DESARROLLO DE UN MODELO PARA DECISIONES PROBABILISTICAS DISCRETAS

Marisa Yadlin
Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Resumen

En este trabajo, se construye un modelo de demanda discreta que es consistente con el principio de maximización de utilidad y que constituye una generalización paramétrica del Modelo Logit Multinomial, de modo que la teoría clásica de tests de hipótesis es aplicable para comparar entre ambos.

El nuevo modelo, Modelo Global (Nesting) de Distribución Extrema, se genera en base a un método para construir distribuciones acumulativas conjuntas, que permite la introducción de dependencias entre variables aleatorias cuyas distribuciones acumulativas marginales están dadas.

El Modelo Global de Distribución Extrema posibilita la representación de procesos de decisión en mallas y de relaciones de sustituibilidad y complementariedad entre las alternativas. Además, sus probabilidades de selección son funciones simples de aquellas correspondientes al Modelo Logit Multinomial.

Como ilustración, el modelo desarrollado se especializa a situaciones con tres alternativas y dos sustitutos.

1. Introducción

Los modelos de demanda discreta se utilizan para explicar la elección de un individuo de una de las alternativas excluyentes y exhaustivas de un conjunto de selección finito C, con $|C| = J$. Ya que el proceso de decisión se considera no determinístico y para convertir la variable dependiente en continua, estos modelos especifican las probabilidades con que un sujeto n elija i de cualquier subconjunto $B \subset C$, $P_B^n(i|Z_{in}, \theta)$. Aquí, Z_{in} es un vector de atributos observados del sujeto n y de la alternativa $i \in B$ y $\theta = (\beta, \alpha)$ es un vector de parámetros desconocidos*.

Los modelos suponen que las preferencias de un sujeto pueden expresarse por medio de una función vectorial sobre C. Así, el individuo n asocia a $i \in C$ un valor U_{in} que depende de las variables explicatorias Z_{in} y de β.

Los modelos de utilidad aleatoria (MUA) en Economía conceptualizan la función de utilidad como aleatoria y asumen que los sujetos eligen de acuerdo al principio de maximización de utilidad, atribuyendo la incertidumbre en las decisiones a la determinación de los valores de las alternativas.

Descomponiendo

$$U_{in} = V_{in} + \varepsilon_{in} \tag{1}$$

donde V_{in} es una función lineal en β

$$V_{in} = \beta^T Z_{in} \tag{2}$$

y ε_{in} es una perturbación aleatoria, se obtiene

$$P_B^n(i) = \text{Prob}\left[\varepsilon_{jn} - \varepsilon_{in} < V_{in} - V_{jn}, \forall j \in B, j \neq i\right] \tag{3}$$

Por lo tanto, un MUA queda determinado por F, la función de distribución acumulativa de $(\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \ldots, \varepsilon_{Jn})$ y por θ.

Se supone que

$$F = F(\alpha) \tag{4}$$

donde α refleja la estructura de dependencias entre los ε_{in}**.

---

* Las probabilidades también se denotan por $P_B^n(i)$ o $P_B(i)$ y $P^n(i)$ o $P(i)$ si $B = C$. El índice n se omite en varios contextos en lo que sigue.

** Formulaciones más generales permiten que θ y F dependan de las alternativas i y/o de los sujetos n y Z_{in} contenga atributos de alternativas $j \neq i$. Sin embargo, estas generalizaciones no permiten derivar el Modelo Logit Multinomial como modelo de demanda discreta.

