2003) o columnas que se generan heurísticamente (procedimiento de memoria adaptativa como en Taillard et al., 1996; búsqueda local, heurísticas y metaheurísticas mostradas en Kelly y Xu, 1999; Xu et al., 2003, donde dos heurísticas fueron usadas para generar columnas; o búsqueda tabú en Desaulniers et al., 2008).

El presente artículo se estructura como sigue. En la próxima sección, se presenta formalmente el modelamiento del problema; en la sección 3 se presentan algunos experimentos basados en datos reales provistos por la compañía; y finalmente, en la sección 4, se presentan conclusiones, discusión e ideas para futuras investigaciones.

## 2. MODELAMIENTO PROPUESTO DEL PROBLEMA

Para enfrentar la evasión, se propone resolver el problema de planificar la jornada de trabajo de un equipo predefinido de fiscalizadores, los cuales deben controlar la evasión en un conjunto de paraderos conflictivos del sistema durante su día laboral. Aunque la evasión es un problema que se aprecia durante todo el día en el sistema, es muy importante considerar que los fiscalizadores poseen una jornada laboral de ocho horas, más una hora de almuerzo o descanso. Además, debe considerarse que la evasión es un fenómeno dinámico que se observa en los distintos puntos de control (paraderos) y por lo tanto, existe un valor al rutear dinámicamente a los inspectores de manera de optimizar el uso de los recursos disponibles considerando la estructura de turnos de los inspectores, para poder capturar y forzar a pagar a la mayor parte de los potenciales evasores observados en el sistema.

### 2.1. Formalización del Problema a Resolver

Formalmente, el problema de planificación de la jornada de trabajo del equipo de fiscalizadores es como sigue. Se tiene un conjunto predefinido de fiscalizadores  $F$ . Un conjunto de paraderos  $K$ , sobre el que se desea controlar la evasión de manera eficiente en relación a los recursos

disponibles. Además, se trabaja sobre una jornada laboral total de largo  $L$ , la cual, como se estableció en el párrafo anterior, es mayor que el horario de trabajo de cada inspector. En este sentido, para abarcar y capturar la mayor cantidad posible de evasión, se debe tener un esquema de distintos turnos de trabajo distribuidos durante el día, con diferentes horas de inicio de fiscalización. A su vez, cada uno de estos turnos puede tener distinta ubicación de la hora de almuerzo o descanso dentro de su jornada, lo que se traduce en la posibilidad de tener más tipos de turnos de trabajo, dadas las distintas combinaciones existentes entre horas de inicio de jornada laboral y hora de almuerzo.

Para estimar el beneficio que proveen los fiscalizadores al ejercer su labor, se cuenta como antecedente exógeno para esta metodología, una estimación del número de potenciales evasores, que pueden cambiar su decisión sobre el pago de su pasaje al ser presionados por un fiscalizador en un determinado paradero durante un momento específico del día. Esto se verá reflejado en transacciones recuperadas por un inspector, lo que significa un ingreso recuperado por la compañía por cada potencial evasor que pague. Finalmente, para estimar el beneficio que aporta un fiscalizador, se considera su costo operacional, establecido como su salario.

A continuación, se formula el problema propuesto, describiendo un modelo de localización y ruteo de inspectores a través de una red expandida en espacio y tiempo. La metodología propuesta apunta a determinar la secuencia de paraderos que cada inspector tiene que visitar durante su día de trabajo, considerando el tiempo de llegada a cada parada, con el objetivo de maximizar el ingreso de la compañía proveniente de los pagos recuperados desde los potenciales evasores. Para formular este problema, se construyen redes espacio-tiempo para cada inspector, basadas en el esquema original de Kliwer et al. (2006); el objetivo es obtener la programación de los horarios de los inspectores sobre un conjunto de paraderos asociados a las rutas de diferentes servicios en el sistema, buscando la supervisión y control de evasión en las paradas de buses que experimentan una gran nivel de evasión. Como se mencionó anteriormente, para construir el modelo, además de la red espacio-tiempo se necesita el número de inspectores disponibles junto con su salario asociado, y el número de evasores esperados por periodo en cada paradero. La idea detrás del modelo es enviar a los inspectores a los paraderos en el momento justo del día, optimizando el uso de recursos disponibles.

