

REPLANTEAMIENTO DEL MODELO DE DISPERSION DE TRAFICO DE ROBERTSON *

Jaime Gibson

y José F. Aguirre

Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile

Casilla 5373, Santiago, Chile

R E S U M E N

En la simulación de redes viales urbanas, la circulación en los arcos suele representarse mediante el proceso de dispersión. En los últimos años, tal vez por estar incorporado al programa TRANSYT, el modelo más popular de este proceso ha sido el de Robertson (incluyendo la versión especial para buses, desarrollada con Vincent). Estos modelos fueron propuestos sobre una base aparentemente empírica y, posteriormente, otros autores exploraron su fundamento teórico.

En este trabajo se presenta una completa revisión del modelo y su teoría. Se demuestra que éste deriva de una distribución cuasigeométrica de los tiempos de viaje, suponiendo un cierto valor para la cota superior de ésta, que queda implícito. Se prueba también que la fórmula de Robertson para el factor de dispersión es inconsistente y se propone una aproximación. Esta, en conjunto con la ecuación recursiva de Robertson, predice con una precisión comparable a la del modelo más general pero de forma más sencilla computacionalmente y con menos parámetros.

Los parámetros del modelo son reinterpretados y se proponen métodos para su calibración. Finalmente, se dan recomendaciones prácticas para el mejor uso del programa TRANSYT.

* Esta investigación ha sido financiada parcialmente con un subsidio del Fondo Nacional de Desarrollo Tecnológico, Proyecto 573-82.

1. Introducción

En la simulación de redes de tránsito urbano, el uso de un modelo de dispersión - para relacionar las salidas de los vehículos desde un nodo con las llegadas al siguiente - es una práctica bien establecida. Tal vez su aplicación más relevante es la optimización de la coordinación de redes de semáforos. Es seguramente por eso que el modelo más difundido es el de Robertson (1967; 1969) quien lo introdujo en el método TRANSYT, ampliamente utilizado en el mundo para optimizar planes de tiempos prefijados.

Robertson formuló su modelo sobre bases empíricas. Posteriormente, Seddon (1972 b, c) exploró las bases teóricas, encontrando que se suponía una distribución geométrica de los tiempos de viaje. Robertson y Vincent (1975) propusieron un modelo análogo, específico para buses.

Por otra parte, estos y otros investigadores han dedicado esfuerzos a calibrar los parámetros del modelo, obteniendo no pocas veces resultados significativamente diferentes. Sin embargo, en la práctica profesional no se ha prestado mayor atención a este aspecto. Es así que en la mayoría de las múltiples aplicaciones del TRANSYT se ha recurrido sencillamente a los valores obtenidos por Robertson, que están incorporados al programa computacional. No hay estudios publicados en relación al efecto sobre la calidad de la simulación derivado del uso de valores inadecuados para los parámetros de dispersión aunque de las experiencias de calibración conocidas puede desprenderse que dicho efecto sería significativo.

La creciente implantación de sistemas de control de área de tránsito en todo el mundo, frecuentemente programados con ayuda del TRANSYT, confiere relevancia práctica inmediata a la aclaración de los problemas señalados.

2. Trabajos Previos

El modelo de dispersión de Robertson (1967; 1969) permite predecir el histograma de pasadas por una sección de una vía a partir del histograma, conocido, en otra sección situada aguas arriba. Su formulación es:

$$q_2(i+T) = F q_1(i) + (1-F) q_2(i+T-1) \quad (1)$$

$$T = [\beta \bar{t} + 0.5] , \text{ con } 0 \leq \beta \leq 1 \quad (2)$$

$$F = \frac{1}{1 + K\beta\bar{t}} , \text{ con } 0 \leq K \leq 1 \quad (3)$$

donde:

$q_1(i)$ = flujo (conocido) en la sección 1, en el intervalo i

$q_2(i)$ = flujo (predicho) en la sección 2, en el intervalo i

\bar{t} = tiempo medio de viaje de los vehículos entre las secciones 1 y 2, medido en intervalos.

$[\]$ = función "mayor entero contenido en"

K, β = parámetros

Obviamente, ambos histogramas están sobre una base de tiempo común de modo que T representa el desplazamiento temporal (en intervalos) de la cabeza del pelotón en el segundo histograma con respecto al primero. Nótese que T debe ser un entero, F es denominado factor de dispersión y debe cumplirse que $0 \leq F \leq 1$. Está implícito en la formulación que el flujo se conserva entre ambas secciones.

