

"CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE MINIMIZACION DE LA ENERGIA  
CONSUMIDA POR TRENES DE FERROCARRILES METROPOLITANOS"

Manuel Duarte M.  
Departamento de Ingeniería Eléctrica  
Universidad de Chile  
Av. Tupper 2007, Casilla 5037  
Santiago, Chile.

La gran cantidad de energía consumida por los trenes en una instalación de ferrocarril metropolitano hace interesante desplegar esfuerzos tendientes a reducir dichos consumos.

En este trabajo se estudian algunos aspectos que permiten minimizar el consumo de energía de trenes de un ferrocarril metropolitano. El problema se aborda desde dos puntos de vista, no necesariamente excluyentes, considerando una instalación de metro dada (existente) por un lado y considerando una instalación a nivel de proyecto (antes de su construcción) por otro.

En el primer caso el trazado de la línea está hecho y constituye un dato del problema, con lo cual el estudio se reduce a encontrar el control óptimo que es necesario aplicar al tren, para obtener un mínimo consumo de energía en esas condiciones. En el segundo caso el trazado de la línea es una variable del problema y el estudio se traduce en una doble minimización, tendiente a encontrar tanto el control óptimo que debe aplicarse al tren, como el trazado óptimo que debe tener la línea, de manera tal de minimizar la energía consumida por el tren, una vez que la instalación esté funcionando.

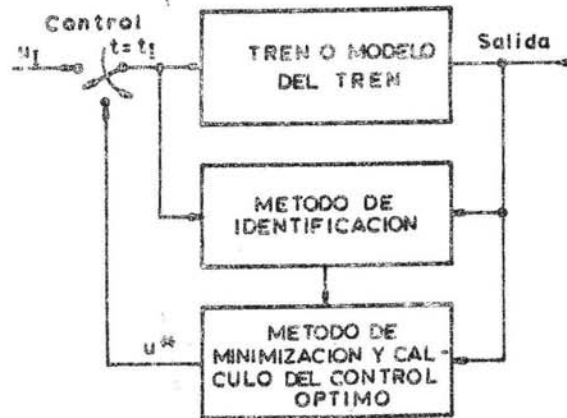
Se entregan aquí algunos antecedentes generales en relación a los problemas mencionados anteriormente y se muestran los resultados obtenidos al aplicarlos al caso particular del Metro de Santiago.

## 1. INTRODUCCION.

El problema de minimización de la energía consumida por los trenes de una instalación del ferrocarril metropolitano puede ser abordado desde dos puntos de vista no necesariamente excluyentes, dependiendo de si dicha instalación se encuentra en la etapa de explotación o en la etapa de proyecto. En el primer caso, el trazado de la línea está hecho y constituye un dato del problema, con lo cual el estudio se reduce a encontrar el control óptimo que es necesario aplicar al tren, para obtener un mínimo consumo de energía en esas condiciones y suponiendo conocidos todos o algunos de los parámetros que definen el modelo del tren. En el caso de suponer desconocidos uno o varios parámetros del modelo, es necesario emplear una técnica de optimización combinada con una técnica de identificación de sistemas o estimación de parámetros. Estos dos esquemas posibles para este primer punto de vista, se muestran en las Figuras 1(a) y 1(b).



(a) Sin parámetros desconocidos



(b) Con parámetros desconocidos

Fig. 1. Esquema de optimización del funcionamiento de un tren en una instalación en la etapa de explotación.

Desde el segundo punto de vista, cuando la instalación está en la etapa de proyecto, el trazado de la línea es una variable del problema y el estudio se traduce en una doble minimización, tendiente a encontrar tanto el control óptimo que debe aplicarse al tren, como el trazado óptimo que debe tener la línea, de manera tal de minimizar la energía consumida por el tren, una vez que la instalación se encuentre en la etapa de explotación. Al igual que en el caso anterior, aquí también es posible distinguir dos situaciones; una en la que todos los parámetros del modelo del tren son conocidos y otra en la cual existen parámetros desconocidos. Los esquemas de optimización correspondientes a estas dos situaciones se muestran en las Figuras 2(a) y 2(b).