## **2.2. Red Espacio-Tiempo para programar jornada de trabajo de equipo de inspectores sobre paraderos**

Se usará la siguiente red espacio-tiempo para formular el modelo MIP. El tiempo continuo sobre un día de trabajo se discretiza en periodos (pasos de tiempo) de duración fija indexados por  $t$ , con  $t \in \{1, \dots, \tau\}$  (en esta aplicación,  $\tau = 10$ ) y el espacio está definido considerando puntos particulares sobre la ruta, correspondientes a los paraderos, cada uno indexado por  $k$ , con  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

En la red espacio-tiempo ilustrada en la Figura 2, un nodo particular está asociado con un periodo de tiempo y una ubicación. Esto es, cada nodo corresponde a una tupla paradero-periodo de tiempo, y cada arco corresponde al movimiento desde un paradero  $k$  durante el periodo  $t_k$  hacia el paradero  $\ell$  durante el periodo  $t_\ell$ , con una captación de transacciones recuperadas debido a la

inspección. En este caso particular  $t_\ell = t_k + 1$  dado que en la aplicación cada paradero puede ser alcanzado desde cualquier otra parada en menos de un periodo de tiempo de viaje. Por lo tanto, una ruta desde el nodo origen al nodo destino corresponde a la secuencia de paraderos que un inspector debe controlar durante un día de trabajo.

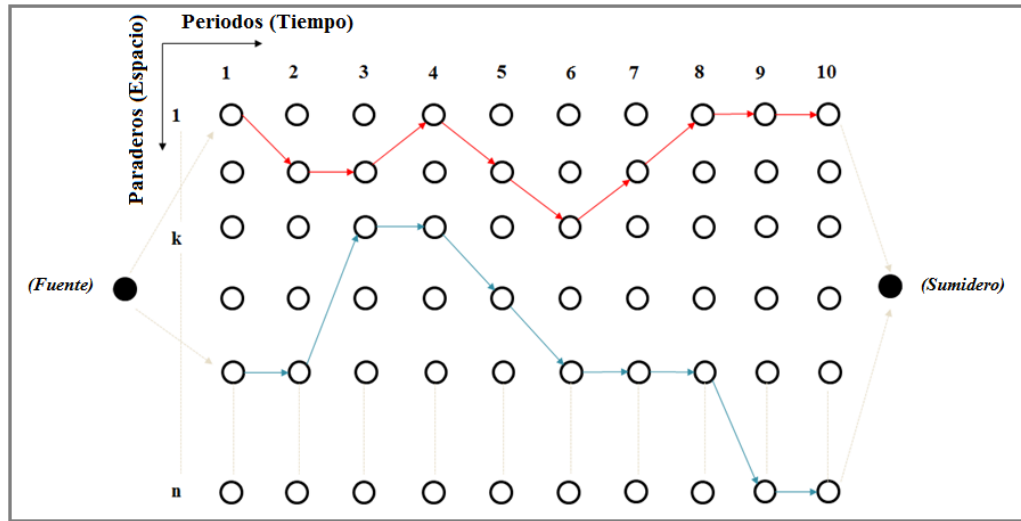


Figura 2: Red espacio-tiempo para un inspector cualquiera.

### 2.3. Formulación Matemática

En esta sección se describe la formulación matemática derivada de la red espacio-tiempo descrita en la sección 2.2. Antes de describir el modelo, se introduce la siguiente notación. Sea  $G = (V, E)$  el grafo que representa la red espacio-tiempo, donde  $V$  es el conjunto de nodos y  $E$  corresponde al conjunto de arcos. Recordar en este punto que cada nodo  $I$  en la red es una tupla  $(k, t)$  de dos elementos, a saber paradero y periodo de tiempo. Los nodos fuente y sumidero mostrados en la Figura 2 son identificados como  $\mathbf{0}$  y  $\mathbf{T}$  respectivamente.

Adicionalmente, se definen los siguientes conjuntos:

- $I = V - \{T\}$ : conjunto de nodos inicio, i.e., nodos que poseen solamente arcos salientes en el grafo.
- $J = V - \{0\}$ : conjunto de nodos de término, i.e., nodos que poseen solo arcos entrantes en el grafo.
- $F$ , conjunto de inspectores disponibles.

Los parámetros usados en la formulación se muestran en la siguiente tabla:

Parámetro	Definición
$ppt$	Pago recibido por la compañía por cada pasajero que usa el sistema (en \$).
$costo$	Salario mensual de cada inspector (en \$).
$rbip_{ij}$	Número de evasores forzados a cumplir con el pago de su pasaje en el nodo $i$ , si el nodo $i$ es controlado antes del nodo $j$ .

El parámetro  $rbip_{ij}$  fue estimado de antemano en un trabajo externo y es importante para el modelo. Considera la demanda observada en cada nodo (paradero-periodo) y desde ese punto, cuántos evasores observados son los que durante cada periodo podrían cambiar su decisión sobre el pago de su pasaje cuando están siendo controlados por un inspector. Adicionalmente, este parámetro considera la fracción de evasores potenciales en el nodo  $i$  que no fueron capturados durante ese periodo, dado que el inspector debe moverse al nodo  $j$  para comenzar el control al principio del siguiente periodo.