Fijando en (3) ε_{in} y tomando valor esperado con respecto a su FDA F_i

$$P_B^n(i) = \int \left[\frac{\partial \mathrm{Prob}(\varepsilon_{jn} < t_j;\ \forall\ j \in B)}{\partial t_i} \bigg|_{t_j = V_{in} - V_{jn} + t} \right] dt \qquad (5)$$

Los modelos de utilidad constante (MUC) en Sicología conceptualizan la función de utilidad como determinística y postulan ciertos axiomas sobre el comportamiento, atribuyendo la incertidumbre a la regla de decisión. Para estos modelos

$$U_{in} = V_{in}, \quad \varepsilon_{in} = 0 \qquad (6)$$

El Modelo Logit Multinomial (MLM) está dado por

$$P_B^n(i) = \frac{e^{V_{in}}}{\sum_{j \in B} e^{V_{jn}}}, \ \forall\ i \in B, \forall\ B \subset C, \ |B| \geq 2 \qquad (7)$$

donde

$$V_{in} = \beta^T z_{in}$$

El MLM exhibe gran simplicidad analítica y computacional, pero no considera interrelaciones entre las alternativas.

Para derivar este modelo como MUA, vía (5), una condición suficiente, pero no necesaria, es que ε_{in}, $i \in C$, sean independientes, de modo que

$$\alpha = 0 \qquad (8)$$

e idénticamente distribuidas con FDA de Valor Extremo (VE)

$$F_i(x) = \exp(-e^{-x}), \ x \in R \qquad (9)$$

$$F(x_1, \ldots, x_J) = \exp(-\sum_{j=1}^{J} e^{-x_j}), \ x_j \in R, \ j = 1, \ldots, J \qquad (10)$$

La función de densidad de cada ε_j es

$$f_j(x) = \exp(-x - e^{-x}), \quad x \in R \qquad (11)$$

Además, (Johnson y Kotz, 1970)

$$M_j(s_j) = \Gamma(1 - s_j),\ s_j < 1 \tag{12}$$

es la función generadora de momentos de ε_j y

$$E(\varepsilon_j) = 0{,}577215 = \gamma \quad \text{(Euler)} \tag{13}$$

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_j) = \pi^2/6 = 1{,}645 \tag{14}$$

$$\mathrm{Mediana}(\varepsilon_j) = -\log\ (\log 2) = 0{,}367 \tag{15}$$

$$\mathrm{Moda}\ (\varepsilon_j) = 0$$

La FDA de VE concentra prácticamente toda la probabilidad en $[-2{,}2;\ 9{,}2]$.

Una condición necesaria y suficiente para derivar el MLM como MUC, es el Axioma de Selección de Luce (1959) o propiedad de Independencia de Alternativas Irrelevantes (IAI)

$$\frac{P^n_{\{i,j\}}(i)}{P^n_{\{i,j\}}(j)} = \frac{P^n_B(i)}{P^n_B(j)},\ \forall\ (Z_{1n}, \ldots, Z_{Jn}),\ \forall\ i,j \in B,\ \forall\ B \subset C,\ n = 1,\ldots,N \tag{16}$$

O sea, las chances relativas de elegir i sobre j son independientes de la disponibilidad de otras alternativas.

La propiedad de IAI involucra la incapacidad del MLM de incorporar relaciones entre las alternativas. El MLM puede generalizarse a un MUA que mantenga su simplicidad y que permita la introducción de relaciones de sustituibilidad (o complementaridad) entre las alternativas, mediante la inclusión del vector de parámetros α. Cuando $\alpha = 0$, el MUA generalizado se reduce al MLM, de manera que la evaluación comparativa de ambos modelos puede realizarse con procedimientos de tests clásicos de la hipótesis que $\alpha = 0$, la que está anidada dentro de la clase de hipótesis admisibles que α está en un espacio paramétrico que contiene el 0*.

2. Método de Generalización de MUA

El método permite generar familias de FDA conjuntas para $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_J)$, manteniendo las J FDA marginales F_j fijas e introduciendo parámetros de dependencias entre las perturbaciones. La familia resultante se denomina

* En investigaciones empíricas no descritas en este trabajo, se ha demostrado que los Estimadores Máximo Verosímiles son únicos en el MUA generalizado y que los Tests de Razón de Verosimilitud son satisfactorios (Yadlin, 1985 a).