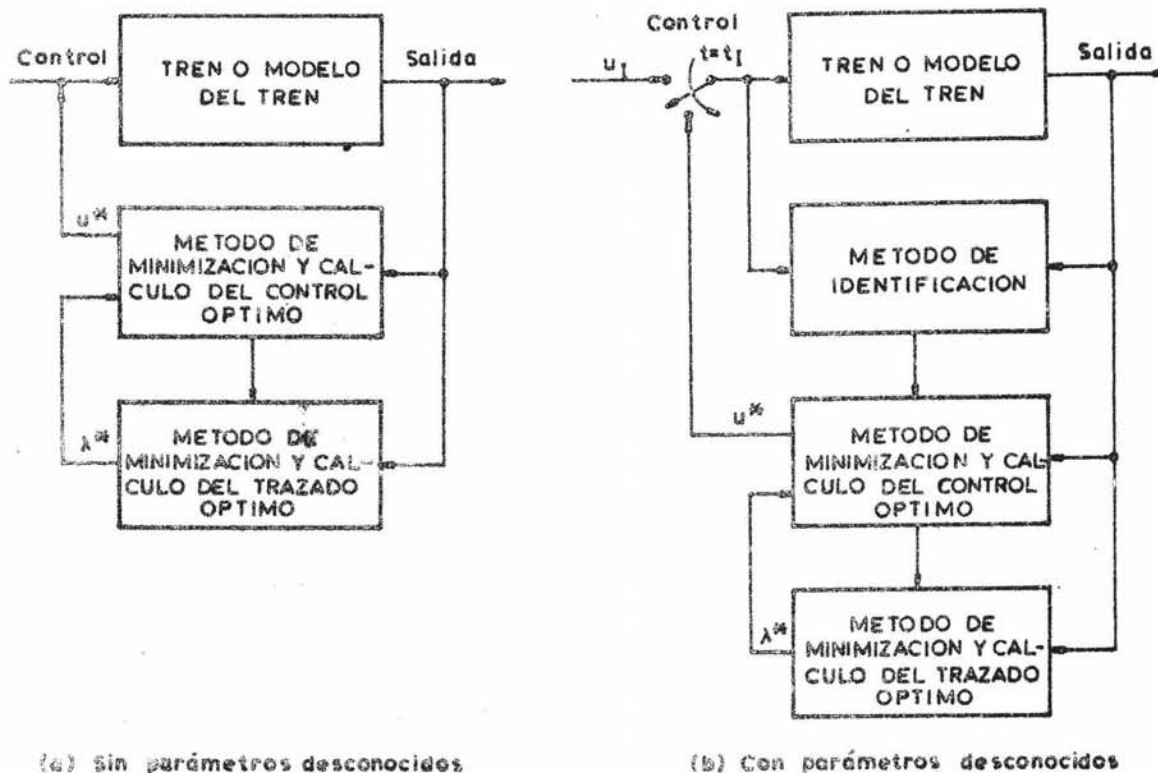


Fig. 2. Esquemas de optimización del funcionamiento de un tren en una instalación en la etapa de proyecto.

Evidentemente el esquema mostrado en la Fig. 1(a) es un caso particular de aquel mostrado en la Fig. 1(b), al igual que el esquema de la Fig. 2(a) es un caso particular del esquema de la Fig. 2(b). Pero, por otro lado, el análisis de los esquemas que incluyen identificación, resulta mucho más complicado que aquellos esquemas en los cuales todos los parámetros son conocidos. En este trabajo se analizarán los problemas representados por las Figs. 1(b) y 2(a), aplicados al caso del Metro de Santiago.

## 2. ANALISIS DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACION CON PARAMETROS DESCONOCIDOS Y TRAZADO DE LINEA DADO.

### 2.1. Descripción General del Esquema de Solución.

Dentro de los parámetros que definen el modelo de un tren de un ferrocarril metropolitano, la masa total de éste es normalmente desconocida, debido a que la cantidad de pasajeros que suben y bajan en una estación cualquiera es desconocida y difícilmente es susceptible de ser estimada a priori. Por esta razón, antes de aplicar alguna estrategia de control del tren que tienda a minimizar el consumo de energía, es necesario realizar una estimación de este parámetro, en los primeros instantes del viaje entre dos estaciones sucesivas, en base a medidas efectuadas sobre el sistema.



El método propuesto aquí se ilustra en la Fig. 1(b) y consiste en aplicar inicialmente un control conocido  $U_1$  a la partida y medir el desplazamiento que adquiere el tren bajo la acción de este control. Después de un tiempo  $t_1$ , denominado tiempo de identificación, el método de identificación entrega una estimación de la masa que lleva el tren en esos momentos. Este valor es entregado al método de minimización, el cual se encargará de entregar instante a instante, el control óptimo que debe ser aplicado al tren para tener un mínimo consumo de energía. Este esquema, aplicado a cada par de estaciones adyacentes, permite minimizar la energía consumida por el tren durante todo el trayecto desde una estación terminal a otra, tanto en el viaje de ida como de vuelta, salvo en los instantes iniciales de la partida desde cada estación (entre  $t=0$  y  $t=t_1$ ) tiempo durante el cual el control aplicado  $U_1$  no necesariamente coincide con el control óptimo. En relación a esto último, la elección del control inicial  $U_1$  que se utiliza para la identificación de la masa del tren, no es arbitraria y está limitada por las restricciones del problema, restricciones que se detallarán más adelante.

## 1.2. Modelo del Tren.

En este estudio se escogió un modelo del tren que fuera sencillo pero que representara adecuadamente su comportamiento dinámico. La estructura del modelo elegido [1] y [2], fue modificada y adaptada al caso del Metro de Santiago [3], resultando el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} dx/dt &= v & (2.1 \text{ a}) \\ dv/dt &= (w-f)/m & (2.1 \text{ b}) \\ w &= 4n G u^2 / r & (2.1 \text{ c}) \\ f &= k_1 M + k_2 v^2 + Mg \operatorname{sen} [\phi(x)] & (2.1 \text{ d}) \\ e &= (j+1) [\phi(u) v / r + R u] & (2.1 \text{ e}) \\ \phi(u) &= G u / (1+b \cdot u) & (2.1 \text{ f}) \end{aligned}$$

El significado de los parámetros y variables es el siguiente:

- t: tiempo de viaje,
- x: desplazamiento del tren,
- v: velocidad del tren,
- w: fuerza neta de tracción,
- f: fuerza de resistencia al avance,
- m: masa efectiva del tren [1],
- n: número de coches motrices del tren,
- G: constante de magnetización de los motores de tracción,
- u: corriente consumida por los motores de tracción,
- r: razón de transmisión,
- $k_1, k_2$ : constantes propias del material rodante que toman en cuenta fuerzas opuestas al movimiento,
- M: masa real del tren,
- g: aceleración de gravedad,
- $\phi(x)$ : pendiente de la línea a la distancia x,
- e: tensión en bornes de los motores de tracción,
- j: variable binaria que toma en cuenta el tipo de conexión de los motores de tracción; vale 1 si la conexión es paralelo y vale 0 si la conexión es serie,
- $\phi(u)$ : flujo magnético en los motores de tracción,
- R: resistencia eléctrica de los motores de tracción,
- b: parámetro de ajuste de la curva de magnetización.

Los valores de los parámetros que se utilizaron para el estudio [4] y [3], fueron los siguientes:

$$\begin{aligned} n &= 3, & (2.2a) \\ r &= 0,10134 \text{ [m/rad]}, & (2.2b) \\ G &= 0,005562 \text{ [}\Omega/\text{rad / seg]}, & (2.2c) \\ g &= 9,8 \text{ [m/seg}^2\text{]}, & (2.2d) \\ k_1 &= 0,0116, & (2.2e) \\ k_2 &= 2,203 \text{ [Kg/(m/seg)}^2\text{]}, & (2.2f) \\ m &= M/c, & (2.2g) \\ c &= 0,911, & (2.2h) \\ R &= 0,211 \text{ [}\Omega\text{]}, & (2.2i) \\ b &= 0,5405 \times 10^{-3} \text{ [1/A]}. & (2.2j) \end{aligned}$$

### 2.3. Estimación de la Masa del Tren.

Dado que en este tipo de problema es necesario estimar la masa del tren para proceder enseguida a calcular el control óptimo, es de vital importancia utilizar un método de estimación de parámetros adecuado. Dentro de la gran variedad de métodos que existen [5], se escogió el método de Lion [6], por ser el que mejor se adaptaba al tipo de problema en estudio y fundamentalmente debido a su rápida convergencia hacia los valores reales de los parámetros.

Considerando el modelo descrito por las ecuaciones (2.1) y los valores de los parámetros dados por las relaciones (2.2), se realizó la identificación de la masa del tren en un tramo de la línea N°1 del Metro de Santiago, para un tren moviéndose desde la estación República hasta Santa Lucía. Los resultados de esta identificación empleando el método de Lion [7], se muestran en la Tabla 1, donde además se muestran las características del tramo de línea elegido.

Estaciones	Carga [%]	Longitud [m]	Pendiente de la línea x en [m]; p en [%]	Identificación [seg]
República Los Héroes	80	545	$0 \leq x \leq 118; p = 2$ $118 \leq x \leq 464; p = 12,96$ $464 \leq x \leq 545; p = 2$	6,5
Los Héroes La Moneda	100	543	$0 \leq x \leq 115; p = 2$ $115 \leq x \leq 461; p = 24,75$ $461 \leq x \leq 543; p = 2$	7,8
La Moneda U. de Chile	90	458	$0 \leq x \leq 127; p = 2$ $127 \leq x \leq 350; p = -7,08$ $350 \leq x \leq 458; p = 2$	7,2
U. de Chile Santa Lucía	100	532	$0 \leq x \leq 152; p = 2$ $152 \leq x \leq 439; p = 42,06$ $439 \leq x \leq 532; p = 2$	7,8

Tabla 1. Resultados de la identificación del modelo.

La simulación del modelo y la identificación se llevó a cabo en el computador digital, empleando lenguaje CSMP (Continuous System Modelling Program).

#### 2.4. Estrategia de Control Optimo del Tren.

Las condiciones finales del proceso de identificación (posición, velocidad, aceleración, tiempo, etc.) constituyen las condiciones iniciales para el cálculo del control óptimo. Como funcional de costo de este problema se eligió

$$J = \int_{t_i}^{t_f} n \cdot V(2-j)u \, dt, \quad (2.3a)$$

$$\text{con } u = I/(2-j), \quad (2.3b)$$

donde  $I$  es la corriente suministrada por la red eléctrica y  $V$  es la tensión de dicha red. El instante inicial  $t_i$  corresponde al tiempo de identificación  $t_i$  y el instante final  $t_f$  esta dado por

$$t_f = T - t_i - t_F, \quad (2.4)$$

donde  $T$  es el tiempo total de viaje entre 2 estaciones y  $t_F$  es el tiempo que emplea el tren desde que comienza a frenar hasta que se detiene totalmente en un punto deseado de la próxima estación, de acuerdo a una estrategia de frenado definida de antemano. Ver Figura 3.