## 2.4. Enfoque de Generación de Columnas

En lo que sigue, se describe el modelo de generación de columnas propuesto para enfrentar el problema real. Para comenzar, se define el parámetro  $C_{ij}^f$  como el beneficio que se obtiene al ocupar el arco  $(i, j)$  con el inspector  $f$ . De esta manera, se tiene lo siguiente:

- $C_{0j}^f = ppt \cdot rbip_{0j} - costo$ : beneficio asociado a los arcos que salen del nodo fuente.
- $C_{ij}^f = ppt \cdot rbip_{ij}$ , con  $i \in I - \{0\}$ : beneficio asociado a los arcos que salen de los nodos inicio distintos al nodo fuente.

Luego, es fácil notar que dada la simetría del problema, el beneficio por usar un arco es el mismo para cada inspector, i.e.,  $C_{ij}^f = C_{ij}$ ,  $\forall f \in F$ . Por otra parte, sea  $R_f$  el conjunto de todas las rutas factibles posibles que puede realizar un inspector  $f$ . Dado que cada inspector viaja a través de la misma red espacio-tiempo, se tiene la siguiente condición  $R_f = R$ ,  $\forall f \in F$ .

Además, cada ruta  $r \in R$  puede ser establecida como una tupla:

$$r := (0, j_1, j_2, \dots, j_{10}, T), \quad \forall j_n \in J - \{T\}, n \in \{1, \dots, 10\},$$

Dada la estructura de la red espacio-tiempo, cada ruta  $r \in R$  puede ser descrita como una ruta elemental usando los parámetros  $X_{ijr}$ ,  $\forall (i, j) \in E$ , definidos como sigue:

$$X_{ijr} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ es usado en la ruta } r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A partir de estas consideraciones, se introduce el Problema Maestro (PM), cuyas variables de decisión indican si una ruta debe usarse o no, lo que debiera conducir a que se seleccionen rutas lo más eficientes posible dentro del grafo.

### 2.4.1. Problema Maestro

Una breve revisión de la literatura relacionada a la aplicación de generación de columnas en el contexto de problemas de ruteo de vehículos se lleva a cabo al final de la sección 1. Siguiendo esa clasificación, el presente trabajo se puede clasificar como un método heurístico de generación de columnas, dado que en esta aplicación, las columnas generadas se obtienen solamente al nivel

del nodo raíz del árbol del *Branch & Bound*, incluso considerando que proponemos aplicar un método exacto para resolver el Subproblema, el cual se discute en la sección 2.4.2. La extensión de la metodología presentada a un esquema de *Branch & Price* es interesante y desafiante, lo cual es, actualmente, parte de la investigación del equipo.

Sea  $\bar{R} \subseteq R$  el conjunto de rutas usadas como columnas iniciales en el Problema Maestro Restringido (PMR) propuesto, el cual sólo utiliza un subconjunto de las rutas del grafo (Desrosiers y Lübbecke, 2005). Para formular el PMR se definen los siguientes parámetros:

- $b_r = \sum_{(i \in I, j \in J)} c_{ij} \cdot X_{ijr}$ , el cual es el beneficio de usar la ruta  $r$ , considerando el costo operacional dado por el salario de un inspector.
- $v_{jr} = \sum_{i \in I} X_{ijr}$ , el cual cuenta el número de veces que la ruta  $r$  visita el nodo  $j \in J - \{T\}$ . Considerando que la ruta  $r$  es elemental, solo se puede visitar un nodo a lo más una vez. Por lo tanto, este parámetro es binario, tomando el valor 1 si la ruta  $r$  pasa por el nodo  $j$ , 0 si no.

La variable de decisión usada en el PMR es:

$$Y_r = \begin{cases} 1 & \text{si la ruta } r \text{ es seleccionada} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Considerando estas definiciones, la Relajación Lineal del PMR es:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{r \in \bar{R}} b_r \cdot Y_r & (1) \\ \text{sujeto a:} & \sum_{r \in \bar{R}} v_{jr} \cdot Y_r \leq 1 & , \forall j \in J: j \neq T & (2) \\ & \sum_{r \in \bar{R}} Y_r \leq |F| & (3) \\ & Y_r \geq 0 & , \forall r \in \bar{R} & (4) \end{aligned}$$

La función objetivo (1) maximiza el beneficio total derivado de los evasores controlados que pagan su pasaje, incluyendo también los costos operacionales por pagar el salario de los inspectores asignados a las rutas seleccionadas por el modelo. La familia de restricciones (2) establece que un nodo en particular, distinto de los nodos fuente y sumidero, es visitado por a lo más una ruta (restricciones *set packing*). La restricción (3) fuerza a que a lo más  $|F|$  rutas sean seleccionadas. Finalmente, las restricciones en (4) representan la relajación lineal del modelo en las variables de decisión.