Fairlie - Gumbel - Morgenstern (Johnson y Kotz, 1975). De la FDA generada, se deriva, vía (5), un MUA tal que el MUA correspondiente al producto de las F_j fijas constituye un caso especial del primero. Cuando $\alpha = 0$, la FDA y el MUA generados se reducen al producto de las FDA marginales y al MUA original, respectivamente.

El método presentado por Johnson y Kotz (1975), introduce parámetros de dependencia $\alpha_{j1 \ldots jk}$ entre $(\varepsilon_{j1}, \ldots, \varepsilon_{jk}), \{j1, \ldots, jk\} \subset C$, $k = 2, \ldots, J$, donde los α dependen simétricamente de sus subíndices.

En este trabajo, se desarrolla una reformulación del método, con el objeto de generar la FDA F para $(e_j;\ j \in B_m)$, $m = 1, \ldots, M$, donde los $B_m \subset C$ son subconjuntos de alternativas similares con

$$\bigcup_{m=1}^{M} B_m = C$$

de la siguiente manera (ver también Yadlin, 1985 b):

$$F(x_1,\ldots,x_J) = \prod_{j=1}^{J} F_j(x_j) \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \sum_{\substack{i,j \in B_m \\ i<j}} \left[1 - F_i(x_i)\right]\left[1 - F_j(x_j)\right] \right\} \qquad (17)$$

donde α_m representa asociación entre los ε_j con $j \in B_m$.

Si las funciones de densidad marginales f_j existen, la densidad conjunta está dada por

$$f(x_1,\ldots,x_J) = \prod_{j=1}^{J} f_j(x_j) \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \sum_{\substack{i,j \in B_m \\ i<j}} \left[1 - 2F_i(x_i)\right]\left[1 - 2F_j(x_j)\right] \right\} \qquad (18)$$

Los α_m deben satisfacer 2^M ecuaciones

$$1 + \sum_{m=1}^{M} C_m \alpha_m \geq 0 \qquad (19)$$

$$C_m = \pm 1$$

Independientemente de los valores de los α_m, F cumple con todas las condiciones de una FDA, excepto que puede asignar valores negativos a algunos rectángulos en R^J si es que (19) no se cumple. Similarmente, f integra a 1 siempre, pero puede ser negativa si los α_m no se restringen.

Es interesante notar que si se considera sólo algunos de los B_m, la FDA y la densidad de los ε_j correspondientes pertenecen a las familias (17) y (18), respectivamente.

Por (5), el MUA correspondiente a la FDA generada (17) es

$$P_C(\nu) = \int \Bigg\{ f_\nu(t) \prod_{\substack{i \in C \\ i \neq \nu}} F_i(V_\nu - V_i + t) +$$

$$+ f_\nu(t) \prod_{\substack{i \in C \\ i \neq \nu}} F_i(V_\nu - V_i + t) \times$$

$$\times \sum_{\{m : \nu \notin B_m\}} \alpha_m \sum_{\substack{i, j \in B_m \\ i < j}} \Big[1 - F_i(V_\nu - V_i + t)\Big] \times$$

$$\times \Big[1 - F_j(V_\nu - V_j + t)\Big] + f_\nu(t) \sum_{\substack{i \in C \\ i \neq \nu}} F_i(V_\nu - V_i + t) \times$$

$$\times \sum_{\{m : \nu \in B_m\}} \alpha_m \sum_{\substack{j \in B_m \\ j \neq \nu}} \Big[1 - 2F_\nu(t)\Big]\Big[1 - F_j(V_\nu - V_j + t)\Big] \Bigg\} dt$$

$$V_i = \beta^T Z_i \text{ , } i, \nu \in C \qquad (20)$$

Las probabilidades en (20) suman 1, cualquiera sean los valores de los α_m, pero la restricción (19) debe satisfacerse para que todas las probabilidades sean nonegativas.