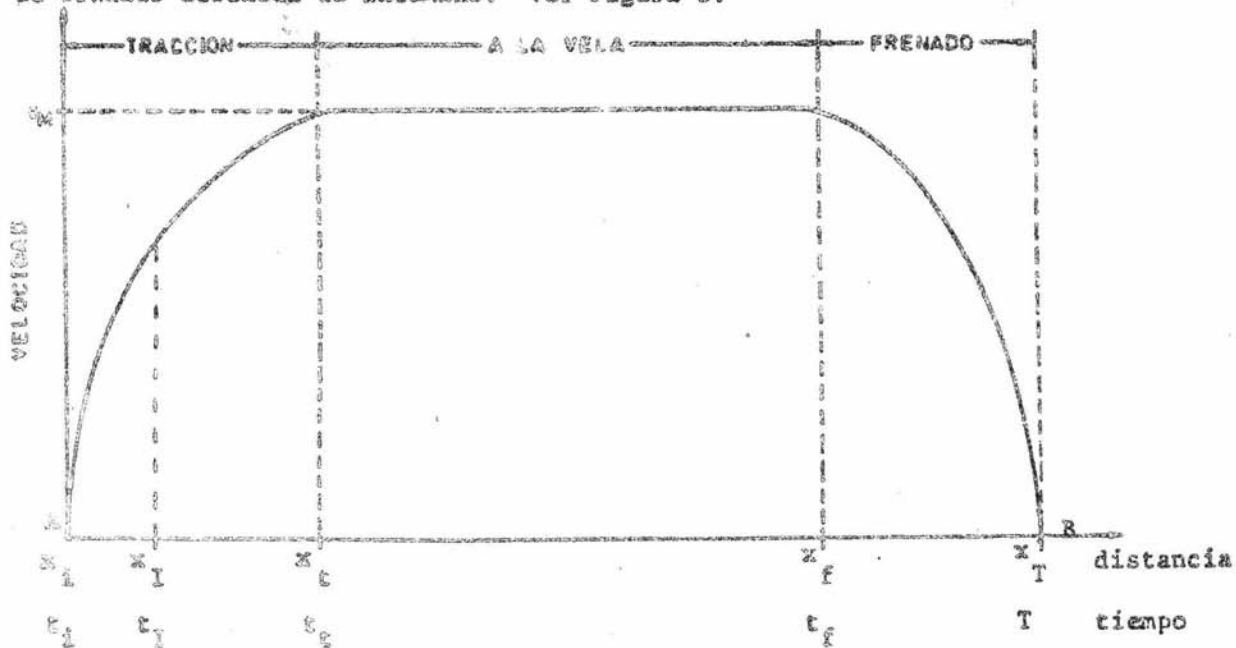


Fig. 3. Movimiento característico de un tren entre dos estaciones A y B.

Las restricciones que se consideraron para la solución del problema fueron las siguientes:

$$0 \leq u \leq I_M = 700 \text{ [A]}, \quad (2.5a)$$

$$v \leq v_M = 57,6 \text{ [Km/h]}, \quad (2.5b)$$

$$v \leq a_M = 1,2 \text{ [m/seg}^2 \text{]}, \quad (2.5c)$$

$$e \leq V = 750 \text{ [v]}, \quad (2.5d)$$

siendo  $I_M$  la corriente máxima admisible por los motores de tracción,  $v_M$  la velocidad máxima del tren,  $a_M$  la máxima aceleración que se le puede imprimir al tren y  $V$  es la tensión de la red.



La formulación del problema de control óptimo es entonces la siguiente: "Encontrar el control óptimo  $u^*$  que transfiera al tren desde las condiciones iniciales, determinadas por el proceso de identificación, hasta las condiciones finales definidas por el comienzo de la etapa de frenado, de manera que la funcional de costo (2.3) sea mínima y sujeto a las restricciones (2.5)".

La solución de este problema se realizó mediante cálculo de variaciones [8], transformando las restricciones en ecuaciones a costa de introducir 4 variables adicionales. Los resultados de la aplicación de éste método al tramo de línea N°1 desde República a Santa Lucía [3] y [7], se muestran en las Figuras 4 y 5. En este caso las simulaciones se efectuaron en lenguaje FORTRAN.

### 3. ANALISIS DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACION CON PARAMETROS DESCONOCIDOS Y TRAZADO DE LINEA A DETERMINAR.

#### 3.1. Descripción General del Esquema de Solución.

En este caso el proceso de identificación no es necesario puesto que todos los parámetros del modelo se suponen conocidos. La incógnita adicional es aquí el trazado de la línea, definido en el plano vertical equivalente (plano que contiene a las estaciones A y B en consideración), tal como se muestra en la Figura 6.