Se denotan  $\alpha_j \geq 0, \forall j \in J - \{T\}$  a las variables duales asociadas a la familia de restricciones (2). Por otra parte  $\beta \geq 0$  es la variable dual asociada con la restricción (3). Obtener estos valores es relevante para activar la conexión entre el PMR y el generador de columnas, el cual se define formalmente como el Subproblema del procedimiento de generación de columnas. Esta conexión con el PMR y los detalles del procedimiento se describen a continuación.



### 2.4.2. Subproblema

El objetivo del Subproblema asociado (SP) es encontrar la ruta  $r^* \in R$  con el máximo costo reducido. Si este valor es positivo, la ruta seleccionada puede eventualmente mejorar el óptimo del PMR. Si eso pasa, la columna correspondiente a la ruta  $r^*$  se agrega al PMR, el cual se vuelve a optimizar. Este esquema es replicado hasta que el Subproblema no encuentre ninguna otra columna con costo reducido positivo, implicando que al menos al nivel del nodo raíz, ningún costo reducido adicional es capaz de mejorar el incumbente, y por lo tanto, se encuentra el óptimo del PMR, el cual es una cota superior de la solución del problema original. Sin embargo, si el óptimo del PMR cumple integralidad, se puede asegurar que corresponde a la solución óptima del problema original.

El SP se define como:

$$\max_{r \in R} b_r - \sum_{j \in J: j \neq T} \alpha_j \cdot v_{jr} - \beta \quad (5)$$

Reemplazando en (5) las definiciones de  $b_r$  y  $v_{jr}$ , y reordenando términos, se obtiene:

$$\max_{r \in R} \sum_{(i \in I, j \in J: j \neq T)} (C_{ij} - \alpha_j) X_{ijr} + \sum_{i \in I} C_{iT} \cdot X_{iT} - \beta \quad (6)$$

La formulación en (6) puede establecerse también como un problema de flujo en redes sobre las variables de decisión  $X_{ij}$  definidas como sigue:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ es usado} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Estas variables deben satisfacer restricciones de conservación de flujo junto con optimizar la función objetivo. Por lo tanto, el SP puede formalmente formularse como:

$$\max \sum_{(i \in I, j \in J: j \neq T)} (C_{ij} - \alpha_j) X_{ij} + \sum_{i \in I} C_{iT} \cdot X_{iT} - \beta \quad (7)$$

sujeto a:

$$\sum_{j \in J} X_{0j} = \sum_{i \in I} X_{iT} \quad (8)$$

$$\sum_{i \in I} X_{ij} = \sum_{i \in J} X_{ji} \quad , \forall j \in J: j \neq T \quad (9)$$

$$\sum_{j \in J} X_{0j} \leq 1 \quad (10)$$

$$X_{ij} \in \{0,1\},$$

La función objetivo (7) maximiza el beneficio proveniente de los evasores forzados a pagar el pasaje, considerando el costo operacional de pagar el salario de un inspector. La restricción (8) indica que el flujo total que sale del nodo fuente debe llegar al nodo sumidero. La familia de restricciones (9) corresponden a la conservación de flujo para cada nodo en la red, excepto para los nodos fuente y sumidero. Finalmente, la restricción (10) indica que desde el nodo fuente se permite que salga a lo más una unidad de flujo, i.e., a lo más una ruta.

Un elemento clave para elegir un enfoque de generación de columnas es encontrar un método eficiente y rápido para resolver el Subproblema. En este sentido, cabe mencionar que el SP, al encontrar la ruta  $r^* \in R$  que maximiza el beneficio proveniente del control de un inspector, puede asociarse con el problema de encontrar la ruta máxima en un grafo. En general, este problema es NP-Completo para un grafo cualquiera. Sin embargo, dada la estructura espacio-tiempo de la red estudiada, se puede notar que el grafo resultante es dirigido y acíclico. Por lo tanto, el SP en esta red puede resolverse eficientemente en tiempo polinomial usando el siguiente algoritmo descrito en Dasgupta et al. (2006):

---

#### ALGORITMO RUTA MÁS LARGA

---

*Input* : Grafo Dirigido Acíclico  $G = (V, E)$

*Output* : Ruta Máxima o más larga en  $G$

1) Ordenar Topológicamente a  $G$

2) **Para** cada nodo  $v \in V$  en orden linealizado

$$\textbf{Hacer } dist(v) = \max_{(u,v) \in E} \{dist(u) + w(u, v)\}$$

3) **Devolver**  $\max_{v \in V} \{dist(v)\}$

---

donde  $w(u, v)$  es el peso del arco  $(u, v) \in E$ . Se puede observar que la complejidad del algoritmo es  $(|V| + |E|)$ .