Si $i = 1, 2, \dots, n$:

$$q_p(i) = q_p(i + n) \quad , \forall p \quad (4)$$

Así se impone el carácter cíclico del fenómeno, adecuado para el tratamiento de vías semaforizadas. La duración de un ciclo se hace igual a la del ciclo del semáforo con lo que cada intervalo es de longitud c/n , siendo c el tiempo de ciclo del semáforo.

Robertson y Vincent (1975) plantearon una forma especial de las ecs. (2) y (3) para buses:

$$T = [\gamma \bar{b} + \sigma \bar{t} + 0.5] \quad , \quad 0 \leq (\gamma, \sigma) \leq 1 \quad (5)$$

$$F = \frac{1}{1 + (1 - \gamma) \bar{b} + (1 - \sigma) \bar{t}} \quad (6)$$

donde:

\bar{b} = tiempo medio de parada, en intervalos

\bar{t} = tiempo medio en movimiento, en intervalos

γ, σ = parámetros.

Los mismos autores proponen fórmulas para el cálculo de \bar{t} a partir de la longitud del tramo y de la velocidad media, que incorporan el efecto de aceleración y deceleración originado por la parada.

Obsérvese que en este caso, los parámetros de \bar{t} y T son los mismos, lo que no sucede en el modelo general.

Seddon (1972 c) demostró que la ec. (1) puede escribirse como:

$$q_2(i) = \sum_{j=1}^{i-T} q_1(j) F(1-F)^{i-j-T} \quad (7)$$

De aquí dedujo que el modelo de Robertson supone una distribución geométrica de los tiempos de viaje, dada por:

$$P(t=k) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k < T \\ F(1-F)^{k-T} & , \text{ si } k \geq T \end{cases}$$

Demostro también que esta distribución, sin imponer cota máxima a k , conduce a:

$$F = \frac{1}{1 + \bar{t} - T} \quad (8)$$

Esta ecuación difiere de la (3) ya que T es función de un solo parámetro. No obstante, Seddon se limitó a consignar su demostración y en la parte experimental de su investigación continuó usando la expresión (3), con dos parámetros. Lo más interesante de su trabajo es que estableció que el modelo de Robertson, planteado empíricamente, tenía un fundamento teórico bastante sólido, en particular que la ligazón de F y \bar{t} no era arbitraria.

Lam (1977) observó que la predicción del primer intervalo, si se hace suponiendo que el flujo en el intervalo anterior es nulo, podría ocasionar problemas en la conservación del flujo. Buscando una forma correcta de hacerla, transformó la ec. (1) en una que puede escribirse:

$$q_2(i) = \sum_{j=i-T-n+1}^{i-T} q_1(j) \frac{F(1-F)^{i-j-T}}{1 - (1-F)^n} \quad (9)$$

Usando la interpretación de Seddon, resulta que la distribución implícita - según Lam - de los tiempos de viajes es:

$$P(t=k) = \begin{cases} 0, & \text{ si } k < T \\ \frac{F(1-F)^{k-T}}{1-(1-F)^n} & \text{ si } k \geq T \end{cases} \quad (10)$$

Llama la atención que las ecs. (7) y (9), ambas correctamente derivadas de la (1), no sean iguales. Esto se explica porque Seddon no consideró un contexto genuinamente cíclico; la suma de (7) tiene un número de términos que varía con i , no así la de (9). Esto se traduce en que la fórmula de Seddon trunca artificialmente la distribución de tiempos de viaje si se aplica a fenómenos cíclicos.

Tiene entonces más interés para nuestro propósito la distribución de Lam, quien curiosamente no advirtió que estaba implícita en su fórmula para predecir el primer intervalo. Para que se conserve el flujo, bajo su hipótesis de que no hay cota superior, debe cumplirse:

$$\sum_{t=0}^{\infty} P(t) = 1 \quad (11)$$

Pero,

$$\sum_{t=T}^{\infty} \frac{F(1-F)^{t-T}}{1-(1-F)^n} = \frac{1}{1-(1-F)^n} > 1$$

La solución a esta contradicción sólo puede ser que existe una cota superior finita al tiempo de viaje.

En suma, la teoría hasta ahora aceptada presenta deficiencias y vacíos, que se abordan en la sección siguiente.