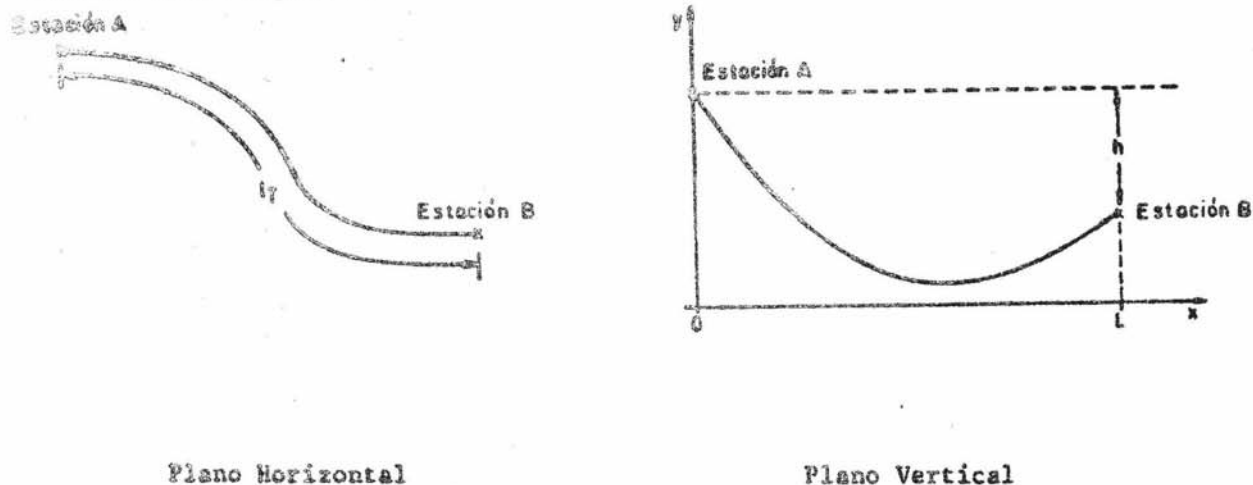


Fig. 6. Trazado de línea en los planos horizontal y vertical equivalente.

En el plano vertical equivalente, el trazado de línea queda definido por la pendiente  $p(x)$  a una distancia  $x$  del origen o bien por las coordenadas  $(x, y)$ . Como política de control del tren se eligió aquella de mínima energía definida por (2.3), sólo que en este caso el instante final es  $t_f = T - t_p$ .

El problema de la determinación del trazado de línea se puede separar del problema del control óptimo del tren, definiendo

$$f(\lambda) = \text{mínimo } J(\lambda, u) = J(\lambda, u^*) \quad (2.6)$$

$u \in U$

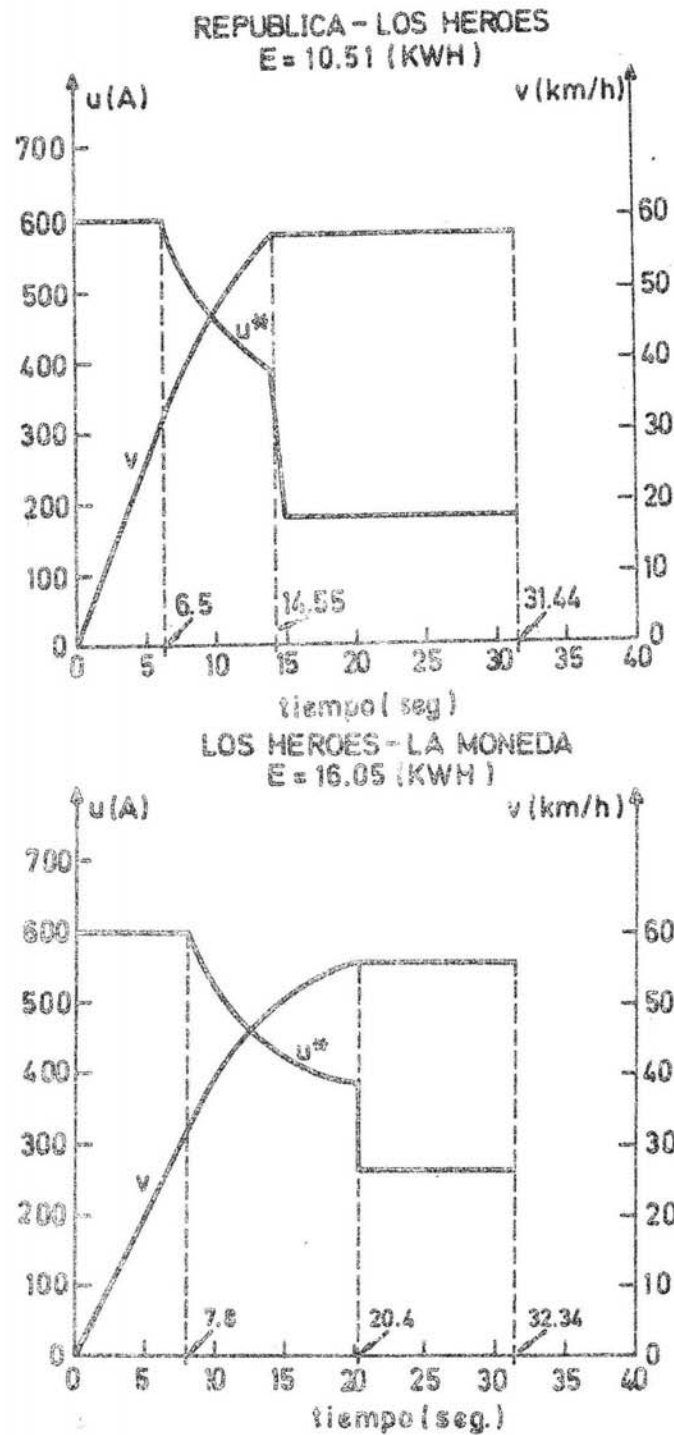


Fig. 4 Control Óptimo aplicado al tren entre las estaciones República - Los Héroes - La Moneda.