Nuevamente, si $B \subset C$ es la unión de sólo algunos de los B_m, $P_B(i)$, $i \in B$, pertenece a la misma clase de modelos (20). Esta característica es relevante cuando se quiere especializar un modelo a situaciones con conjuntos de selección formados por sólo algunos grupos de alternativas.

3. Desarrollo del Modelo de Valor Extremo Global (MVEG1)

Restringiendo F_j y f_j, $j = 1, \ldots, J$, en (17) y (18) a la FDA y densidad de VE (9) y (11), respectivamente, se obtiene la familia de FDA de VEG1. Cuando todos los α_m son 0, esta distribución se reduce al producto de FDA de VE. Así,

$$F(x_1, \ldots, x_J) = \prod_{j=1}^{J} \exp(-e^{-x_j}) \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \sum_{\substack{i,j \in B_m \\ i<j}} \left[1 - \exp(-e^{-x_i})\right]\left[1 - \exp(-e^{-x_j})\right] \right\}$$

$$x_j \in R, \ j = 1, \ldots, J \tag{21}$$

donde los ... deben satisfacer (19).

Además,

$$f(x_1, \ldots, x_j) = \prod_{j=1}^{J} \exp(e^{-x_j}) \exp(-x_j) \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \sum_{\substack{i,j \in B_m \\ i<j}} \left[1 - 2\exp(-e^{-x_i})\right] \times \left[1 - 2\exp(e^{-x_j})\right] \right\}$$

$$x_j \in R, \ j = 1, \ldots, J \tag{22}$$

Reemplazando en (20) F_j por la distribución de VE e integrando se obtiene el MVEG1

$$P_C(\nu) = \left[1 + \sum_{\{m:\nu\notin B_m\}} \sum_{\substack{i,j\in B_m \\ i<j}} \alpha_m + \sum_{\{m:\nu\in B_m\}} \sum_{\substack{j\in B_m \\ j\neq\nu}} \alpha_m\right] \frac{e^{V_\nu}}{\sum_{k\in C} e^{V_k}} -$$

$$- \sum_{\{m:\nu\notin B_m\}} \sum_{\substack{i,j\in B_m \\ i<j}} \alpha_m \left[\frac{e^{V_\nu}}{e^{V_i} + \sum_{k\in C} e^{V_k}} + \frac{e^{V_\nu}}{e^{V_j} + \sum_{k\in C} e^{V_k}} -\right.$$

$$\left. - \frac{e^{V_\nu}}{e^{V_i} + e^{V_j} + \sum_{k\in C} e^{V_k}}\right] -$$

$$- \sum_{\{m:\nu\in B_m\}} \sum_{\substack{j\in B_m \\ j\neq\nu}} \alpha_m \left[\frac{2e^{V_\nu}}{e^{V_\nu} + \sum_{k\in C} e^{V_k}} + \frac{e^{V_\nu}}{e^{V_j} + \sum_{k\in C} e^{V_k}} -\right.$$

$$\left. - \frac{2e^{V_\nu}}{e^{V_\nu} + e^{V_j} + \sum_{k\in C} e^{V_k}}\right] \qquad (23)$$

Las probabilidades de selección (23) se pueden expresar en términos de las probabilidades del MLM (7). Denotando por $Q_B(i)$* las probabilidades del MLM en (7) y luego de multiplicar y dividir cada término en (23) por $\sum_k \exp(V_k)$

---

* Sin subíndice si B = C .