#### 2.4.3. Consideraciones respecto del Subproblema

Como se ha mencionado en la sección 2.1., se debe tener en cuenta que la jornada laboral de cada inspector dura ocho horas, más una hora de almuerzo o descanso en los periodos medios del día. Esto implica que, dado el número de combinaciones posibles entre horas de inicio de jornada laboral y hora de almuerzo, se generen variados tipos de turnos de trabajo. En este sentido, lo anterior implica la necesidad de crear una red espacio-tiempo y un consiguiente Subproblema relacionado a resolver, por cada turno posible.

A modo de ejemplo, a continuación se pueden observar dos tipos de turnos de trabajo en términos de la hora en la que comienza la jornada laboral, junto con una hora de almuerzo o descanso, la cual está fijada para cada turno de trabajo en la sexta hora de la jornada (dos Subproblemas a resolver).

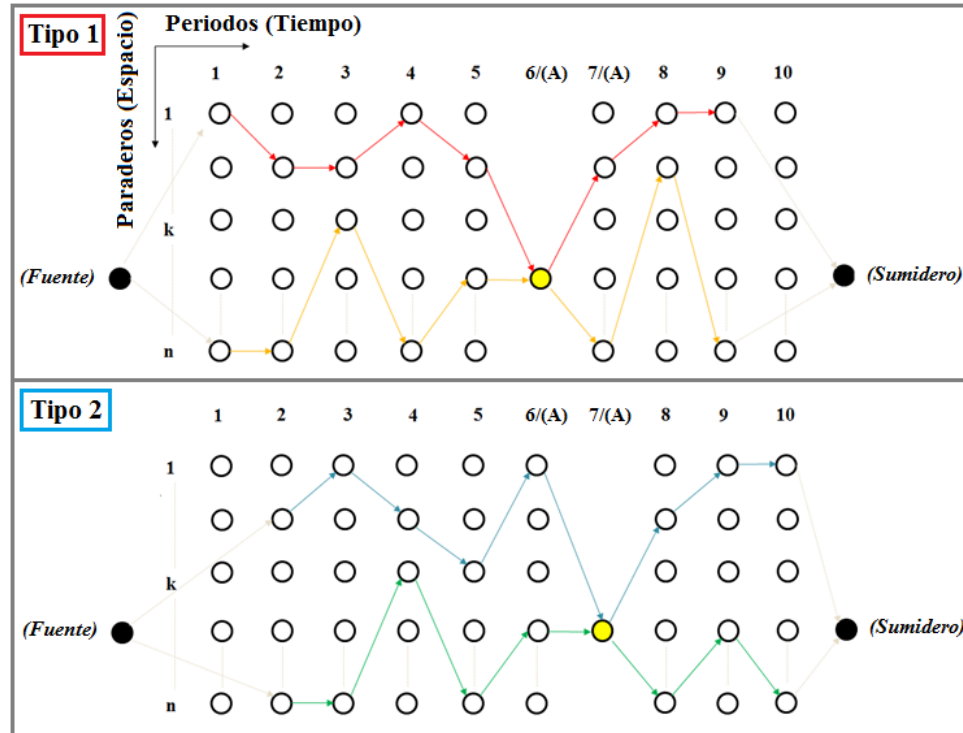


Figura 3: Ejemplo de dos turnos de trabajo para un inspector.

En la próxima sección, se ilustran algunos resultados de la implementación del procedimiento de generación de columnas descrito, sobre una instancia de la vida real. Se resumen métricas de rendimiento y se muestran las implicancias prácticas que tiene el aplicar este procedimiento en la realidad.

### 3. RESULTADOS

Todos los resultados de los experimentos computacionales fueron obtenidos en un computador personal HP CPU Intel Core i5-3210M 2.50 GHz, con 4 GB RAM.

El enfoque de generación de columnas fue resuelto usando CPLEX de IBM versión 12.4, combinado con el lenguaje de programación Python versión 2.7.9 para codificar el modelo. CPLEX fue usado para resolver el Problema Maestro en las iteraciones del algoritmo, mientras que los Subproblemas fueron formulados y resueltos con la librería Networkx para Python, la cual permite generar grafos y construir el algoritmo para resolver los Subproblemas de manera eficiente.