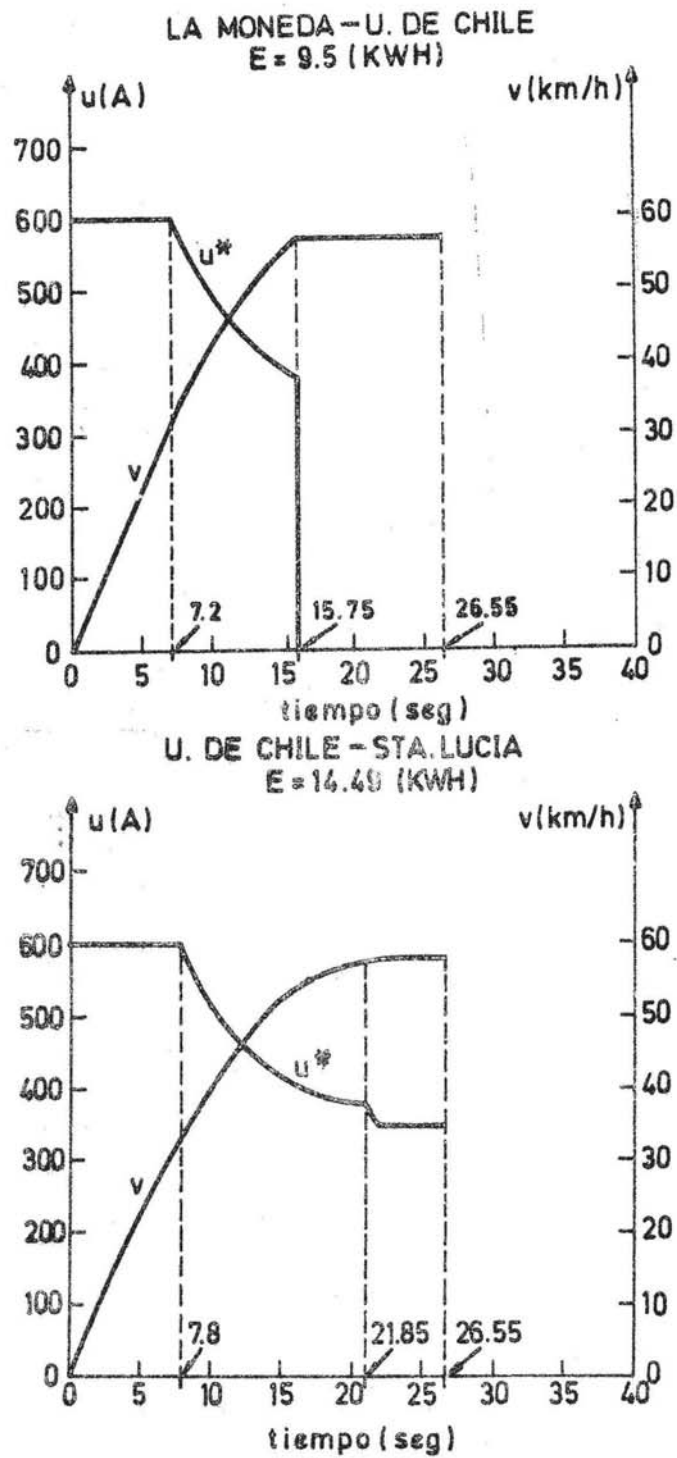


Fig. 5 Control óptimo aplicado al tren entre las estaciones La Moneda - U. de Chile - Santa Lucía.

como el valor de un trazado de línea  $\lambda$  obtenido de evaluar la funcional (2.3) cuando el tren se controla óptimamente con un control  $u^*$  determinado por el método descrito anteriormente. Con esta definición el problema se reduce a encontrar  $\lambda^*$  definida como

$$\lambda^* = \min_{\lambda \in A} f(\lambda) = J(\lambda^*, u^*), \quad (2.7)$$

siendo  $A$  el conjunto de trazados de línea admisibles.

### 3.2. Determinación del Trazado de Línea Óptimo.

La solución de este problema es en general complicada ya que significa efectuar una minimización en un espacio de funciones  $A[9]$ . Por esta razón se empleó aquí un método de solución heurístico y aproximado [10], suponiendo que el trazado de línea está compuesto por segmentos rectilíneos de pendientes  $p$  y longitudes  $l$  variables. Además se trató de aprovechar al máximo los efectos gravitacionales para acelerar el tren a la partida y para frenar el tren cuando se aproxima a una estación. Los valores de pendientes y longitudes se determinan de acuerdo a condiciones técnicas tales como seguridad en zona de estaciones, drenaje de agua en la línea, longitud del tren, separación entre estaciones, tipo de material rodante, etc. De acuerdo a estas consideraciones se tendrá una pendiente mínima  $p_m$ , una pendiente máxima  $p_M$ , una pendiente en zona de estaciones  $p_l$ , una longitud mínima  $l_m$ , una longitud máxima  $l_M$  y una longitud en zona de estaciones  $l_l$ . También es posible definir una pendiente  $p_G$  que permita anular las fuerzas de resistencia de avance del tren.