3. El Modelo de Dispersión

Situándose en un contexto cíclico notemos que un vehículo que sale de la sección 1 en el intervalo i y demora $j-i$ intervalos en llegar a la sección 2, aparecerá en el intervalo j del segundo histograma, pero lo mismo ocurrirá con otro vehículo que demore $j-i+n$ ó $j-i+2n$. Luego, suponiendo que el tiempo mínimo de viaje entre ambas secciones es T intervalos, es tauológico que:

$$q_2(i) = \sum_{j=i-T-n+1}^{i-T} \sum_{\epsilon=0}^{\infty} q_1(j) P(t=i-j+\epsilon n) \quad (12)$$

Ahora bien, impongamos un tiempo máximo de viaje, denotado por M . Teniendo en cuenta que T, M y \bar{t} dependen de la distancia que separa a las secciones correspondientes, les asociaremos un subíndice x .

En nuestro contexto cíclico, conviene escribir M_x de la forma:

$$M_x = m_x n + p + T_x \quad (13)$$

con m_x y p enteros y $0 \leq p \leq n-1$

y donde:

$$m_x = \left[\frac{M_x - T_x}{n} \right] \quad (14)$$

$$p = M_x - m_x n - T_x \quad (15)$$

Si se conocen los tiempos de viaje mínimo y máximo en segundos, su transformación a intervalos está dada por:

$$T_x = \left[\frac{n t_{\min}(\text{seg})}{C} + 0.5 \right] \quad (16)$$

$$M_x = \left[\frac{n t_{\max}(\text{seg})}{C} + 0.5 \right] \quad (17)$$

Sea la siguiente función de densidad de probabilidad de los tiempos de viaje:

$$P(t_x = k + \varepsilon n) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } t_x < T_x \\ \frac{F(1-F)^{k+\varepsilon n-T_x}}{1-(1-F)^{m_x n+p+1}} & , \text{ si } T_x \leq t_x \leq M_x \\ 0 & , \text{ si } t_x > M_x \end{cases} \quad (18)$$

Se define $0 < F < 1^{(*)}$. De lo anterior, se sigue que $0 \leq \varepsilon \leq m_x$ y que $T_x \leq k \leq T_x + n - 1$.

Se puede demostrar (Gibson y Aguirre, 1984) que esta distribución satisface la condición: $\sum_{t=T_x}^{M_x} P(t) = 1$. Como la de Lam, es cuasi-geométrica ya que

el valor $F/[1-(1-F)^{m_x n+p+1}]$ no difiere mucho de F . Las distribuciones de Seddon y Lam son casos particulares de ésta dados por $m_x = \infty$ y por $m_x = 0$ y $p=n-1$, respectivamente.

De esta distribución se puede deducir la ecuación recursiva de predicción y la relación entre F y t . Para lo primero, se introduce (18) en (12) y queda:

$$q_2(i) = \sum_{j=i-T_x-n+1}^{i-T_x} q_1(j) \frac{F(1-F)^{i-j+\varepsilon n-T_x}}{1-(1-F)^{m_x n+p+1}} + \sum_{j=i-T_x-p}^{i-T_x} q_1(j) \frac{F(1-F)^{i-j+m_x n-T_x}}{1-(1-F)^{m_x n+p+1}} \quad (19)$$

Gibson y Aguirre (1984) demostraron que conduce a:

$$q_2(i+T_x) = \frac{F[q_1(i) - (1-F)^{m_x n+p+1} q_1(i-p-1)]}{1-(1-F)^{m_x n+p+1}} + (1-F) q_2(i+T_x-1) \quad (20)$$

Esta ecuación recursiva sólo se reduce a la de Robertson si $m_x = \infty$ (caso de Seddon) o si $p = n-1, \forall m_x$. Este último caso es menos restrictivo que el su puesto por Lam, que impone además $m_x = 0$.

Es decir, la ecuación recursiva de Robertson es un caso particular pero menos restrictivo que lo que las deducciones de Seddon y Lam hacían pensar. Se confirma que ella supone una cota superior no necesariamente infinita al tiempo de viaje, que queda implícita. Para Lam, ella es $M_x = n+T_x-1$ que, a su vez, es el menor del conjunto de valores compatibles con la ecuación de Robertson.

* Gibson y Aguirre (1984) demuestran que las conclusiones del análisis que sigue son válidas para los casos $F=0$ y $F=1$, que representan situaciones de to tal y nula dispersión, respectivamente.

