LA NUEVA TEORIA DE MULTIPRODUCCION EN EL ANALISIS ECONOMICO DE SISTEMAS DE TRANSPORTE.

Sergio R. Jara-Diaz
Depto. de Ingeniería Civil, U. de Chile

RESUMEN

El producto de la actividad de una empresa de transporte es un vector de flujos de bienes o personas entre diversos orígenes y destinos. El análisis microeconómico de tal actividad requiere de un marco de referencia distinto del monoproductivo tradicional. En este trabajo se entregan algunos conceptos básicos de la nueva teoría de multiproducción y se ilustra la forma en que ellos deben ser utilizados en el análisis de sistemas de transporte. Se muestra, entre otros elementos, cómo la no consideración de potenciales economías de diversidad provoca necesariamente distorsiones en la estimación del grado de economías de escala a partir de versiones agregadas del producto de transporte.

1. Introducción.

Los textos de microeconomía nos han acostumbrado al análisis de procesos exclusivamente monoproductivos, es decir, aquellos que consideran sólo un bien o servicio. Es así que en ellos se habla de la función de producción como aquella que entrega el máximo nivel de producto para una combinación dada de insumos, o del costo medio como aquel que resulta de dividir el costo total por el nivel de producción asociado. Ninguno de estos populares conceptos es, sin embargo, aplicable al caso de producción múltiple, es decir, al de aquellos procesos productivos cuyo resultado no es uno sino muchos bienes o servicios. Y aunque suene sorprendente, es éste el caso de la mayoría de las actividades productivas reales, si es que no de todas.

Este es sin duda el caso de las empresas de transporte, cuyo producto es el traslado de personas o cosas desde algunos puntos a otros a lo largo de diversos períodos. Es decir, el producto es un vector de flujos entre pares de puntos. Sin embargo, la literatura económica sobre transporte no ha escapado a la norma general de tratamiento escalar del producto, utilizando conceptos tales como las toneladas-kilómetro o pasajeros-kilómetro. Mirados con rigor, tales conceptos no resultan ser sino el resultado de una gruesa agregación de los diversos flujos producidos. Así, por ejemplo, tras los 717,894 millones de pasajeros-kilómetro generados por las empresas aéreas nacionales en 1981, pueden ocultarse muy diversos patrones de flujo, tales como (2000000, 500000, 89470) ó (178940, 100000, 300000) pasajeros/año a distancias medias de 100, 1000 y 2000 kilómetros respectivamente.

La ambigüedad evidente de la descripción agregada del producto genera errores no tan evidentes en el análisis económico del transporte. Uno de los más graves es el relacionado con la asociación entre economías de escala y estructura industrial, problema que nos preocupará durante buena parte de este trabajo.

Nuestra idea es resumir en la siguiente sección los conceptos más importantes de la teoría de multiproducción, suponiendo conocidos los aspectos básicos de monoproducción. Para efectos ilustrativos, recurriremos constantemente al producto bidimensional. En la sección 3 aplicaremos estos conceptos al caso de transporte, en general, resumiendo además el análisis empírico de una firma en particular. Las conclusiones están contenidas en la sección final.

2. Algunos elementos de la teoría de multiproducción.

Sea $X \in R^n$ un vector de insumos x_i, e $Y \in R^m$ un vector de productos y_i. Entonces la función de transformación

$$F(X,Y) \geq 0 \qquad (1)$$

representa todas las combinaciones factibles de X e Y, es decir, los vectores Y que pueden ser producidos a partir de X. De esta forma $F(X,Y°) = 0$ representa una isocuanta, en tanto que $F(X°,Y) = 0$ entrega la frontera de posibilidades de producción.

La función de costos $C(W,Y)$ está definida como aquella que entrega el mínimo gasto necesario para producir Y a precios de factores W, es decir

$$C(W,Y) = \underset{X}{\mathrm{Min}}\ \{WX'/F(X,Y) \geqslant 0,\ X \geqslant 0\}. \tag{2}$$

La minimización de W X' siempre se producirá en la frontera técnica (tecnología convexa).

Se dice que una función de transformación presenta economías de escala si una expansión de insumos λX permite una expansión de la producción en una proporción mayor que λ. Formalmente, el grado de economías de escala S queda definido por (Panzar y Willig, 1977).

$$F(X,Y) = 0 \ \Rightarrow\ F(\lambda X, \lambda^{S} Y) = 0\ , \quad \lambda > 1\ , \tag{3}$$

y existen retornos decrecientes, constantes o crecientes a escala (ec. de escala) si S es menor, igual o mayor que 1 respectivamente. Puede demostrarse que S puede ser calculado a partir de la función de costos como (Panzar y Willig, 1977)

$$S = \frac{C(W,Y)}{Y\ \nabla_{y} C(W,Y)} \tag{4}$$

(ver apéndice para demostración del caso escalar).

Es sabido que, en el caso escalar, la existencia de economías de escala ($S > 1$) generan costos medios decrecientes y monopolio natural. Esto deja de ser cierto en el caso de multiproducción, ya que las economías de escala sólo se refieren a variaciones proporcionales de los componentes de Y, pero nada indican acerca de la conveniencia (o inconveniencia) de producir el conjunto de bienes incluidos en Y en forma simultánea por una sola empresa.

Se dice que una función de costos es subaditiva en Y si (suprimiendo la notación de W)

$$C(Y) < \sum_{i=1}^{k} C(Y^{i}), \quad \forall\ Y^1, Y^2, \ldots Y^k / \sum_{i=1}^{k} Y^{i} = Y. \tag{5}$$

En otras palabras C(Y) es subaditiva si no existe combinación posible de empresas que, produciendo Y en conjunto, lo hagan más barato que una empresa. Esta no es sino la vieja idea del monopolio natural, donde el "producir más" presenta ventajas para una sola firma desde el punto de vista de costos exclusivamente. En monoproducción, "producir más" es una expresión con sólo una posible interpretación : aumentar el nivel de producción. Pero, y éste es un punto de quiebre, hay dos formas de producir más en multiproducción : mediante un aumento en la producción de cada bien, o agregando nuevos bienes a la línea de producción.

Como respuesta a esta última posibilidad, nace el concepto de economías de diversidad (economies of scope, Panzar y Willig, 1975), que, en estricto rigor, se dice que existen si el costo de producir Y es menor que la suma de costos asociados a una partición ortogonal de Y. Se define el grado de economías de diversidad de un subconjunto R de productos con respecto a su complemento M-R como

$$ED_R(Y) = \frac{1}{C(Y)} \left[C(Y_R) + C(Y_{M-R}) - C(Y)\right] \quad , \tag{6}$$

donde Y_R es un vector con componentes y_i nulas, $\forall\ i \notin R$, y de componentes y_j al mismo nivel que en Y, $\forall\ j \in R$. En el caso bidimensional

$$ED_1(Y) = ED_2(Y) = \frac{1}{C(Y)} \left[C(y_1,0) + C(0,y_2) - C(Y)\right]. \tag{7}$$

Luego, ED_R será positivo si el costo de producir el conjunto M de productos con una empresa es menor que el de producirlo a partir de los subconjuntos R y M-R por separado. Es fácil ver que ED está acotado inferiormente en -1.

¿Qué relación existe entre escala y diversidad? Para establecerla se hace necesario extender el concepto de grado de economías de escala a subconjuntos de M, los que eventualmente pueden tener un elemento. Se define el costo incremental de un subconjunto R de M, como

$$CI_R(Y) = C(Y) - C(Y_{M-R}) \quad , \tag{8}$$

es decir, es el costo de añadir los elementos de R a la línea de producción. El grado de economía de escala específico de R es

$$S_R(Y) = \frac{CI_R(Y)}{\sum_{i \in R} y_i \frac{\partial C}{\partial y_i}} \quad , \tag{9}$$

de forma tal que (4) es un caso particular de (9).

Si no existiesen economías ni deseconomías de diversidad, ED_R valdría 0 y el costo de producir todo sería igual a la suma de los costos de producir partes. En este caso

$$CI_R(Y) = C(Y_R) = \left(\sum_{i \in R} y_i \frac{\partial C}{\partial y_i}\right) S_R \quad , \tag{10}$$

$$\therefore \qquad C(Y) = \left(\sum_{i \in R} y_i \frac{\partial C}{\partial y_i}\right) S_R + \left(\sum_{i \in (M-R)} y_i \frac{\partial C}{\partial y_i}\right) S_{M-R} \; , \tag{11}$$

$$\therefore \qquad S = \frac{C(Y)}{\sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial C}{\partial y_i}} = \alpha_R\, S_R + (1 - \alpha_R)\, S_{M-R} \quad , \tag{12}$$

donde α_R (obviamente definido) es menor que 1 y positivo. Luego, si $ED_R = 0$ el grado global de economías de escala sería una suma ponderada de los grados específicos S_R y S_{M-R}. Puede demostrarse en forma similar que, en general,

$$S = \frac{\alpha_R \; S_R + (1 - \alpha_R) \; S_{M-R}}{1 - ED_R} \qquad (13)$$

La ecuación 13 indica que las economías de escala a nivel del conjunto de productos, resultan magnificadas con respecto a las de subconjuntos si existen economías de diversidad. La intuición trás la ecuación 13 es sencilla : las eventuales ventajas de expandir la producción son mayores si además se combinan procesos cuyo costo conjunto es menor.

Es entonces evidente que el análisis de subaditividad (monopolio natural) requiere el estudio de escala y diversidad, es decir, del estudio del efecto sobre los costos tanto de expansiones proporcionales del vector de productos como de variaciones en la composición del mismo.

Una medida local de este último tipo de efectos es la segunda derivada de la función de costo con respecto a dos componentes del vector $\dot{Y}$, $\partial^2 C/\partial y_i \partial y_j$, o simplemente C_{ij}. Si C_{ij} es negativo, se dice que existe complementaridad de costos entre y_i e y_j, e indica que de alguna manera el aumento en la producción de cualquiera de estos bienes favorece la del otro ya que hace disminuir su costo marginal de producción. Naturalmente, la complementaridad de costos favorece la existencia de economías de diversidad.

Aunque no se han desarrollado condiciones necesarias y suficientes para subaditividad, se han establecido algunas que aseguran su existencia (Baumol, 1977). Sin entrar en detalles analíticos, las condiciones suficientes aseguran las ventajas tanto de expandir como de combinar. En la Figura 1 se muestran funciones subaditivas de costo; nótese que ambas presentan "costos medios" decrecientes en sentido radial (líneas en el plano (y_1,y_2) por el origen), y no convexas en sentido trans-radial.

3. Análisis microeconómico de sistemas de transporte.

Una definición estricta del producto de una firma de transporte (Jara-Diaz, 1982,b) establece que

$$Y = \{ \; y_{ij}^{kt} \; \} \quad , \qquad (14)$$

donde y_{ij}^{kt} es el flujo del bien k, en el período t, entre el origen i y el destino j, en unidades de k por unidad de tiempo. La única dimensión que ha sido usada, si bien en forma limitada, para distinguir tipos de flujo en un contexto de multiproducción, es el tipo de bien k; tanto Hasenkamp (1976) como Keeler (1974) distinguen pasajeros-milla de toneladas-milla en sus estudios sobre transporte ferroviario. En nuestra discusión enfatizaremos la dimensión espacial, haciendo mención explícita de flujos entre distintos pares origen-destino.

En este contexto, el análisis de economías de escala a través de una función de costo y utilizando una correcta especificación del producto, es

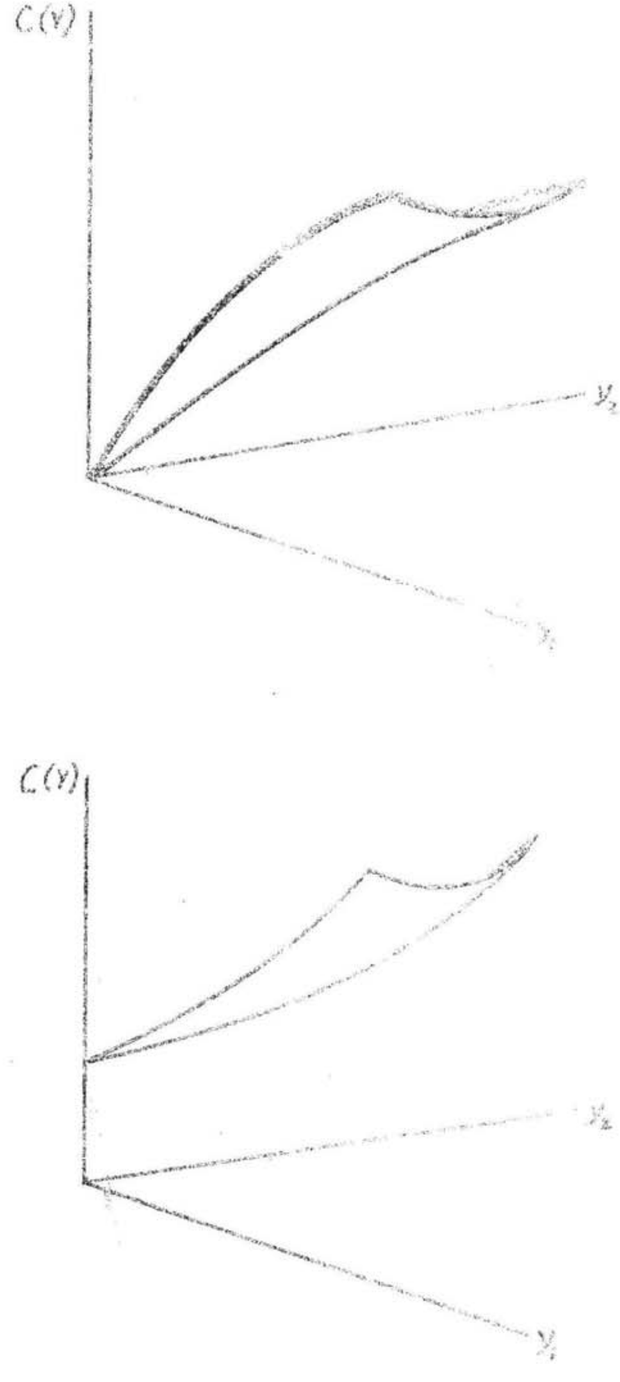

Figura 1 : Funciones subaditivas de costo.

capaz de detectar exclusivamente el comportamiento del costo ante expansiones proporcionales de los flujos en todos los pares origen-destino servidos por el sistema de transporte estudiado. Tal análisis no tiene relación alguna con la variación de costo por ton-kilómetro que se encuentra usualmente en los trabajos y textos sobre economía de transporte.*

Por otra parte, el análisis de economías de diversidad indicará la conveniencia o inconveniencia para una firma de servir conjuntamente varios pares origen-destino. Un ejemplo evidente de economías de diversidad se encuentra en sistemas con carga de retorno, ya que si un sistema opera en un sentido, normalmente generará capacidad de transporte en el sentido opuesto; la operación de dos firmas será normalmente más onerosa que la de una. Las eventuales economías de diversidad en sistemas que sirven redes origen-destino más complejas, son normalmente difíciles de intuir.

Las fuentes de economías de escala en sistemas de transporte han sido fruto de estudio durante largo tiempo y no serán discutidas aquí. Baste mencionar la frecuente conveniencia en costos de generar sistemas de transporte masivo de pasajeros, de operación programada y conocida, o la tendencia a aumentar el tamaño de las aeronaves. El costo fijo de infraestructura de vías y terminales genera también este tipo de economías. Las fuentes de economías de diversidad tienen algunos aspectos comunes con las de economías de escala, en algunos casos. La existencia de capacidad ociosa en vehículos en movimiento, por ejemplo, puede generar ambos tipos de economías. Algo similar ocurre con la capacidad de terminales, ya que operaciones terminales de un mismo tipo pueden presentar economías de escala y ser generadoras de economías de diversidad; por ejemplo, el aumento del volumen de carga puede disminuir los costos medios de carga en un terminal, y este mismo fenómeno puede ser fuente de ventajas en la generación conjunta de flujos en distintas direcciones pero que parten del mismo punto. El servicio de destinos intermedios entre dos puntos ya servidos, es también frecuentemente ventajoso para la producción de flujos múltiples.

En resumen, la fuente básica de economías de escala en transporte parece ser el aprovechamiento de la capacidad de vías, vehículos y/o terminales. Si bien estos mismos elementos promueven la existencia de economías de diversidad, éstas parecen ser particularmente favorecidas por características operativas ligadas al diseño de rutas (recorridos) adecuados, tamaños de flota, frecuencias, etc.; en general, por toda forma de operar el sistema que incorpore las ventajas de posibles "flujos complementarios" en el sentido de costos ($C_{ij} < 0$).

Cabe aquí preguntarse por el efecto que tendría sobre el análisis de costo la no consideración de posibles economías de diversidad, al tratar el producto de transporte en forma agregada, e.g. ton-km. Si existiesen economías de diversidad entre conjuntos de flujos, la producción conjunta de ellos generaría un costo total menor que la suma de los costos asociados a la producción de cada conjunto por separado.

* Una revisión de la estimación de funciones de costo de transporte puede encontrarse en Jara-Díaz (1982, a).

La asociación entre costos y la suma directa o ponderada por distancia de dichos flujos, tenderá entonces a aparecer "mostrando" costos medios decrecientes, aunque el proceso fuese de retornos contantes en realidad; tal tendencia se debería entonces exclusivamente a las ventajas de combinar flujos, a las que sólo les es permitido aparecer como efectos de "escala".

A modo de ejemplo, mostraremos a continuación el análisis multiproducto de un sistema de transporte de carga que opera a nivel nacional. No interesa en este trabajo describir la metodología de estimación de la función de costos; baste señalar para aquellos interesados en las técnicas econométricas y la teoría microeconómica, que se estimó una función cuadrática de costos en forma conjunta con dos ecuaciones derivadas (demandas por combustible y lubricante) para ganar eficiencia en los parámetros, usando una serie de tiempo. El vector de flujos se agregó a 4 componentes.

El sistema terrestre analizado mueve carga general desde Santiago a todo el país. Los flujos se agruparon en cuatro zonas de destino : Norte, Central, Sur y Austral. Para tener una imagen de los volúmenes agregados de carga hacia cada zona, y de las distancias medias involucradas, la Tabla 1 contiene dicha información para un mes típico de operación. La Tabla 2 muestra los costos marginales C_i y las segundas derivadas C_{ij}.

La Tabla 2 puede usarse para extraer interesantes conclusiones. Se observará que los costos marginales, si bien son crecientes con la distancia media a la zona de destino, no tienen relación sistemática con ella. El elevado costo marginal relativo a la zona Austral es razonable dado el bajo flujo asociado y el tipo de topografía a cubrir; m_N y m_A son, sin embargo, comparables dentro de cierto rango. Lo aparentemente extraño son los bajos costos marginales m_C y m_S; en realidad es en estos valores donde el sistema origen-destino parece jugar un rol decisivo, ya que el costo de mover 1 Kg. adicional a zonas intermedias resulta ser claramente menor que el que se obtendría de operar sólo hacia esas zonas.

Esta observación es avalada por los valore C_{ij}, ya que estos indican complementaridad de costos entre todos los pares de flujos salvo entre los flujos al Norte y al Sur. Estos valores indican, entre otras cosas, que es (localmente) conveniente servir en forma conjunta el Centro y el Sur o el Sur y zona Central; también parecen sugerir la conveniencia de especializarse en largas distancias (C_{NA} es el valor más negativo).

Tabla 1. Flujos y distancias medias

De Santiago a	Flujo (tons)	Distancia media (cm)
N	674	1494
C	327	192
S	722	649
A	70	2067

Fuente : Jara-Díaz (1984)

Tabla 2. Costos marginales ($/Kg) y C_{ij} ($/Kg^2)

Variable	Valor	Variable	Valor
m_N	13	C_{NC}	$-0,28 \times 10^{-4}$
m_C	0	C_{NS}	$1,08 \times 10^{-4}$
m_S	1	C_{NA}	$-1,02 \times 10^{-4}$
m_A	49	C_{CS}	$-0,36 \times 10^{-4}$
		C_{CA}	$-0,06 \times 10^{-4}$
		C_{SA}	$-0,37 \times 10^{-4}$

Fuente : Jara-Díaz (1984)

Y = (yN, [illegible], yC, [illegible])
Y1 = (yN, 0, 0, 0) ⇒ C(Y1) =
Y2 = (0, [illegible])

Tabla 3. Grado de economías de escala y diversidad.

Variable	Valor
S	1,13
ED_1	$-0,23$
ED_2	3,70 ⇒ 4
ED_3	$-0,26$
ED_4	3,14
ED_{12}	$-0,04$
ED_{13}	4,15
ED_{14}	$-0,43$

ED: $\frac{C(Y1) - C(Y2) - [illegible]}{C(Y)} < 0$ ⇒ C(Y1) − C(Y2) < C(Y)

C(Y2) − C(Y3) > C(Y)

La información hasta aquí analizada, si bien contribuye a entender el sistema en estudio, no es suficiente para pronunciarse acerca de la forma más adecuada de servir el mercado nacional. Los grados de economías de escala y diversidad (Tabla 3) contribuyen a aclarar bastante el problema. Se observa que el sistema opera prácticamente bajo retornos constantes a escala. ¿ Debemos sugerir entonces un sistema competitivo ? Antes de pronunciarnos estudiemos los valores de ED. Tales valores deben interpretarse cuidadosamente; un valor negativo de ED_R indica que, si las alternativas son producir los cuatro flujos en conjunto o en forma separada R y su complemento, debe preferirse ésta última. Si ED_R es positivo se preferirá la producción conjunta. Una forma distinta pero igualmente válida de interpretar el signo negativo de ED_R, es la de establecer que si R está siendo producido, entonces su complemento será producido en forma menos costosa por otra (u otras) firma (s). En este sentido, los resultados indican, entre otras cosas, que :

i) si una firma está operando a largas distancias (extremos), no debe servir además el resto del país ($ED_{14} < 0$)

ii) si una firma está operando hacia las zonas Norte y Centro, no debe servir además las zonas Sur y Austral ($ED_{12} < 0$)

iii) si una firma opera hacia el Norte, no debería operar además hacia el resto del país ($ED_1 < 0$).

Esto tiende a indicar la conveniencia de aislar el flujo al norte, lo que no ocurre con ningún otro flujo. Tal idea se ve reforzada por $C_{NS} > 0$. Debemos enfatizar, sin embargo, que complementaridad de costos y economías de diversidad son cosas distintas aunque relacionadas. Lo primero se refiere a pares de flujos, mientras que éstas últimas involucran al conjunto completo de flujos.

Es conveniente señalar que el grado específico de economías de escala para el flujo hacia el Norte es de 1.59, en tanto que para el resto del país es de 0.96. Todo lo anterior más este antecedente sugieren la conveniencia de servir el territorio nacional operando una empresa hacia el Norte y estimulando la competencia en servicios desde Santiago al resto del país, donde cada empresa debería servir todos los pares O-D restantes (Santiago - Centro, Sur y Austral). Sin embargo, dos calificaciones son necesarias frente a tales conclusiones : en primer lugar, la función de costos analizada se refiere sólo a costos de operación privados, sin incluir parte del capital ni las externalidades (por ejemplo, congestión); segundo, el rango de validez está sugerido por los valores de la Tabla 1. Además, si se toma en cuenta que el sistema observado no operó nunca con flujos nulos, se entenderá que los valores de S, m_i y C_{ij} son mucho más confiables que los de ED_R, ya que éstos requieren llevar (analíticamente) flujos a cero.

Por último, es interesante mencionar que la estimación de S usando el producto totalmente agregado (ton-Km. totales al mes), resultó ser de 2,41, indicando claras economías de escala. Estas, a su vez, hubiesen sugerido la existencia de monopolio natural y la imperiosa necesidad de regular. Una discusión detallada de la estimación de la función de costos aquí usada y de sus resultados, se encuentra en Jara-Díaz (1984).

4. Conclusiones.

La naturaleza vectorial del producto de una firma de transporte, hace de la nueva teoría de multiproducción el marco adecuado para el análisis económico de tal actividad. Bajo este enfoque es posible estudiar adecuadamente elementos tradicionales como costos marginales y economías de escala, e incorporar al análisis aspectos nuevos y enriquecedores, como complementaridad de costos y economías de diversidad.

Bajo el nuevo enfoque vectorial, el análisis de escala apunta hacia el estudio del comportamiento de costos ante variaciones proporcionales de los flujos generados por una firma, en tanto que el análisis de diversidad incorpora ventajas o desventajas de la producción conjunta de flujos entre diversos pares origen-destino.

La teoría y la experiencia muestran que no es posible soslayar el caracter vectorial del producto de transporte, sin el riesgo cierto de distorsionar seriamente los análisis de costos y estructura industrial. En particular el uso de medidas totalmente agregadas del producto confunden el estudio de escala al incorporar efectos diversos, entre ellos eventuales economías de diversidad. El planteamiento adecuado de las funciones de costo de transporte, permite estimarlas en forma correcta y analizarlas con reales posibilidades de establecer políticas sectoriales sensibles a las características tecnológicas y económicas de los sistemas de transporte.

Apéndice. Economías de escala en monoproducción.

Sea $Y=f(x)$ la función de producción. Entonces el grado de economías de escala queda definido por

$$\lambda^S Y = f(\lambda X) \qquad \text{(a)}$$

El costo de producir Y es

$$C(W,Y) = WX' \qquad \text{(b)}$$

y el de producir $\lambda^S Y$ es

$$C(W,\lambda^S Y) = \lambda WX' \qquad \text{(c)}$$

por virtud de la ec. a. Luego, es siempre cierto que

$$C(W,\lambda^S Y) = \lambda C(W,Y) \quad . \qquad \text{(d)}$$

Diferenciando con respecto a Y

$$\frac{\partial C(W,\lambda^S Y)}{\partial(\lambda^S Y)} \cdot \frac{\partial(\lambda^S Y)}{\partial Y} = \lambda \; \frac{\partial C(W,Y)}{\partial Y} \quad , \text{ o}$$

$$\frac{\partial C(W,\lambda^S Y)}{\partial(\lambda^S Y)} = \lambda^{1-S} \frac{\partial C(W,Y)}{\partial Y} \quad . \tag{e}$$

Diferenciando la ec. d con respecto a λ,

$$\frac{\partial C(W,\lambda^S Y)}{\partial(\lambda^S Y)} \cdot \frac{\partial(\lambda^S Y)}{\partial\lambda} = C(W,Y) \tag{f}$$

Reemplazando (e) en (f)

$$\lambda^{1-S} \frac{\partial C(W,Y)}{\partial Y} \cdot S\, \lambda^{S-1} Y = C(W,Y) \quad . \tag{g}$$

Despejando S

$$S = \frac{C(W,Y)}{Y \dfrac{\partial C(W,Y)}{\partial Y}} = \frac{CM_e}{CM_g} \quad . \tag{h}$$

(Agradezco a E. Cannobio una sugerencia que prestó elegancia a esta demostración).

Referencias.

W.J. Baumol (1977),On the proper cost tests for natural monopoly in a multiproduct industry. Amer. Econ. Rev. 67, 809-822.

G. Hasenkamp (1976),A study of multiple-output production functions, Klein's railroad study revisited. J. Econometrics 4, 253-262.

S.R. Jara-Díaz (1982 a), The estimation of transport cost functions : a methodological review. Transport Rev. 2, 257-278.

S.R. Jara-Díaz (1982 b), Transportation product, transportation function and cost functions. Transpn. Sci. 16, 522-539.

S.R. Jara-Díaz (1984), Multioutput cost functions for trucking operations using spatially dissaggregated flows. No publicado aún.

T. Keeler (1974), Railroad costs, returns to scale and excess capacity. Rev. Econ. Statistics 56, 201-208.

J. Panzar y R. Willig (1975, Economies of scale and economies of scope in multi-output production. Economic Discussion Paper No.33. Bell Laboratories.

J. Panzar y R. Willig (1977), Economies of scale in multioutput production. Quarterly J. Econ. 91, 431-493.