Antes de discutir los resultados, es importante mencionar el procedimiento utilizado para seleccionar las rutas iniciales  $\bar{R}$ , con las cuales comienzan las iteraciones del algoritmo de generación de columnas en el Problema Maestro. Usamos el algoritmo de camino máximo discutido en la sección 2.4.2. con el objetivo de encontrar  $|F|$  rutas razonables, en el sentido de contribuir con el máximo beneficio posible proveniente de la evasión recuperada durante los controles de los inspectores. En este sentido, primero se utiliza el algoritmo para obtener la ruta

con el máximo beneficio; esta ruta se guarda y se remueve del grafo. Luego, se aplica nuevamente el algoritmo para encontrar la ruta máxima en el grafo resultante; la nueva ruta también se guarda y se remueve del grafo. Se repite este procedimiento hasta encontrar  $|F|$  rutas iniciales generadas de esta manera. Estas rutas iniciales conforman el conjunto  $\bar{R}$  en el PMR. Adicionalmente, notar que este set de columnas corresponde a una solución entera factible del PMR final. En este sentido, es posible asegurar que el PMR es entero factible.

### 3.1. Caso de estudio

La instancia usada para probar la metodología fue generada con datos reales de campo. Se consideran 300 paraderos de buses, 10 bloques horarios durante un día de trabajo para un inspector (en la red espacio-tiempo corresponde a pasos de tiempos de 60 minutos cada uno), y un equipo de 20 fiscalizadores.

Adicionalmente, se introducen las restricciones mencionadas en la sección 2.4.3. correspondientes a limitar la jornada laboral y permitir una hora de almuerzo o descanso en el día de trabajo. Específicamente, la hora de almuerzo se fijó en la sexta hora para cada turno de trabajo, lo que se traduce en la resolución de dos Subproblemas (coincidentes con los grafos mostrados en la sección 2.4.3.) durante el algoritmo de generación de columnas.

Al terminar de correr el algoritmo completo, se registraron los siguientes resultados de rendimiento:

**Tabla 1: Tiempos de ejecución y reporte de optimización.**

Ítem	Modelo Generación de Columnas
Resolver procedimiento completo	18,56 [mins]
Generar columna nueva	3,41 [segs]
Resolver Problema Maestro	0,013 [segs]
Resolver Subproblemas	3,40 [segs]
Función Objetivo	\$337.003.340
Rutas Tipo 1 en solución Final	8
Rutas Tipo 2 en Solución Final	12

Después de terminar el algoritmo, 545 columnas fueron generadas en total. Luego, el PMR fue resuelto con las columnas generadas, forzando a que las variables de decisión sean enteras, y así finalmente obtener una solución entera para todo el procedimiento. Ninguna columna inicial fue seleccionada en la solución del PMR al final del algoritmo.

### 3.2. Implementación

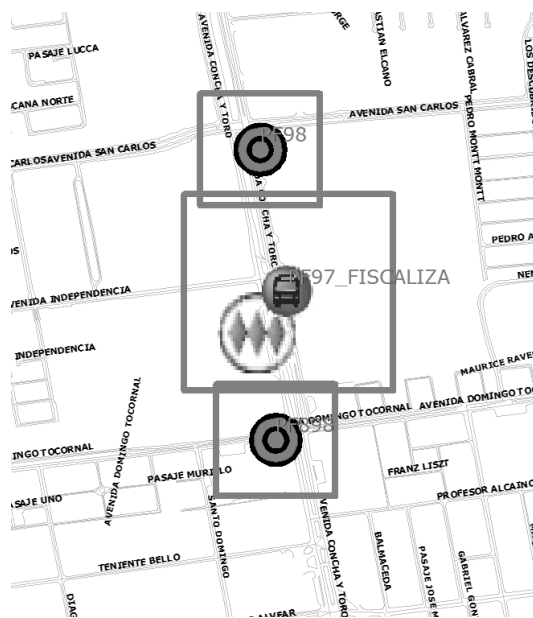
Para testear los resultados obtenidos con el modelo, el control de evasión fue implementado en 3 rutas, particularmente durante el periodo entre las 17:00 y 20:30 hrs., correspondiente a un

periodo en el cual el sistema está muy congestionado de usuarios (horario punta tarde). Como se aprecia en la Tabla 2, dos rutas son estáticas, i.e., el inspector permanece el periodo completo en el paradero. En contraste, la tercera ruta es dinámica, mostrando un inspector que se mueve entre dos paraderos durante ese periodo.