Estudiemos ahora la relación entre F y \bar{t} . Por definición:

$$\bar{t}_x = \sum_{k=T_x}^M k P(x = k) \quad (21)$$

Se puede demostrar (Gibson y Aguirre, 1984) que esta condición conduce a:

$$F = \frac{1}{1 + \bar{t}_x - T_x + \frac{M_x - T_x + 1}{(1-F)^{-(M_x - T_x + 1)} - 1}} \quad (22)$$

Esta expresión equivale a un polinomio en $(1-F)$ de grado $(M_x - T_x + 2)$, que será normalmente superior a 4 - y habrá que recurrir a métodos numéricos para encontrar F .

Si comparamos la ec. (22) con la de Robertson (ec.3) y la de Seddon (ec. 8), podemos ver que la última corresponde al caso $M_x = \infty$, como es lógico, y que la primera presenta una forma similar pero dudosamente compatible. En efecto, con las definiciones de Robertson y haciendo:

$$\beta \bar{t}_x = T_x + r \quad (23)$$

donde T_x es entero y $r \in [-0.5; 0.5)$, se llega a que:

$$K = \frac{1-\beta}{\beta} + \frac{r}{\beta \bar{t}_x} + \frac{1}{\beta \bar{t}_x} \frac{M_x - T_x + 1}{(1-F)^{-(M_x - T_x + 1)}} \quad (24)$$

Luego, el parámetro K de Robertson carece de sentido pues no corresponde a un grado de libertad y es dependiente de las condiciones de calibración.

El efecto de introducir en la ecuación recursiva un valor erróneo de F es que el tiempo medio de viaje resultante del histograma predicho es distinto del valor estimado a partir del cual éste se construye. En otro trabajo (Gibson y Aguirre, 1984) demostramos que esta diferencia puede ser considerable ($> 20\%$) si se utiliza para F el valor dado por la ec. (22). Ella tiene su origen en que, en la realidad, es poco probable que $p=n-1$. Cuanto menor sea p , mayor la diferencia. Pero Robertson usa una aproximación para F que, cuando $K=(1-\beta)/\beta$, hace que su tiempo medio predicho (\bar{t}_{xr}) sea:

$$\bar{t}_{xr} = \bar{t}_x - r - \frac{(m_x + 1)n}{\left(\frac{(1-\beta) \bar{t}_x}{1 + (1-\beta) \bar{t}_x} \right)^{-(m_x + 1)n} - 1} \quad (25)$$

El último término del lado derecho es muy pequeño en arcos normales, de modo que la diferencia es, en general, inferior a medio intervalo (en módulo). Resulta entonces que la aproximación para F corrige, casi exactamente, la desviación que introduce el supuesto sobre el tiempo máximo de viaje. Afortunada coincidencia, sin duda, que explica el notable éxito práctico del modelo de Robertson.

Como la magnitud del error depende de r, se logra una reproducción mejor de \bar{t}_x si se descarta el parámetro K y se hace:

$$F = \frac{1}{1 + \bar{t}_x - T_x} \quad (26)$$

Esta aproximación, en conjunto con la ecuación recursiva (1) conforman un modelo internamente consistente y que, salvo excepciones, produce resultados idénticos al modelo más general, dado por las ecs. (20) y (22), pero es computacionalmente mucho más sencillo. Además, tiene un parámetro menos: M_x , para el cual supone un valor. Este es, frecuentemente, bastante mayor que el real (como mínimo es $n+T-1$); no obstante, en la distribución cuasi-geométrica la probabilidad decrece rápidamente con el tiempo de viaje así que los tiempos en exceso del máximo real admitidos, tienen un peso escaso.

Se ha criticado repetidamente al modelo de Robertson que predice un flujo excesivo al final del pelotón ("cola"). Esto se explica en parte por lo apuntado sobre M_x . Pero hay que considerar también que esta observación deriva del contraste entre un histograma predicho con toda la distribución y otro obtenido de datos recogidos en una cierta cantidad de ciclos. Como los tiempos de viaje mayores son los menos probables, sólo si dicha cantidad es muy alta (lo que no es corriente) se puede discriminar la cola realmente excesiva. En nuestros experimentos, ésta es sumamente pequeña. Por lo tanto, es más importante la ventaja de no tener que predecir el parámetro M_x que la falta de realismo del supuesto acerca de su valor.