$$P_C(\nu) = \left[1 + \sum_{\{m:\nu\notin B_m\}} \sum_{\substack{i,j\in B_m\\ i<j}} \alpha_m + \sum_{\{m:\nu\in B_m\}} \sum_{\substack{j\in B_m\\ j\neq\nu}} \alpha_m\right] Q(\nu) -$$

$$- \sum_{\{m:\nu\notin B_m\}} \sum_{\substack{i,j\in B_m\\ i<j}} \alpha_m \left[\frac{Q(\nu)}{1+Q(i)} + \frac{Q(\nu)}{1+Q(j)} - \frac{Q(\nu)}{1+Q(i)+Q(j)}\right] -$$

$$- \sum_{\{m:\nu\in B_m\}} \sum_{\substack{j\in B_m\\ j\neq\nu}} \alpha_m \left[\frac{2Q(\nu)}{1+Q(\nu)} + \frac{Q(\nu)}{1+Q(j)} - \frac{2Q(\nu)}{1+Q(\nu)+Q(j)}\right]$$

$$V_i = \beta^T Z_i,\ i\ ,\ \nu \in C. \qquad (24)$$

Cuando $\alpha_m = 0$, $m = 1, \ldots, M$, (23) y (24) se reducen a $Q_B(\nu)$, o sea al MLM.

Tal como en el modelo en su forma más general (20), $\sum_{j\in C} P_C(j) = 1$, independientemente de los valores de los α_m. Sin embargo, la restricción (19) es necesaria para que todas las probabilidades sean nonegativas.

4. El MVEG1 para Alternativas Sustitutas por Pares

Tomando los $B_m = \{i,j\}$, $i, j \in C$, $i < j$, como los $M = J(J-1)/2$ pares de elementos de C, se puede introducir dependencia por pares entre ε_j, $j \in C$. Poniendo $\alpha_m = \alpha_{ij}$, $i < j$* en (21)

* Sin pérdida de generalidad, ya que por simetría, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

$$F(x_1,\dots,x_J) = \prod_{j=1}^{J} \exp(-e^{-x_j}) \Big\{ 1 + \sum_{i}^{J-1} \sum_{<j}^{J} \alpha_{ij} \left[1 - \exp(-e^{-x_i})\right] \left[1 - \exp(-e^{-x_j})\right] \Big\}$$

$$x_j \in R,\ j = 1,\dots,J \tag{25}$$

y

$$f(x_1,\dots,x_J) = \prod_{j=1}^{J} \exp(-x_j)\exp(-e^{-x_j}) \Big\{ 1 + \sum_{i}^{J-1} \sum_{<j}^{J} \alpha_{ij} \left[1 - 2\exp(-e)^{-x_i})\right] \left[1 - 2\exp(-e^{-x_j})\right] \Big\}$$

$$x_j \in R,\ j = 1,\dots,J \tag{26}$$

donde los coeficientes α deben satisfacer

$$1 + \sum_{i}^{J-1} \sum_{<j}^{J} C_i C_j \alpha_{ij} \geq 0$$

$$C_j = \pm 1 \tag{27}$$

La función generadora de momentos que caracteriza a la FDA (25) sirve para calcular la correlación entre cualquier par de los ε_j, con el fin de lograr un índice del grado de sustituibilidad entre el par de alternativas respectivo. Esta función se computa fácilmente notando que $F_j(\varepsilon_j)$ tiene distribución Uniforme (0,1) y aplicando (12)

$$M(s_1,\dots,s_J) = \prod_{j=1}^{J} \Gamma(1 - s_j) \Big\{ 1 + \sum_{i} \sum_{<j} \alpha_{ij} \left[1 - 2^{s_i}\right] \left[1 - 2^{s_j}\right] \Big\}$$

$$s_j < 1,\ j = 1,\dots,J \tag{28}$$

Luego, se deduce que

$$\text{Correlación } (\varepsilon_{j_1}, \varepsilon_{j_2}) = 0{,}292\ \alpha_{j_1 j_2},\ j_1, j_2 \in C \tag{29}$$