**Tabla 2: Rutas controladas**

Equipo	Código de Paradero	Código	Tiempo	Latitud	Longitud
1	T-34-270-SN-10	PF97	17:00:00-21:00:00	-33,6009171	-70,5774399
2	L-34-41-5-OP	PF310	17:00:00-21:00:00	-33,5739281	-70,5823109
3	T-34-236-SN-3	PF93	17:00:00-17:54:00	-33,6125911	-70,574257
3	T-34-270-NS-75	PF89	18:00:00-18:54:00	-33,6118746	-70,5755328
3	T-34-236-SN-3	PF93	19:00:00-21:00:00	-33,6125911	-70,574257

Como se muestra en la Figura 4, el paradero T-34-270-SN-10 (PF97), corresponde a un paradero muy cercano a una estación de Metro, lo cual se refleja en un alto flujo de usuarios yendo y viniendo de la estación para hacer trasbordos, ya sea de Metro a bus o bus a Metro, respectivamente. El contexto justifica que el inspector no se mueva a otro paradero durante el periodo de tiempo estudiado en la solución encontrada por el modelo.



**Figura 4: Paradero T-34-270-SN-10.**

Para cuantificar los usuarios extra que pagan su pasaje, correspondientes a los evasores forzados a pagar en los paraderos, se considera un nivel base, proveniente de un periodo sin control. El control comenzó el 27 de abril de 2015 y por un periodo de 3 semanas los mismos paraderos fueron controlados (periodo de control). La Tabla 3 presenta los resultados obtenidos antes y después de aplicar el control.

**Tabla 3: Usuarios extra que pagan su pasaje después del control (por día).**

Código de paradero	Nivel Base	Periodo de Control	% Incremento
T-34-270-SN-10	1492	1718	15%
L-34-41-5-OP	422	623	48%
T-34-236-SN-3	87	132	52%
T-34-270-NS-75	64	110	72%

Como se aprecia en la Tabla 3, todos los casos muestran un impacto en la captura de usuarios extra que pagan su pasaje debido al control de los inspectores; el rango de incremento va del 15% al 72%. En términos de rentabilidad, la implementación del control tiene un gran impacto en el paradero T-34-270-SN-10, donde los usuarios capturados forman un 15% del nivel base de 1492 usuarios. Este es el paradero más rentable porque el 70% del ingreso de los operadores depende del número de validaciones, y en este paradero las validaciones extra debido al control son de 226 por día en promedio. La intuición es reafirmada, pues el modelo impone la presencia de un inspector durante todo el periodo de trabajo en ese paradero.

Los resultados son prometedores, aunque es necesario incluir una variable fundamental en la formulación del modelo, la cual es considerar que los evasores se comportan como agentes racionales y, seguramente, luego de una inspección permanente se moverán a otros paraderos donde sí puedan violar las reglas.

#### 4. SÍNTESIS, CONCLUSIONES E INVESTIGACIÓN FUTURA

En este trabajo se ha presentado un enfoque de programación entera mixta, para encontrar la localización y ruteo óptimo de un conjunto predefinido de inspectores en una forma integrada, buscando la supervisión y control de evasión de paraderos seleccionados con gran evasión observada, en relación a un conjunto de servicios pertenecientes al sistema de transporte público de la ciudad de Santiago, llamado Transantiago.

El modelo de programación entera mixta está desarrollado sobre redes expandidas en el espacio-tiempo, y está orientado a la selección de rutas eficientes de fiscalización. Se le añaden a la formulación del modelo restricciones de recursos importantes en relación a consideraciones prácticas del trabajo de los inspectores. A saber, se permite en el modelo considerar que la jornada laboral de los inspectores tiene una duración de ocho horas, más una hora de almuerzo o descanso. Lo anterior se refleja en la creación de diferentes tipos de turnos de trabajo para los fiscalizadores. En este sentido, se muestra que un enfoque de generación de columnas es una buena metodología para manejar este problema, el cual fue implementado en instancias de tamaño real.

De los resultados obtenidos, se puede concluir que el problema de evasión de pago en el Transantiago puede ser enfrentado de manera efectiva siguiendo un ruteo dinámico de inspectores, tal como se propone en esta investigación. Se observa que, a pesar del tamaño y la complejidad del modelo, la generación de columnas permite obtener una buena solución factible para el problema. La solución tiene un impacto tangible, pues considerando un equipo de 20

inspectores en el campo, el modelo sugiere que se puede encontrar un beneficio monetario importante proveniente de los potenciales evasores.

De las experiencias realizadas, también puede observarse la flexibilidad que se induce en los esquemas de control, permitiendo que los inspectores puedan controlar diferentes paraderos durante su día de trabajo en vez de permanecer en uno solo durante toda la jornada. Lo anterior es consistente con el hecho de que los niveles altos de evasión varían de paradero en paradero durante todo un día de trabajo. Así, esta forma dinámica de controlar es más eficiente en términos de usar de manera apropiada los recursos y al equipo de inspectores, con el objetivo de maximizar los beneficios y mantener los costos salariales.