En suma, se recomienda continuar utilizando la ecuación recursiva de Robertson con la nueva expresión para F (ec. 26) y la fórmula de Lam para predecir el primer intervalo (ec. 9 con $i=1$).

Tras la corrección efectuada, la calidad predictiva de este modelo estará en función sólo del grado de ajuste entre la distribución real de los tiempos de viaje y la cuasi-geométrica supuesta. En otros estudios, especialmente los de Seddon (1972a) y Seddon y Dixon (1973), se encontró que la distribución real se asemeja a una normal transformada o a una Pearson tipo IV. Ellas difieren de la supuesta principalmente en que la moda de ésta es el tiempo mínimo de viaje, mientras que en las otras está entre este valor y el tiempo medio.

El ajuste de la distribución está regulado por el parámetro T_x . Si a éste se le da el sentido físico estricto de tiempo mínimo observado, el ajuste será peor que el que se obtiene permitiendo que T_x tenga un valor algo superior, estimándolo con algún criterio de bondad de ajuste.

Ahora bien, la distribución se supone válida a nivel de cada intervalo. En

los experimentos, y en la realidad, el flujo por intervalo es relativamente pequeño de modo que difícilmente se percibirán diferencias significativas entre distintas distribuciones que tengan, al menos, algunas propiedades básicas comunes. Desde un punto de vista práctico, entonces, el uso de la distribución cuasi-geométrica no representa una restricción de importancia.

4. La Estimación de los Parámetros

La discusión precedente indica que \bar{t}_x debe considerarse como una variable a medir y T_x como un parámetro a estimar. El factor de dispersión F es ahora sólo una variable instrumental, completamente determinada por las anteriores.

La medición de \bar{t}_x no presenta mayores dificultades, excepto en los arcos de buses con paradero, en que el efecto deceleración - aceleración es relevante. En Gibson y Aguirre (1984) se analizan las fórmulas propuestas por Robertson y Vincent para este caso, encontrándose que algunos valores tratados como constantes deberían parametrizarse y se propone un método sencillo para su estimación.

Para estimar T_x la práctica tradicional ha sido utilizar las fórmulas (2) y (6), que postulan funciones $T_x = f(\bar{t}_x)$, para tráfico general, y $T_x = g(\bar{b}_x, \bar{t}_x)$, para buses. Los parámetros de ellas se calibran buscando minimizar la suma de las diferencias al cuadrado entre histogramas predichos y observados. Diversas experiencias han coincidido en un valor 0.8 para β pero en todas ellas se ha estimado conjuntamente un valor, generalmente discrepante, para el parámetro arbitrario K . En cuanto a buses, hay sólo una experiencia publicada, la de Robertson y Vincent (1975).

La reformulación del modelo de dispersión tiene una consecuencia destacable sobre el problema de calibración; el método de comparación de histogramas descrito ahora sólo arroja un mejor valor de T_x , en cada caso. Las funciones T_x mencionadas no son cruciales al modelo; de hecho, ellas contienen hipótesis adicionales.

La primera es que existe una relación bien definida entre T_x y \bar{t}_x . Si T_x representara estrictamente el tiempo mínimo de viaje, el supuesto básico del modelo - i.e. que la velocidad de cada vehículo es constante en el tramo - daría fundamento a dicha relación. No siendo así, esta es una hipótesis a probar.

En segundo lugar, hay otros supuestos; por ejemplo, la ec. (2) implica que β es independiente de la longitud del tramo y, aún más, este parámetro ha sido tratado como constante universal.

La evidencia empírica disponible no avala firmemente ninguna de estas hipótesis. Se requiere un trabajo experimental intenso en este sentido para llegar a conclusiones sólidas. Sin duda, las funciones señaladas tienen el enorme atractivo de ligar T_x y \bar{t}_x de modo tal que, conocidos sus parámetros, basta entrar como único dato \bar{t}_x para predecir la dispersión del pelotón de vehículos.

Con el método expuesto es posible obtener en terreno pares (T_x, \bar{t}_x) o tríos $(T_x, \bar{b}_x, \bar{t}_x)$. Estos datos se pueden usar para estimar las funciones T_x y validar las hipótesis. Así, por ejemplo, tomando varias secciones a lo largo de una mis-

ma calle se puede estimar el modelo dado por la ec. (23) por regresión lineal, planteando:

$$T_x = -r + \beta \bar{t}_x \quad (27)$$

Si las hipótesis de forma funcional y de independencia de β con respecto a x son correctas, debería obtenerse que \hat{r} no difiere significativamente de 0 y buenos indicadores de calidad de ajuste, siempre que el número de observaciones sea suficiente. Luego, el mismo experimento puede repetirse en una vía de distintas características y docimar las hipótesis de igualdad de los estimadores de β . Además, es interesante estudiar si β , o los parámetros de $T_x = g(b, \bar{t}_x)$, depende del nivel de flujo.

El trabajo experimental que hemos desarrollado no permite aún extraer conclusiones al respecto. No obstante, ya está claro que hay mayor variabilidad en el caso de los buses.

5.- Recomendaciones

Los resultados presentados indican que, a pesar de que algunos de sus supuestos no reflejan fielmente la realidad, el modelo de Robertson reproduce, en general, adecuadamente el fenómeno de dispersión. La corrección que se le introduce no afecta su sencillez computacional y mejora su consistencia. Un estudio empírico más detallado (Gibson y Aguirre, 1984) revela que el modelo corregido se comporta notablemente bien al estimar demoras y detenciones, que son las variables que interesa calcular de los histogramas predichos. La Figura 1 muestra los histogramas predichos y observados en tres calles de Santiago.

Sin embargo, las fórmulas de Robertson y Vincent para estimar T_x a partir de los tiempos medios de viaje y de parada plantean todavía diversas interrogantes en torno a su validez. Es necesario investigar más sobre ellas, particularmente en lo que se refiere a buses.

En el terreno práctico, el programa TRANSYT debiera modificarse para incorporar la nueva fórmula para F y admitir que los parámetros de las funciones $T_x = f(\bar{t}_x)$ y $T_x = g(b, \bar{t}_x)$ y del cálculo de \bar{t}_x en arcos con paradero, puedan ser especificados por el usuario.

En la última versión del programa - TRANSYT-8 (Vincent, Mitchell y Robertson, 1980) - el único de los parámetros involucrados que se puede especificar es K , para arcos de tráfico general (el valor por defecto es 0.35). Esto permite manejar dichos arcos del modo propuesto. En efecto, haciendo:

$$0.3 K \bar{t}_x = \bar{t}_x - T_x$$

se obtiene que

$$K = 1.25 - \frac{[0.8 \bar{t}_x + 0.5]}{0.8 \bar{t}_x} \quad (28)$$

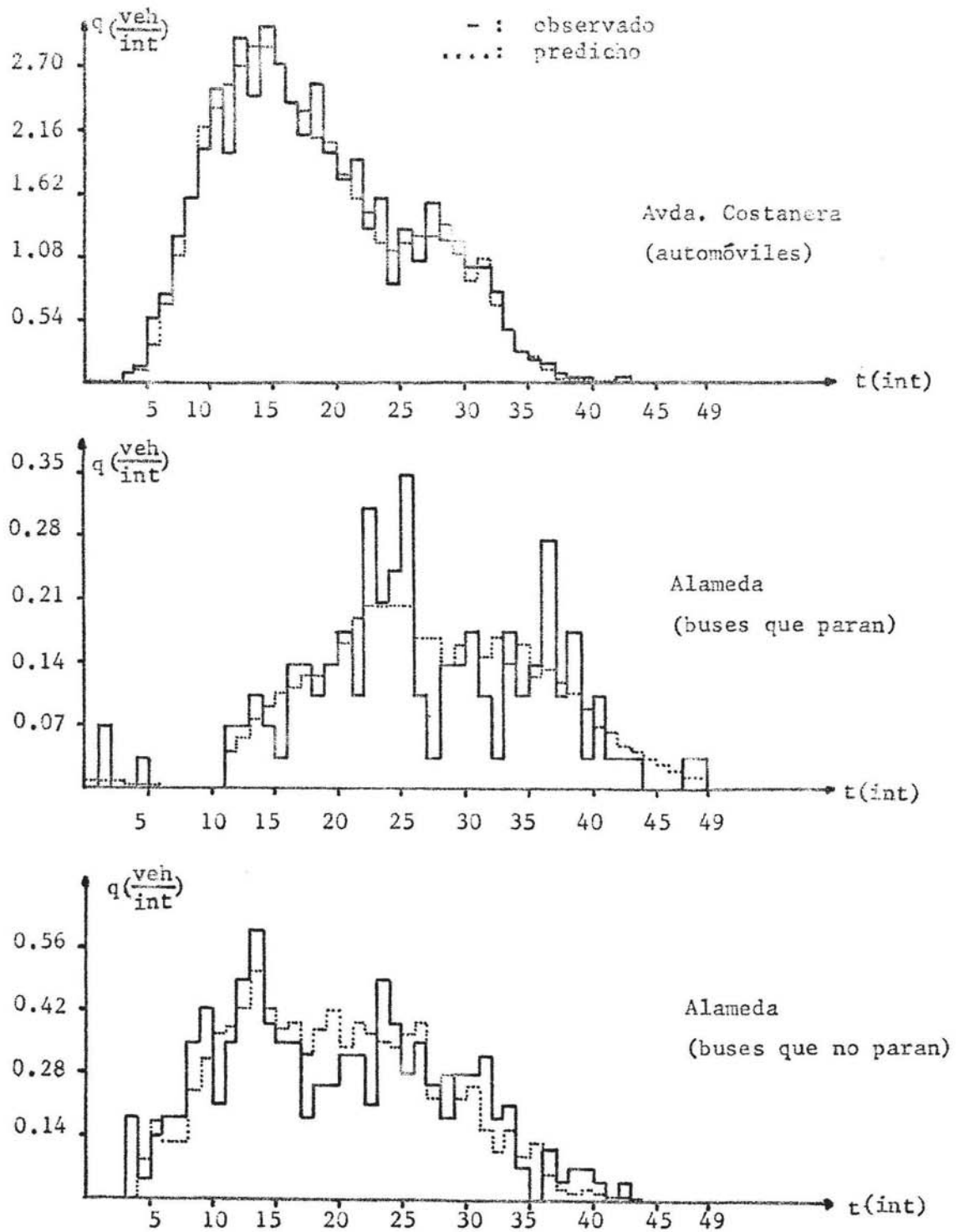


FIGURA 1. Mejor histograma predicho vs. el observado en tres experimentos.

Con este valor de K , el F resultante es el corregido. El hecho de que β esté prefijado en 0.8 no representa necesariamente una rigidez. El carácter entero de T_x hace que su valor sea compatible con un rango de valores de β . Si el verdadero β está comprendido por:

$$0.8 - \frac{r + 0.5}{\bar{t}_x} < \beta < 0.8 + \frac{0.5 - r}{\bar{t}_x} \quad (29)$$

donde:

$$r = 0.8 \bar{t}_x - T_x \quad \text{y } r \in [-0.5; 0.5)$$

el verdadero T_x no diferirá del que calcula actualmente el TRANSYT.

No es posible una corrección análoga en los arcos de buses sin modificar el programa y la entrada de datos.

Referencias

- Gibson, J. y J.F. Aguirre (1984). Sobre la correcta especificación y calibración del modelo de dispersión de Robertson. Depto. de Ingeniería Civil, U. de Chile, Pub. ST-INV/01/84.
- Lam, J.K. (1977). Studies of a platoon dispersion model and its practical implication. Proc. 7th Int. Symp. on Transp. and Traffic Theory, Kyoto, Japón, 119-144.
- Robertson, D.I. (1967). Contribution to discussion on Paper 11. Symp. on Area Control of Road Traffic, Institution of Civil Engineers, Londres, 140-141.
- Robertson, D.I. (1969). TRANSYT: a traffic network study tool. RRL Report LR 253, Crowthorne, Inglaterra.
- Robertson, D.I. y R.A. Vincent (1975). Bus priority in a network of fixed-time signals. TRRL Report LR 666, Crowthorne, Inglaterra.
- Seddon, P.A. (1972a,b). Another look at platoon dispersion: 2. The diffusion theory y 3. The recurrence relationship. Traff. Engng. Control, 13(9), 388-390, y 13(10), 442-444.
- Seddon, P.A. (1972c). The prediction of platoon dispersion in the combination methods of linking traffic signals. Transp. Res., 6, 125-130.
- Seddon, P.A. y M.L. Dixon (1973). The distribution of journey times for vehicles leaving traffic signals. Traff. Engng. Control, 15(7), 345-347.
- Vincent, R.A., A.I. Mitchell y D.I. Robertson (1980). User guide to TRANSYT version 8. TRRL Report LR 888, Crowthorne, Inglaterra.