Las probabilidades de MVEG1 para sustitutos por pares, especificadas en términos de las probabilidades del MLM, se deducen de (24)

$$F_c(v) = \left[1 + \sum_{i<j}\sum \alpha_{ij}\right] Q(v) -$$

$$- \sum_{\substack{i<j \\ i,j \neq v}} \sum \alpha_{ij} \left[\frac{Q(v)}{1 + Q(i)} + \frac{Q(v)}{1 + Q(j)} - \frac{Q(v)}{1 + Q(i) + Q(j)} \right] -$$

$$- \sum_{j \neq v} \alpha_{vj} \left[\frac{2Q(v)}{1 + Q(v)} + \frac{Q(v)}{1 + Q(j)} - \frac{2Q(v)}{1 + Q(v) + Q(j)} \right] \qquad (30)$$

En (29) se aprecia que, a menos que la restricción (24) sea relajada, el valor absoluto de la correlación entre cualquier par de perturbaciones no puede exceder 0,292. Para que el valor absoluto de esta correlación varíe entre 0 y 1, el valor absoluto del parámetro α asociado a ella debe variar entre 0 y 3,424. Cabe notar que aún asumiento (24), en investigaciones empíricas con información simulada (Yadlin, 1984 a), el MVEG1 ha representado adecuadamente sustituibilidad entre pares de alternativas, superando al MLM y al Modelo de Valor Extremo Generalizado (MVEG) de McFadden (1979).

5. El MVEG1 para Conjuntos de Selección con Tres Alternativas y Dos Sustitutos (MVEG1 (3,2))

Tomando $J = 3$, $M = 2$, $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2, 3\}$, $\alpha_{1j} = 0$, $j = 2,3$, $\alpha_{23} = \alpha$, se contemplan dos perturbaciones dependientes y una independiente.

De (25) y (26)

$$F(x_1, x_2, x_3) = \prod_{j=1}^{3} \exp(-e^{-x_j}) \Big\{ 1 + \alpha \left[1 - \exp(-e^{-x_2})\right] \left[1 - \exp(-e^{-x_3})\right] \Big\} \qquad (31)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \prod_{j=1}^{3} \exp(-x_j) \exp(-e^{-x_j}) \Big\{ 1 + \alpha \left[1 - 2\exp(-e^{-x_1})\right] \left[1 - 2\exp(-e^{-x_2})\right] \Big\} \qquad (32)$$

$$|\alpha| \leq 1 \qquad (33)$$

Así, ε_1 tiene una distribución de VE, $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ tiene una distribución de VEG1 bivariada y ε_1 es independiente de $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Además, ε_2 y ε_3 tienen distribuciones marginales de VE.

Las probabilidades de selección, expresadas como funciones de las del MLM, se deducen de (30)

$$P_C(1) = Q(1)\left\{1 + \alpha \frac{Q(2)Q(3)(3 - Q(1))}{(1 + Q(2))(1 + Q(3))(2 - Q(1))}\right\}$$

$$= Q(1)\{A_1\} \tag{34}$$

$$P_C(2) = Q(2)\left\{1 + \alpha Q(3)\ \frac{2Q(2) - (2 - Q(1))(1 - Q(2))}{(1 + Q(2))(1 + Q(3))(2 - Q(1))}\right\}$$

$$= Q(2)\{A_2\} \tag{35}$$

$$P_C(3) = Q(3)\left\{1 + \alpha Q(2)\ \frac{2Q(3) - (2 - Q(1))(1 - Q(3))}{(1 + Q(2))(1 + Q(3))(2 - Q(1))}\right\}$$

$$= Q(3)\{A_3\} \tag{36}$$

Cuando $\alpha = 0$, el modelo se reduce a un Logit Trinomial (a Q(1), Q(2) y Q(3)).