Considerando que el trazado de línea es el mismo cuando el tren viaja desde A hacia B que cuando lo hace de B a A, es necesario evaluar la funcional de costo (2.3) en ambos sentidos, de manera que

$$f(\lambda) = J_{AB}(\lambda u^*) + J_{BA}(\lambda u^*). \quad (2.8)$$

Para la solución de este problema se usarán los siguientes valores de pendientes y longitudes:

$$p_l = p_m = 2 [\%], \quad (2.9a)$$

$$p_M = 55 [\%], \quad (2.9b)$$

$$p_G = 10 [\%], \quad (2.9c)$$

$$l_l = 90 [m], \quad (2.9d)$$

$$l_m = 60 [m], \quad (2.9e)$$

$$l_M = L - 2l_l. \quad (2.9f)$$

Los resultados de aplicar este método aproximado para obtener el trazado de línea óptimo [11], se encuentran resumidos en la Tabla 2, donde se muestran además las energías consumidas por el tren considerando los actuales trazados de la línea N°1. En la Figura 7 se muestran los trazados de línea actual y aquellos obtenidos del estudio para los casos de menor y mayor ahorro de energía. Todas las simulaciones se efectuaron en lenguaje FORTRAN.

### 4. CONCLUSIONES.

Los resultados obtenidos en este trabajo permiten afirmar que es posible reducir los consumos de energía de una instalación de ferrocarril metropolitano.

Estación	L [m]	L [m]	Trayectoria Actual		Trayectoria Propuesta		Ahorro Circuito %
			ida	vuelta E [KWh]	ida	vuelta E [KWh]	
SPA - NEP	685	-4,52	13,84	21,28	11,96	16,80	18,11
NEP - PAJ	990	1,56	24,22	18,83	18,00	15,01	23,32
PAJ - LRE	902	1,80	23,68	17,24	17,32	15,40	20,04
LRE - ECU	707	3,96	21,38	14,78	16,77	12,49	19,08
ECU - PGA	721	5,42	22,26	14,28	17,66	11,84	19,27
PGA - UTE	589	4,85	19,65	13,30	16,21	11,22	16,75
UTE - ECE	717	3,53	20,93	14,86	16,62	12,55	18,50
ECE - ULA	506	8,52	19,26	11,58	17,99	11,22	5,29
ULA - REP	673	8,34	22,52	11,94	18,83	11,22	12,80
REP - LHE	545	4,88	18,88	12,81	16,02	11,22	13,95
LHE - LMO	543	8,96	20,25	11,69	18,59	11,22	6,67
LMO - UCH	458	-1,11	13,87	16,01	11,22	12,32	21,22
UCH - SLU	532	12,56	21,10	11,47	19,50	10,52	7,83
SLU - UCA	589	6,76	20,25	11,81	17,30	11,22	11,04
UCA - BAQ	578	7,40	20,39	11,87	17,79	11,22	10,07
BAQ - SAL	899	12,59	28,29	11,92	23,06	11,22	14,73
SAL - MMO	741	6,52	23,04	13,91	18,43	11,41	19,24
MMO - PVA	696	8,01	23,08	12,34	18,85	11,22	15,11
PVA - LLE	635	9,17	22,20	11,99	18,94	11,22	11,79
LLE - TOB	660	11,37	23,51	12,04	20,55	11,22	10,63
TOB - EGO	626	10,87	22,35	11,93	20,19	11,22	8,37
EGO - ALC	624	9,08	21,99	11,99	18,91	11,22	11,33
ALC - EMI	627	12,05	23,37	12,68	20,99	11,22	10,65
TOTAL			490,31	312,55	411,7	275,42	14,42
						687,12	

Tabla 2. Comparación de consumos de energía entre trayectorias actuales y propuestas.



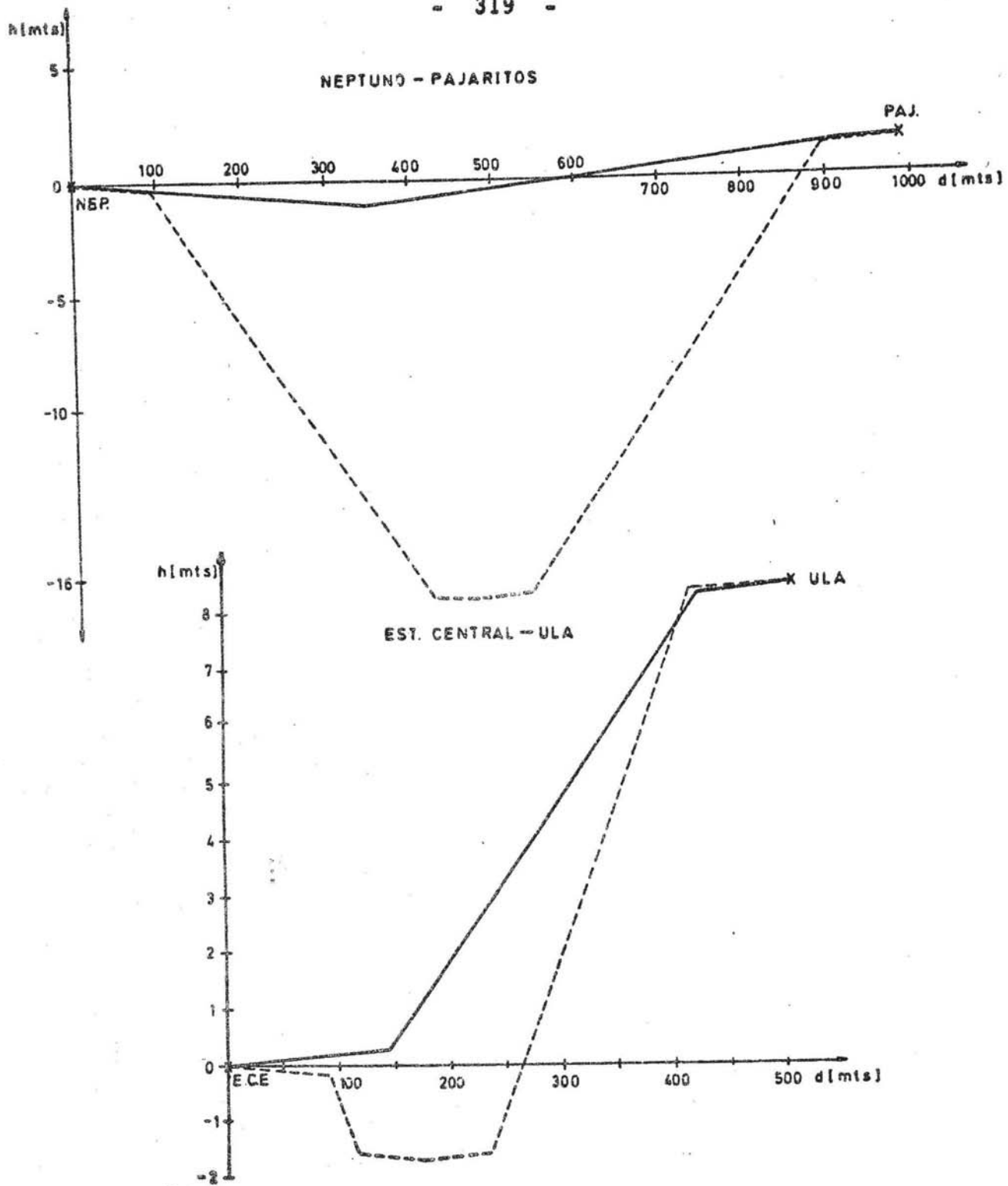


Fig. 7 Comparación de los trazados de línea actual (línea llena) y propuesto (línea segmentada) para el caso de mayor ahorro de energía (superior) y menor ahorro de energía (inferior).

tano, ya sea en la etapa de explotación o en la etapa de proyecto, si se diseñan trazados de línea y/o controlan los trenes adecuadamente.

A pesar que el estudio de la sección 3 no está completo, ya que deberían incluirse además los costos desde el punto de vista de las obras civiles que significa cada trazado de línea y emplear un método de solución más analítico (tal como el que se está desarrollando en [12]), se intuye que los ahorros de energía que se obtienen por esta vía pueden resultar no despreciables, lo que hace aconsejable este tipo de estudio en la etapa de proyecto de instalaciones de ferrocarriles metropolitanos.

## 5. BIBLIOGRAFIA.

- [1] S.N. Talukdar y R.L. Koo, "Multiobjective Trajectory Optimization for Electric Trains". IEEE Transactions on A.C., Vol. AC-24, N°6, 1979, pp. 888-893.
- [2] P.Kokotovic y G. Singh, "Minimum-Energy Control of a Traction Motor", IEEE Transactions on A.C., Vol. AC-17, N°1, 1982, pp. 92-95.
- [3] G. Ortíz V., "Control Optimo Aplicado a Ferrocarriles Metropolitanos", Memoria de Ingeniero Civil Electricista. Santiago, Dpto. Ingeniería Eléctrica, U. de Chile, 1982.
- [4] R. Valpuesta A., "Dimensionamiento de Subestaciones de Rectificación para un Sistema de Tracción Urbano". Memoria de Ingeniero Civil Electricista, Santiago, Dpto. de Ingeniería Eléctrica, U. de Chile, 1978.
- [5] P. Eykhoff, "System Identification-A Survey", Automática, Vol. 7, 1971, pp. 123-162.
- [6] P.M. Lion, "Rapid Identification of Linear and Nonlinear System", AIAA Journal, Vol. 5, Oct. 1967, pp. 1835-1842.
- [7] M. Duarte M. y G. Ortíz V., "Control Adaptivo Indirecto Aplicado a Trenes de Ferrocarril Metropolitano". 4° Congreso Brasileiro de Automática, Campinas: Brasil, Vol. I, 1982, pp. 137-142.
- [8] A. Miele, "The Calculus of Variations in Applied Aerodynamics and Flight Mechanics", en Optimization Techniques with Applications to Aerospace System, ed. G. Leitmann, New York, 1965, pp. 99-170.
- [9] V.F. Dem'Yanov y A.M. Rubinov, "Minimization of Functionals in Normed Spaces", SIAM J. Control, Vol. 6, N°1, 1968, pp. 73-88.
- [10] H.H.Hoang, M.P. Polis y A. Haurie, "Reducing Energy Consumption through Trajectory Optimization for a Metro Network", IEEE Transactions on A.C., Vol. AC-20, N°5, 1975, pp. 590-595.
- [11] M. Duarte M. y N. Haddad S., "Determinación de Trayectorias que reducen el Consumo de Energía en un Ferrocarril Metropolitano", 5° Congreso de la Asociación Chilena de Control Automático, Vol. 1, 1982, pp. 280-299.
- [12] P. Sotomayor C., "Determinación Analítica de Trazados de Línea que Minimizan la Energía en Ferrocarriles Metropolitanos", Informe de Taller de Título, Santiago: Dpto. de Ingeniería Eléctrica, U. de Chile, 1983.