Actualmente y a futuro, la intención del equipo es aplicar esta metodología a instancias mucho más grandes, en bloques de tiempo más cortos. Con respecto a problemas de implementación, se barajan variaciones y restricciones operacionales en las rutas de los inspectores, tales como controlar la evasión dentro de los buses en rutas conflictivas, o permitir que los paraderos sean controlados por más de un inspector en el mismo periodo. Otro aspecto interesante a considerar es analizar el impacto en la solución obtenida tomando en cuenta que los evasores son entes racionales, y que pueden, eventualmente, cambiar su paradero usual, problema que se podría enfrentar con simulación. En términos de la metodología propuesta, el siguiente paso es implementar un esquema de *Branch & Price*, lo cual implica buscar más columnas sobre el árbol de *Branch & Bound*; para eso, una buena estrategia de ramificación (*branching*) debe ser también implementada para poder desarrollar tal método exacto que asegura encontrar la solución óptima del problema.

## AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue apoyada por CONICYT/FONDECYT/REGULAR/ N°1141313 y el Instituto de Sistemas Complejos de Ingeniería (financiamiento ICM: P-05-004-F y CONICYT: FBO16).

## REFERENCIAS

- Baldacci, R., Mingozzi, A., & Roberti, R., (2012). Recent exact algorithms for solving the vehicle routing problem under capacity and time window constraints. **European Journal of Operational Research**, 218, 1-6.
- Borndörfer, R., Sagnol G. & Swarat, E. (2011). An IP approach to toll enforcement optimization on German motorways. **Operations Research Proceedings**, 317-322.
- Borndörfer, R., Omont, B., Sagnol, G. & Swarat, E. (2012). A Stackelberg game to optimize the distribution of controls in transportation networks. **Game Theory for Networks**, 105, 224-235.
- Cormen T., Leiserson E., Rivest R. & Stein C. (2001). **Introduction to algorithms**, 2nd Ed., MIT press.

Cortés, C., Gendreau, M., Rousseau, L., Souyris, L., & Weintraub, A. (2014). Branch and price and constraint programming for solving a real life technician dispatching problem. **European Journal of Operational Research**, 238, 300-312.

Dasgupta, Papadimitrou & Vazirani (2006). Paths in Graphs . En **Algorithms**, 1st Ed., McGraw-Hill Inc., 109-132.

Desaulniers, G., Lessard, F., & Hadjar, A. (2008). Tabu search, partial elementarity, and generalized k-path inequalities for the vehicle routing problem with time windows. **Transportation Science**, 42(3), 387-404.

Desrochers, M., Desrosiers, J., & Solomon, M. (1992). A new optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows. **Operations research**, 40(2), 342-354.

Desrosiers J., Dumas, Y., Solomon, M. & Soumis, F. (1995). Time Constrained Routing and Scheduling. **Handbooks in Operations Research and Management Science**, 8, 35-139.

Desrosiers J. & Lübbecke, M. (2005). A primer in column generation. En **Column generation**, 1st Ed., Springer US, 1-32.

Directorio de Transporte Publico Metropolitano (2015), Página Web <http://www.dtpm.gob.cl/>

Kelly, J. & Xu, J. (1999). A Set-Partitioning-Based Heuristic for the Vehicle Routing Problem. **INFORMS Journal on Computing**, 11(2), 161-172.

Kliwer N., Mellouli T. & Suhl L. (2006). A time-space network based exact optimization model for multi-depot bus scheduling. **European Journal of Operations Research**, 175(3), 1616-1627.

Liberatore, F., Righini, G., & Salani, M. (2011). A column generation algorithm for the vehicle routing problem with soft time windows. **4OR**, 9(1), 49-82.

Sedgewick R., & Wayne K. (2011). **Algorithms**, 4th Ed., Addison-Wesley Professional.

Taillard, E. (1996). A heuristic column generation method for the heterogeneous fleet VRP. Centre de Recherche sur les transports, Université de Montreal. Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. **Recherche opérationnelle**, 1999, 33(1), 1-14.

Thorlacius, Clausen & Brygge (2010). Scheduling of inspectors for ticket spot checking in urban rail transportation. DSB S-tog. Copenhagen.

Vanderbeck, F. (2005). Implementing mixed integer column generation. En **Column Generation**, 1st Ed., Springer US, 331-358.

Xu, H., Chen, Z., Rajagopal, S. & Arunapuram, S. (2003). Solving a Practical Pickup and Delivery Problem. **Transportation Science**, 37(3), 347-364.