Como se comentó en la Sección anterior, el valor absoluto de la correlación entre ε_2 y ε_3 no puede exceder 0,292. La posibilidad de relajar la restricción (33) sobre α es estudiada a continuación. Como el foco de interés es las relaciones de sustituibilidad entre las alternativas 2 y 3, que pueden ser parametrizadas con valores positivos de α, el análisis se realiza para valores positivos de α*. Es decir, se debe determinar si α puede tomar un valor α_0 con $1 < \alpha_0 \leq 3{,}424$, de modo que la función de densidad y las probabilidades de selección sean nonegativas. Esto es equivalente a exigir que la función de densidad f_{23} de $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ y las probabilidades binomiales correspondientes sean nonegativas (ver Yadlin, 1985 a).

Para determinar los valores factibles de α en términos de la función de densidad, se fija $\alpha_0 \in (1,\ 3{,}424)$ y se encuentran valores permisibles de $(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \in R^2$, tales que $f_{23} \geq 0$. Esto arroja regiones $S(\alpha_0)$ que son

---

* El análisis para valores negativos de α es análogo debido a la forma de las funciones pertinentes.

subconjuntos propios de $R^{\cdot}$. Por lo tanto, α no puede exceder 1, a menos que se definan nuevas perturbaciones truncando las perturbaciones originales:

$$\left(\varepsilon_2'(\alpha_0),\ \varepsilon_3'(\alpha_0)\right) = (\varepsilon_2,\ \varepsilon_3) \text{ si } (\varepsilon_2,\ \varepsilon_3) \in S(\alpha_0)$$
$$= 0 \qquad\qquad \text{si no}$$

La FDA de estas nuevas perturbaciones es la FDA de $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dividida por la probabilidad que $(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \in S(\alpha_0)$. Se puede construir un nuevo MUA con una correlación mayor, pero éste generalmente no contiene al MLM.

Para establecer si α se puede aumentar, respetando la nonegatividad de las probabilidades del MVEG1, nótese que

$$A_1 < 1 \quad \text{si} \quad \alpha < 0 \tag{37}$$

$$A_1 > 1 \quad \text{si} \quad \alpha > 0 \tag{38}$$

$$A_i > A_1 \quad \text{si} \quad \alpha < 0 \qquad i = 2, 3 \tag{39}$$

$$A_i < A_1 \quad \text{si} \quad \alpha > 0 \qquad i = 2, 3 \tag{40}$$

$$A_i > 1 \quad \text{si} \quad -1 \leq \alpha < 0 \qquad i = 2, 3 \tag{41}$$

$$0 < A_i < 1 \quad \text{si} \quad 0 < \alpha \leq 1 \qquad i = 2, 3 \tag{42}$$

$$A_i = 1 \quad \text{si} \quad \alpha = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{43}$$

Como en el caso general,

$$\sum_{i=1}^{3} P_C(i) = 1 \quad \text{para todo } \alpha . \tag{44}$$

También

$$P_C(1) \geq 0 \quad \text{para todo } \alpha \geq 0 \tag{45}$$

pero $P_C(i)$, $i = 2, 3$, pueden ser negativas si $\alpha > 1$.

Se puede demostrar que

$$P_C(2) \approx P_C(3) \geq 0 \text{ para todo } \alpha > 1 \text{ si } Z_2 \approx Z_3 \tag{46}$$

o sea, si las alternativas 2 y 3 son sustitutas casi perfectas.

Ahora, a partir del modelo binomial, cuyo conjunto de alternativas es $\{1, 2\}$, se prueba que

$$P_C(i) \geq 0, \quad i = 2, 3, \quad \text{para } 1 < \alpha \leq 2$$
$$\text{si } Z_2 \neq Z_3 \qquad (47)$$

Por lo tanto, $P_C(i)$, $i = 1, 2, 3$, constituyen un modelo de demanda discreta aún cuando $1 < \alpha \leq 2$, pero no un MUA, ya que F en (31), de la cual el modelo se deduce vía (5), no constituye una FDA si $\alpha > 1$. Así, cuando α toma valores en $[1, 2]$, debe ser interpretado como un parámetro que mide sustituibilidad entre las alternativas 2 y 3, pero no correlación entre ε_2 y ε_3. Es el grado de sustituibilidad entre las alternativas el que se puede aumentar, pero no el grado de dependencia de las perturbaciones en las utilidades, a menos que éstas sean truncadas.

6. Caracterización de Sustituibilidad en el MVEG1 (3, 2), $|\alpha| \leq 1$

La propiedad de IAI (16) no es satisfecha por el MVEG1 (3, 2).

Sea $B = \{1, 2\}$. Entonces, $P_B(j) = Q_B(j)$, $j = 1, 2$, ya que ε_1 y ε_2 son independientes, idénticamente distribuidas VE. De las expresiones para $P_C(i)$, $i = 1, 2, 3$, en (34), (35) y (36) y de (40)

$$\frac{Q(1)}{Q(2)} < \frac{Q(1)\ A_1}{Q(2)\ A_2} \quad \text{si} \quad \alpha > 0 \qquad (48)$$

Pero (48) es equivalente a

$$\left[P_B(1) - P_C(1)\right] / P_B(1) < \left[P_B(2) - P_C(2)\right] / P_B(2) \quad \text{si} \quad \alpha > 0 \qquad (49)$$

O sea, la introducción de la alternativa 3, que es sustituta de 2, pero no de 1, produce una disminución proporcional menor en la probabilidad de 1 que en la de 2.

Es interesante notar que si $\alpha < 0$ (ε_2 y ε_3 tienen correlación negativa), la agregación de la alternativa 3 lleva a una disminución proporcional mayor en la probabilidad de 1 que en la de 2. La interpretación es que valores negativos de α sirven para parametrizar relaciones de complementaridad entre las alternativas. Así, usando (39)

$$\left[P_B(1) - P_C(1)\right] / P_B(1) > \left[P_B(2) - P_C(2)\right] / P_B(2) \quad \text{si} \quad \alpha < 0 \qquad (50)$$

que es igual a (49) con > en lugar de <.

El MVEG1 (3, 2) es útil para modelar un proceso de decisión en malla con dos nodos, correspondientes a $B_1 = \{1\}$ y a $B_2 = \{2, 3\}$, en el sentido que las probabilidades condicionales de escoger 2 ó 3, dado que el segundo nodo ha sido seleccionado, difieren de las probabilidades no condicionales de elegir 2 ó 3 de B_2. Ambas probabilidades coinciden si y sólo si el primer nodo se puede descartar porque tiene probabilidad 0. El MVEG1 y otros modelos (por ejemplo, el MVEG) son distintos en este aspecto. En estos últimos modelos las probabilidades condicionales y no condicionales se confunden, ya que en las probabilidades condicionales dado un nodo no se toma en cuenta la disponibilidad del resto de los nodos (Yadlin, 1985 a).

Agradecimientos

Debo agradecer a E.L. Scott por su apoyo durante el desarrollo de esta investigación. Extiendo mis reconocimientos a D. McFadden y S.E. Fienberg por sus sugerencias.

Referencias

JOHNSON, N.L. y KOTZ, S. (1970) Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions. John Wiley and Sons, Nueva York.

JOHNSON, N.L. y KOTZ, S. (1975) On some generalized Fairlie-Gumbel-Morgenstern distributions. Communications in Statistics, Vol.4, 415-427.

LUCE, R.D. (1959) Individual Choice Behavior. John Wiley and Sons, Nueva York.

McFADDEN, D. (1979) Quantitative methods for analyzing travel behaviour of individuals: Some recent developments. En D.A. Hensher y P.R. Stopher (eds.), Behavioural Travel Modelling. Croom Helm, Londres.

YADLIN, M. (1985 a) Development of a Model for Probabilistic Discrete Decisions. Ph.D. Dissertation, Department of Statistics, University of California, Berkeley, EE.UU.

YADLIN, M. (1985 b) A model for probabilistic discrete decisions introducing interdependence among alternatives. Informe Técnico PUC-FM-85-9, Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago.