SOLUCION AL PROBLEMA DE EQUILIBRIO DE OPERADORES PRIVADOS DE TRANSPORTE PUBLICO CONSIDERANDO RESTRICCION DE CAPACIDAD DE BUSES,

Fernando J. Bravo F.
Comisión de Transporte Urbano
Ahumada 48, Santiago-Chile

J. Enrique Fernández L.
Pontificia Universidad Católica de Chile
Casilla 6177, Santiago-Chile

RESUMEN

El presente trabajo trata el problema de predicción de equilibrio en un sistema de transporte urbano en que los servicios de transporte público son ofrecidos por operadores privados, bajo condiciones de desregulación. El problema fué definido originalmente en Fernández (1986) y posteriormente distintos enfoques de solución fueron analizados en Fernández y Bravo (1986) y Fernández et al (1986). En tales trabajos se sigue el enfoque tradicional utilizado en los modelos de asignación de transporte público, en que no se considera restricción de capacidad de los servicios considerados. Tal simplificación se constituye sin embargo en una limitación importante en el caso de la modelación de sistemas con operadores privados en condiciones desreguladas, obteniendose resultados poco realistas.

En este trabajo se presenta una forma de introducir explicitamente las restricciones de capacidad de los servicios de transporte público y se propone y analiza un método de solución basado en la filosofía del método de Frank-Wolfe de programación no lineal.

Para ilustrar el funcionamiento del algoritmo propuesto se utiliza la red de transporte público de la oiudad de Santiago correspondiente a 1977.

1 NOTACION GENERAL Y SUPUESTOS BASICOS

Manteniendo la notación considerada en trabajos anteriores; $G(N,A)$, denotará a la red de transporte urbano que consta de un conjunto N de nodos que corresponden a intersecciones y centroides donde se originan y atraen viajes y A al conjunto de arcos que representa la calles de la ciudad que pueden ser simultáneamente usados por transporte privado (autos) y transporte público (buses).

A su vez, $T(N,L)$ representará a la red de transporte público, que consta de un set de nodos N subconjunto de N, y un conjunto de líneas de transporte público L. Cada línea de transporte público esta definida como una secuencia de nodos de N, en la cual los pasajeros pueden bajar y subir de los buses. A su vez, cada línea de transporte público está compuesta de una secuencia de arcos del conjunto A. Luego, la red T representará al servicio de tranporte público que los usuarios de la red pueden usar para viajár entre nodos específicos de la red.

La siguiente notación será incluida en este trabajo para el modo transporte público, sobre la red G :

B = Flota o dotación total de buses operando sobre la red de transporte público.

B_o = Flota total mínima de buses operando sobre la red, que asegura que el servicio de transporte público satisface la demanda de viajes.

B_d = Flota de buses disponible para asignarse entre las líneas de buses de la red, una vez asignada la flota mínima.

$\bar{f}_c^{\ell}$ = Carga máxima de usuarios de transporte público que transporta la linea l, en el segmento mas cargado en pasajeros por unidad de tiempo.

$\bar{f}^{\ell}$ = Flujo total de usuarios de transporte público que transporta la linea l, en pasajeros por unidad de tiempo.

$\bar{f}_a^{\ell}$ = Flujo de usuarios de transporte público que viajan a través del arco a por la línea l, en pasajeros por unidad de tiempo.

$\tilde{f}_a^{\ell}$ = Flujo de usuarios de transporte público que abordan la linea l en el arco a, en pasajeros por unidad de tiempo.

$\delta_{a\ell}$ = Matriz arco-línea para transporte público. Un elemento toma valor 1 si el arco es usado para la línea l y 0 en otros casos.

K_v = Capacidad de un vehículo, en pasajeros por vehículo.

d_{ℓ} = Frecuencia de servicio de la línea $l \in L$, en buses por unidad tiempo.

d_a = Frecuencia total de vehículos de transporte público sobre el arco $a \in A$, en vehículos por unidad de tiempo.

Δ_{ℓ} = Dotación de buses de la línea $l \in L$.

Δ_{ℓ}^{o} = Dotación mínima de buses de la línea $l \in L$, necesaria para transportar todos los pasajeros que demandan los servicios de dicha linea.

ρ_{ℓ} = Tarifa de transporte público de la linea l, en unidades monetarias por pasajero.

g_a^{ℓ} = Costo medio de operación de la linea l sobre el arco $a \in A$, en unidades monetarias por vehículo.

g^{ℓ} = Costo total de operación de la linea l por vuelta,

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO DE OPERADORES PRIVADOS

El problema aquí tratado puede representarse como un juego entre dos grupos de jugadores: el primero se compone de los operadores de transporte público que se supone son pequeños empresarios, dueños de uno o dos buses, que ofrecen el servicio de transporte teniendo como objetivo la maximización del beneficio privado resultante de su operación. El segundo grupo corresponde a los usuarios del sistema de transporte urbano, cuyo comportamiento obedece a un objetivo de minimización de costos de viaje. Este problema se diferencia del tradicionalmente analizado en la literatura en que los operadores de transporte público son considerados agentes internos cuyo equilibrio debe ser predicho simultaneamente con el de los usuarios del sistema (ver Fernández y Bravo 1986).

El sistema estará en equilibrio entre los niveles, cuando cada operador del servicio de transporte público este maximizando su beneficio privado y simultáneamente cada usuario del sistema de transporte público y privado, esté minimizando sus costos individuales de viaje.

El equilibrio global del sistema será identificado por el conjunto $(F^*(d),d^*)$, donde $F^*(d)$ representará al conjunto de flujos de equilibrio bimodal $(f,\overline{f})$, donde f y $\overline{f}$ corresponden a los vectores de flujos en arcos para los usuarios de transporte privado y público, respectivamente y d^* representará al conjunto de frecuencias que en el equilibrio maximizan el beneficio de los operadores privados.

2.1 Función De Beneficio De Los Operadores Privados

En Fernández y Bravo (1986), se planteó la siguiente función de beneficio neto para un vehículo de transporte público operando en una linea l por unidad de tiempo:

$$\Pi_\ell = (\overline{f}^{\,\ell}\ \rho_\ell)\ \Delta_\ell - g^\ell(d_\ell/\Delta_\ell) - CF_\ell \qquad , \forall\ \ell \in L \qquad (5)$$

donde CF_ℓ, corresponde al costo fijo por vehículo y por unidad de tiempo.

Por otra parte, se supondrá la siguiente forma general para la función de costos unitarios

$$g_a^\ell = \overline{\alpha}_a + \overline{\beta}_d[f_a + \eta\ d_a]^{\overline{n}} + \overline{\gamma}_a\ \overline{f}_a^{\gamma\ell}\ , \forall\ a \in A\ ,\ \forall\ \ell \in L \qquad (6)$$

en que $\overline{\gamma}_a$ es el costo asociado a la subida de un pasajeros por vehículo en el arco a.

La frecuencia de la línea l, d_ℓ, será una función del número de vehículos o tamaño de la flota Δ_ℓ, y el tiempo ocupado en una vuelta completa t^ℓ, el cual a su vez dependerá del nivel de congestión sobre los diferentes arcos de la red cubiertos por la línea l en su ruta.

Luego, se tendrá que :

$$d_{\ell} = \Delta_{\ell}/t^{\ell} \quad , \forall \ell \in L \tag{7}$$

La expresión general para la función del tiempo de operación de un vehículo de la línea l sobre un arco 'a', t_a^{ℓ} , tiene la misma forma de la ecuación (6), es decir :

$$t_a^{\ell} = \bar{\bar{\alpha}}_a + \bar{\bar{\beta}}_a [f_a + \eta\, d_a]^{\bar{\bar{n}}} + \bar{\bar{\gamma}}_a\, f_a^{\ell} \quad , \forall a \in A, \forall \ell \in L \tag{8}$$

donde $\bar{\bar{\alpha}}_a$ y $\bar{\bar{\beta}}_a$ tienen el mismo significado que en (4) y (6), pero en unidades de tiempo.

De acuerdo a esto, el término (d_{ℓ}/Δ_{ℓ}) de la función de beneficio en la ecuación (5), representará el número de vueltas que realiza un vehículo de la linea l, por unidad de tiempo.

2.2 Hipótesis De Comportamiento De Los Operadores Privados En Condiciones De Competencia.

Se considerará que el servicio de transporte público está formado por un mercado compuesto de un gran número de operadores privados, cada uno de los cuales es propietario de un pequeño número de buses. Cada operador eligirá libremente la línea en la cual ubicará sus buses para ofrecer sus servicios, con el único objetivo de maximizar su beneficio privado.

El problema puede formularse como un problema de asignación de una flota de buses a un conjunto de recorridos potenciales de transporte público (ver Fernández, 1986 y Fernández y Bravo, 1986), cada uno de los cuales tiene asociado un 'indice de calidad', representado por el beneficio neto obtenido por cada vehículo que opera sobre el. Tales beneficios dependerán tanto de la cantidad de pasajeros que utilizan la linea, como de la cantidad de vehículos que la operan. Una solución de equilibrio se obtiene cuando se cumpla la siguiente condición:

> Ningún operador privado de transporte público pueda mejorar su beneficio mediante un cambio unilateral de línea '.

Dado que los modelos de asignación de transporte público existentes no consideran restricción de capacidad, si tal restricción no se incluye en el nivel de los operadores, el resultado obtenido es poco realista dado que en tal caso el modelo asigna vehículos a las líneas mas rentables, desde el punto de vista de los beneficios netos obtenidos, pero sin preocuparse de si es factible que los pasajeros asignados a tales líneas pueden ser efectivamente transportados. Ello conduce a una inconsistencia en el cálculo del beneficio de las líneas sobrecargadas ya que por una parte el modelo considera que la linea obtiene un ingreso resultante del cobro de la tarifa respectiva a todos los pasajeros asignados, y sin embargo algunos de ellos no pueden ser efectivamente transportados dado que la cantidad de vehículos asignados no provee una capacidad suficiente.

En las aplicaciones practicas esto produce soluciones que se caracterizan por una gran cantidad de líneas no servidas (con flotas nulas) y el resto de las líneas, que son servidas, presentan importantes sobrecargas.

Este problema puede corregirse si se introduce una restricción que asegure que todos los pasajeros que son asignados a una linea determinada sean realmente transportados, con lo cual se elimina la inconsistencia en el cálculo de de los beneficios. Para ello debe definirse una cota mínima a la flota asignada a cada linea en el nivel de los operadores.

En una solución de equilibrio las líneas podrán clasificarse en dos grupos diferentes, un grupo compuesto por líneas que operan con una flota superior (o en casos límites igual) a la flota factible mínima que asegura la capacidad del servicio y sobre las cuales los operadores alcanzan iguales beneficios unitarios y el otro grupo formado por líneas que operan en la flota mínima factible con beneficios unitarios menores (o en casos límites iguales).

Introduciendo estas modificaciones a las condiciones analíticas de equilibrio planteadas en Fernández, 1986 y Fernández y Bravo, 1986, se pueden obtener las siguientes expresiones alternativas que consideran restricción de capacidad:

$$\Pi_\ell = \begin{cases} = \mu \quad , \forall\, \ell \in L/\ d_\ell > 0 \quad , \Delta_\ell > \Delta_\ell^* \\ \leq \mu \quad , \forall\, \ell \in L/\ d_\ell \geq 0 \quad , \Delta_\ell = \Delta_\ell^* \end{cases} \qquad (9)$$

donde μ representará al beneficio de equilibrio, obtenido por vehículo y por unidad de tiempo, en las líneas sin restriccion activa de capacidad.

Alternativamente, las condiciones de equilibrio pueden expresarse mediante la siguiente desigualdad variacional:

$$\Pi\,(\Delta^*, F^*(d))\ (\Delta^* - \Delta) > 0, \quad \forall\, \Delta \in \Omega \qquad (10)$$

donde Π representa al vector fila de beneficio de componentes Π_ℓ, con $\ell \in L$, Δ al vector columna de dotaciones de componentes Δ_ℓ, y Δ^* al vector columna de dotaciones por linea en el equilibrio.

3 ALGORITMO DE SOLUCION

3.1 Solución Del Problema Multinivel

El enfoque de solución propuesto consiste en la aplicación del método iterativo de Gauss-Seidel, para encontrar una solución global al problema de equilibrio multinivel.

Como vimos en el punto anterior, el problema de equilibrio de los operadores de transporte público puede ser planteado mediante la desigualdad variacional (10), para un valor dado de la signación de pasajeros de transporte público. Por otra parte, sabemos tambien que para valores dados de las condiciones de servicio de las líneas de transporte público (flotas, frecuencias y tiempos de viaje), el problema de equilibrio de usuarios puede tambien ser planteado mediante la siguiente desigualdad variacional (Florian y Spiess, 1983):

$$c(f^*, d)\ (f^* - f) - \bar{c}\ (f^*, d)\ (\bar{f}^* - \bar{f}) \leq 0 \qquad (11)$$

donde

c y $\bar{c}$ corresponden a los vectores de costos $\{c_a\}$ y $\{\bar{c}_a\}$, respectivamente.

Por lo tanto, el problema de equilibrio multinivel puede ser representado por el sistema de desigualdades variacionales (10), (11).

Para resolver tal sistema se utiliza el método Gauss-Seidel. A partir de una solución factible el método consiste en resolver iterativamente (10) y (11) utilizando en cada caso la última solución obtenida para las variables del otro nivel. El proceso termina cuando las variables de ambos niveles convergen a una solución estable.

En general el método Gauss Seidel puede interpretarse como una negociación entre niveles, en que un nivel toma una decisión, sobre la base de la cual el otro nivel genera su propia decisión de tal forma de optimizar su propia función objetivo, la que a su vez constituye el antecedente sobre el cual el otro nivel vuelve a optimizar su función objetivo y así hasta alcanzar un equilibrio global, en que cada nivel está optimizando su propia función objetivo dadas las decisiones del otro nivel.

3.2 Solución Del Nivel De Operadores

El problema de equilibrio de los operadores de transporte público se resolverá mediante el método propuesto en (Fernández y Bravo, 1986), adecuadamente modificado para introducir las restricciones de capacidad. Este consiste en aplicar el método de Jacobi a fin de que la matriz Jacobiano de la función de beneficio sea simétrica, de tal forma que el problema diagonalizado sea equivalente al siguiente problema de optimización para la iteración J del método de Jacobi:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\Delta}{\text{Max}}\ Z = \sum_{\ell \in L} \int_{\Delta_\ell^*}^{\Delta_\ell} \Pi_\ell\,(X_\ell\,,\Delta_j^J\,,\,F^*(d))_{j \neq \ell}\,dX_\ell \\ \quad \text{s.a.} \quad \sum_{\ell \in L} \Delta_\ell = B \\ \qquad\qquad \Delta_\ell \geq \Delta_\ell^*\,,\ \forall\,\ell \in L \end{array}\right\}\ \text{P1}$$

Aplicando las condiciones de Kuhn-Tucker al problema P1, se obtienen las condiciones planteadas en (9) lo que nos asegura que la solución del problema P1 diagonalizado, satisface el principio de comportamiento, supuesto en (9), para los operadores privados de transporte público en condiciones de competencia perfecta.

El problema P1 corresponde a un problema de programación con función objetivo no lineal y restricciones lineales, que es factible de ser resuelto utilizando algún algoritmo especializado para ello. En este trabajo se utiliza Frank-Wolfe. De la aplicación de Frank-Wolfe al problema P1, se obtiene un vector solución para la iteración J del método Jacobi.

Posteriormente, se asignará $\Delta^{J+1} = \Delta^{*J}$ y se continuará con el método de Jacobi hasta satisfacer algún criterio de convergencia previamente definido.

3.3 Frank Wolfe Considerando Restricción De Capacidad

La filosofía del método consiste básicamente en un proceso iterativo de dos fases : Una primera fase de búsqueda de una dirección factible de optimización y una segunda fase de avance óptimo en la dirección encontrada en la primera fase.

i) Primera fase : búsqueda de una dirección factible de ascenso

En la primera fase del método de Frank Wolfe se realiza una aproximación lineal a la función Z definida en P1 en un punto factible Δ, la cual en una iteración k del método de Frank Wolfe, se puede expresar por :

$$Z_L(Y^k) = Z(\Delta^k) + \nabla Z\,(\Delta^k)\,(Y^k - \Delta^k) \qquad (12)$$

donde ${}_kZ_L$ se define como la aproximación lineal a Z en un punto factible Δ^k e Y^k corresponde al vector solución de la primera fase en la iteración k del método de Frank Wolfe.

El punto solución Y^k se obtiene resolviendo el siguiente problema de programación lineal:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{Y^k} \quad Z_L \\ \\ \text{s.a.} \quad \sum\limits_{\ell \in L} Y_\ell^k = B \\ \\ \qquad Y_\ell^k \geq \Delta_\ell^\circ \qquad , \forall \ell \in L \end{array}\right\} \qquad \text{P2}$$

Debido, a que la función objetivo Z_L de P2 tiene varios términos constantes, P2 es equivalente a resolver el siguiente problema de programación lineal :

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{Y^k} \quad \sum\limits_{\ell \in L} \Pi_\ell (\Delta_\ell^k) \, Y_\ell^k \\ \\ \text{s.a.} \quad \sum\limits_{\ell \in L} Y_\ell^k = B \\ \\ Y_\ell^k \geq \Delta_\ell^\circ \quad , \quad \forall \ell \in L \end{array}\right\} \qquad \text{P3}$$

Dada la forma de P3, donde $\Pi(\Delta^k)$ es un vector fijo y conocido para esta primera fase, claramente se aprecia que el vector solución se obtiene asignando la flota total de buses disponible B , (o excedente de flota sobre la flota total mínima que asegura la factibilidad de la solución) a la línea de beneficio mayor, y a las otras líneas se les asigna la flota mínima o cota mínima de flota por línea.

Por lo tanto, si el vector Y^k , representa una solución factible de la primera fase del método, podemos definir la dirección factible de búsqueda como $d^k = Y^k - \Delta^k$ y concluir la primera fase.

ii) Segunda fase : avance óptimo en la dirección de primera fase

A diferencia de la primera fase, esta segunda fase no varia al planteamiento realizado de ella, presentado en Fernández y Bravo, 1986, para el problema que no incluye restricción de capacidad del servicio de transporte público. Básicamente consiste en encontrar un vector Δ^{k+1} que maximice el valor de la función objetivo Z_{k+1} en la dirección d^k encontrada en la primera fase. El vector Δ^{k+1} debe ser

interior al segmento definido por las soluciones factibles Δ^{k+1} e Y^k
Es decir,

$$\Delta_\ell^{k+1} = \Delta_\ell^{k+1}(\lambda) = \Delta_\ell^k + \lambda(Y_\ell^k - \Delta_\ell^k) \; ; \; 0 \leq \lambda \leq 1, \; \forall \, \ell \in L \qquad (13)$$

Por lo tanto, el problema a resolver en esta fase es:

$$\left. \begin{array}{l} \underset{\lambda}{\text{Max}}\; Z = \sum\limits_{\ell \in L} \displaystyle\int_{\Delta_\ell^*}^{\Delta_\ell^{k+1}} \Pi_\ell \left(X_\ell, \Delta_j^J, F^*(d)\right)_{j \neq \ell} dX_\ell \\ \\ \qquad 0 \leq \lambda \leq 1 \end{array} \right\} \quad P4$$

La restricción $0 \leq \lambda \leq 1$ junto a la convexidad de Z asegurará la factibilidad de la solución encontrada para la segunda fase del método.

Para el problema de programación no lineal, de optimización en una dimensión (P4), se utiliza el método de la Sección Aurea, pero es también factible de resolver por otros métodos como Fibonacci y Bolzano. (Ver Fernández y Bravo, 1986).

3.4 Calculo Del Vector De Frecuencias

El cálculo del vector de frecuencia puede expresarse por :

Encontrar un vector $d \in \mathbb{R}^L$ que satisfaga :

$$d = f(d) \quad , \forall \, d \in \mathbb{R}^L$$

donde de acuerdo a (7)

$$d_\ell = \Delta_\ell / t^\ell(d), \; \forall \, \ell \in L \qquad (14)$$

Por lo tanto, el vector d corresponderá a un punto estacionario o punto fijo. (Ver Fisk (1986))

Para el cálculo del vector frecuencia, para un vector de dotaciones Δ dado en la red, se utiliza un método iterativo del tipo Jacobi a fin de resolver el problema de punto fijo.

3.5 Método De Frank Wolfe Modificado

A continuación se describe una modificación introducida en la operación del algoritmo de Frank-Wolfe a fin de mejorar su convergencia. Esta consiste en una perturbación realizada a la solución obtenida en cada iteración.

Para una solución factible cualquiera del nivel de operadores, se definirá como L^S al conjunto de lineas que presentan una dotación de buses sobre la cota mínima, y como L^C al conjunto de lineas con dotación de buses en la cota mínima.

De acuerdo a esto, se cumplirá que :

$$L^S \cup L^C = L \qquad (15)$$

A su vez, L_+^S y L_-^S representarán a los conjuntos de lineas con dotación de buses sobre la cota mínima que tienen beneficio por linea mayor, o menor o igual al beneficio promedio de las líneas de L^S, respectivamente .

Del mismo modo, L_+^C y L_-^C representarán a los conjuntos de líneas con dotación de buses igual a la cota mínima que tienen beneficio por linea mayor, o menor e igual al beneficio promedio de las líneas de L^S. Luego, se cumplirá :

$$L_+^S \cup L_-^S = L^S \qquad L_+^C \cup L_-^C = L^C \qquad (16)$$

Considerando estas definiciones, una solución de nuestro problema deberá cumplir que $L_+^C = \phi$

La perturbación aquí utilizada, apunta a acelerar la convergencia del algoritmo de de Frank Wolfe, considerando la restriccion de factibilidad que debe cumplir la solución del problema. Para esto, se realiza una reasignación de buses por líneas, agregando buses en primer lugar a las líneas que se encuentran en la cota de flota mínima y posteriormente a las líneas con flota sobre la cota de flota mínima, que posean un beneficio mayor al beneficio medio de las líneas con flota sobre la cota. Estos buses, se extraen del conjunto de líneas sobre la cota de flota, que tienen beneficio menor que el beneficio medio. El proceso se puede expresar como :

Si se denomina por $\Pi_{\ell\ell}$ a la primera derivada del beneficio por línea con respecto a la dotación y si se considera, que el valor del segundo término de $\Pi_{\ell\ell}$ no variará mucho al variar la dotacion de la linea l, entonces una buena aproximación de $\Pi_{\ell\ell}$ viene dada por la expresión :

$$\Pi_{\ell\ell} = - \bar{f}^{\ell} \rho_{\ell} / \Delta_{\ell}^2 \ , \forall \ell \in L \qquad (17)$$

Ahora, para variaciones pequeñas es válida la aproximación

$$\Pi_{\ell\ell} = \Delta \Pi_{\ell} / \Delta \dot{\Delta}_{\ell} \ , \forall \ell \in L$$

donde $\Delta \Pi_{\ell}$ se define como :

$$\Delta \Pi_{\ell} = | \bar{\Pi} - \Pi_{\ell} | \qquad , \forall \ell \in L$$

con $\bar{\Pi}$ valor promedio de los beneficios por líneas.

Luego, se tendrá la siguiente expresión para la variación de la dotación por línea :

$$\Delta \Delta_\ell = |\bar{\Pi} - \Pi_\ell| \;/\; \Pi_{\ell\ell} \qquad \forall\, \ell \in L \tag{18}$$

La reasignación de flota se realiza de la siguiente manera :

Si $L_+^c \neq \phi$ y $L_+^s \neq \phi$, se tendrá

i) $\Delta_\ell^P = \Delta_\ell + \Delta \Delta_\ell$, $\forall\, \ell \in L_+^c$

Si $L_+^c = \phi$ y $L_+^s \neq \phi$, se tendrá

ii) $\Delta_\ell^P = \Delta_\ell + \Delta \Delta_\ell$, $\forall\, \ell \in L_+^s$

donde Δ_ℓ^P corresponde a la dotación de la línea despues de la perturbación y $\Delta\Delta_\ell$ es la dotación definida en (18).

Se definirá por V^+ a la suma total de vehiculos agregados .

Es decir,

$$V^+ = \sum_{\ell \in L_+^c} \Delta\Delta_\ell \qquad , \text{si } L_+^c \neq \phi \quad L_+^s \neq \phi$$

ó

$$V^+ = \sum_{\ell \in L_+^s} \Delta\Delta_\ell \qquad , \text{si } L_+^c = \phi \quad L_+^s \neq \phi$$

Esta cantidad V^+ será extraída de las líneas del conjunto L_-^s a través de un proceso iterativo, que opera de la siguiente manera :

$$\Delta_\ell^P = \Delta_\ell - V^+ \left(\Delta\Delta_\ell \;/ \sum_{\ell \in L_-^s} \Delta\Delta_\ell\right), \quad \forall\, \ell \in L_-^s \tag{19}$$

ó

$$\Delta_\ell^P = \Delta_\ell^\circ \qquad , \quad \forall\, \ell \in L_-^s \tag{20}$$

dónde $\Delta\Delta_\ell$ se define de igual forma que en (18).

La expresión (19) solo será aplicable a aquellas líneas cuya dotación modificada Δ_ℓ^P sea superior a la cota mínima. De lo contrario deberá aplicarse (20), eliminando la linea a la cual se le aplique esta perturbación del conjunto L^s e ingresando la linea al conjunto L^c. Debido a esto existirá un nuevo conjunto L_-^s de donde se extraerá el saldo de buses que queda de la cantidad inicial V^+ de buses agregada a las líneas del conjunto L_+^c y L_+^s y la cantidad efectiva extraida por (19) y (20) para conservar la factibilidad de las líneas. El proceso continuará hasta que este saldo se anule de acuerdo a algún criterio de convergencia previamente definido.

3.6 Verificación De Factibilidad De La Solución

Reemplazando la frecuencia por linea dada por (14), en la expresión para la restricción de capacidad planteada en (2), que debe cumplir la carga máxima de pasajeros asignada por línea para conservar la factibilidad y consistencia del problema se obtiene que :

$$0 < \overline{f}_c^{\ell} < (\Delta_{\ell} \; / \; t^{\ell}(d))\, K_v \;, \quad \forall\, \ell \in L$$

Es decir,

$$\Delta_{\ell} \geq \overline{f}_c^{\ell} \; t^{\ell}(d) \; / \; K_v \qquad , \quad \forall\, \ell \in L \qquad (21)$$

Considerando (21), se tendrá que la flota mínima o cota de buses por líneas queda dada por :

$$\Delta_{\ell}^{o} = \overline{f}_c^{\ell} \; t^{\ell}(d) \; / \; K_v \qquad , \quad \forall\, \ell \in L \qquad (22)$$

Como se aprecia en (22), la dotación mínima factible por línea depende del tiempo de viaje de la línea . Luego, el vector de dotación mínima factible por linea $\Delta_{\ell}^{o}\,(t^{\ell})$, será variable en el desarrollo del algoritmo de diagonalización.

En el algoritmo utilizado se considera que la dotación factible mínima por linea es constante al interior de cada problema diagonalizado. Este valor viene dado por (22), y considera como tiempo de viaje por línea, el correspondiente al usado en el nivel de asignación de usuarios de transporte público y para el cual se obtuvo el vector carga máxima de pasajeros por línea usado como dato en el nivel de los operadores.

Una vez que el método converja a una solución, se deberá verificar si esta solución óptima es también factible. Para esto, se calculará un nuevo vector de dotaciones factibles mínimas por linea para las condiciones de la solución encontrada y se verificará que cumpla con (21). Si esta condición no se cumple, se repetirá nuevamente el proceso tomando como vector de dotaciones factibles al generado considerando las condiciones de operación correspondientes a la última solución encontrada.

4 RESULTADOS

La red utilizada en los experimentos realizados corresponde a la red de la Ciudad de Santiago 1977. Ella consta de 56 centroides o puntos de origen-destino para los viajes en transporte privado y 40 centroides o puntos de origen-destino para los viajes en transporte público. La red tiene 245 nodos de transporte público y esta compuesta de 222 líneas de buses, además de las líneas 1 y 2 del Metro.

La demanda de viajes permanece fija; se considera que la generación, la distribucion y la partición modal de viajes son conocidas y permanecen constantes.

El software utilizado en la asignacio'n de usuarios a la red es: SATURN, para la asignación de usuarios de transporte privado y MADITUC, para la asignación de usuarios de transporte público. Las corridas fueron realizadas en un computador VAX/vms 8600.

La tabla 1 entrega los resultados de las pruebas realizadas con el algoritmo de Frank-Wolfe con aplicación de la perturbación, para resolver un problema diagonalizado. Por lo tanto, todas las corridas realizadas corresponden a la solución de un problema de equilibrio de operadores en que las funciones de beneficio son diagonales. La primera columna especifica la frecuencia con que fué utilizada la perturbación en cada caso; la segunda, la precisión exigida ε , como criterio de parada para el algoritmo. La tercera columna, especifica el número de iteraciones de Frank-Wolfe necesarias para obtener la precisión y la cuarta columna, la precisión Ψ realmente obtenida. Finalmente, la última columna especifica en (minutos:segundos.décimas), el tiempo de CPU utilizado.

La precisión de la solución Ψ , se define de la siguiente manera :

$$\Psi = \sigma / \bar{\Pi} \tag{23}$$

donde σ representa a la varianza de Π_ℓ , y $\bar{\Pi}$ representa a la media de Π_ℓ , $\forall$ l $\in$ L.

TABLA N°1
Perturbación a algoritmo de Frank Wolfe

Frecuencia Perturbacion	$\varepsilon \cdot 10^{-4}$	Numero Iter.	$\psi \cdot 10^{-4}$	CPU Total (+)
sin	100	150	521.0	05:17.99
solo inicial	100	150	477.0	05:18.91
10	100	31	51.7	01:36.09
5	100	16	75.1	01:08.58
1	100	4	71.4	00:45.57
1	50	5	38.6	00:48.38
1	10	9	5.2	00:55.74
1	1	13	0.8	01:02.44

(+) Para una flota total de 10000 buses operando en el sistema y parámetros $n, \bar{n}$ y $\underline{n}$ iguales a 5.00

Como se puede observar, la utilización de la perturbacion es muy efectiva, lograndose una significativa aceleración de la convergencia del algoritmo y mejores precisiones de la solución. De acuerdo con los resultados obtenidos, aparece como conveniente aplicar la perturbación en cada iteración de Frank-Wolfe.

A continuación se procedió a estudiar las características del algoritmo de diagonalización. Los resultados obtenidos de estas pruebas se muestran en la tabla 2. En ella se presentan los resultados de corridas realizadas para distintos tamaños de la flota total de buses en el sistema de transporte público, a fin de analizar la influencia de las condiciones de congestión sobre las características de convergencia del algoritmo utilizado. Tambien se experimentó con distintas precisiones en la solución de cada problema diagonalizado a fin de probar su influencia en la convergencia general del algoritmo de diagonalización. En la primera columna, se especifica la flota total de buses supuesta; en la segunda, la precisión exigida al algoritmo de Frank-Wolfe para la obtención de la solución de cada problema diagonalizado; la tercera columna especifica el número total de diagonalizaciones realizado; la cuarta indica la precisión de la solución final obtenida y la quinta especifica el tiempo de CPU consumido.

TABLA N°2
Algoritmo de Diagonalización en la Red Mayor

Flota Total de Buses	F.WOLFE	DIAGONALIZ.		CPU Total (+)
	$\varepsilon \cdot 10^{-3}$	Iter.	$\Psi \cdot 10^{-3}$	
11000	10	8	18.51	0:01:56.69
11000	1	2	0.29	0:02:27.10
10000	5	8	0.42	0:01:45.33
10000	1	2	1.77	0:01:07.96
9000	5	8	8.05	0:01:31.38
9000	1	2	2.70	0:01:25.06
8000	5	8	4.70	0:01:04.58
8000	1	2	0.78	0:01:01.05
7000	5	8	7.70	0:01:23.57
7000	1	2	6.18	0:01:27.28
6000	5	12	5.17	0:01:35.78
6000	1	3	5.17	0:01:26.23

(+) Usando parámetros $n, \bar{n}$ y $\bar{\bar{n}}$ iguales a 5.00

El algoritmo de diagonalización presenta problemas de precisión para flotas totales muy cercanas a la flota total mínima factible (menos de 7000 vehículos). Esto se debe a que en tales casos, la mayoría de las lineas se encuentran en la cota de dotación mínima y por lo tanto, el excedente de flota que existe entre la flota total y la flota total mínima, es insuficiente, para que se alcance un equilibrio muy preciso.

De los resultados presentados en la tabla 2, se desprende que un número alto de diagonalizaciones no aporta significativamente a la precisión de la solución del problema, cuando la precisión con que se resuelve cada sub-problema diagonalizado es baja. Por otra parte, parece mas efectivo exigir una mayor precisión en la solución de cada sub-problema diagonalizado, lo que de acuerdo a los resultados obtenidos es mas efectivo para obtener una mejor solución al problema. En todo caso tambien parece deducirse que el problema no es tan asimétrico como en un comienzo se supuso, lo que quiere decir que la influencia cruzada de las características de operación de una línea sobre los costos de operación de las otras, no es muy importante para los tamaños de flota considerados.

La tabla 3 contiene los resultados obtenidos de la aplicación del algoritmo multinivel, para distintas flotas totales operando en el sistema y para distinto número de iteraciones multinivel. En cada caso para la solución del nivel de los operadores se utilizó la opción que había resultado mas eficiente de acuerdo con los resultados de la tabla 2. En la primera columna se especifica el tamaño de flota considerado, en la segunda el número de iteraciones totales del algoritmo multinivel, en la tercera, el número de líneas no utilizadas en la solución final, en la cuarta columna se especifica el número de líneas que tienen dotaciones en la cota para la solución obtenida, en la quinta se presenta el número de líneas que convergierón con una precisión mayor o igual a un bus de diferencia entre dos iteraciones sucesivas. Finalmente, en la última columna se especifica el tiempo de CPU consumido en cada caso.

TABLA N°3
Algoritmo Multinivel en la red mayor

Flota Total	Iter.	líneas(+) no util.	líneas en la cota	líneas que conv.	CPU total
11000	8	95	10	139	0:36:49.48
11000	6	94	10	140	0:29:54.07
10000	8	99	16	142	0:30:52.15
10000	6	99	16	142	0:24:21.25
9000	8	98	24	144	0:28:10.05
9000	6	97	24	144	0:22:03.07
8000	8	96	36	149	0:24:12.14
8000	6	97	32	145	0:20:25.35
7000	8	97	62	163	0:22:20.32
7000	6	97	63	165	0:19:37.56
6000	1	-	222	-	prob.no fact

(+) Usando algoritmo CTM con restricción de transbordos para el cálculo de rutas mínimas en modulo CHEMIN de MADITUC

El número de líneas no utilizadas al cabo de 6 u 8 iteraciones del algoritmo multinivel es del orden de 94-99 buses, para todas las flotas totales probadas. Una línea de buses al no ser utilizada por pasajeros en el nivel de asignación de usuarios de transporte público, se le asigna frecuencia y dotación nula automaticamente en el nivel de operadores, quedando eliminada del sistema. Para una flota de 6000 buses en la primera iteración del problema multinivel, el sistema colapsa; ya que, el problema en el nivel de operadores no es factible. Esto, se debe a que la flota mínima total capaz de cargar todos los pasajeros asignados por MADITUC, es de 6686 buses, cantidad superior a la flota de 6000 buses operando en el sistema.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo presentado forma parte de un proyecto de investigación financiado por el Departamento de Investigaciones de la UC.(DIUC), el Fondo Nacional De Ciencia y Tecnología (FONDECYT) y el International Development Research Center de Canadá(IDRC).

REFERENCIAS

Aashtiani, H.Z. y Magnanti, T.L.(1981) Equilibria on a congested transportation network. SIAM Journal of a algebraic discrete methods 2, 213-216.

Bard, F.D. y Falk, J.E.(1982) An explication solution to the multilevel programming problem. Computers and Operation Research 9, 77-100.

Dafermos, S.C.(1980) Relaxation algorithms for the general asymmetric traffic equilibrium problem. Transp. Science 16, 231-240.

Fernandez, J.E. y Friesz, T.L.(1983) Equilibrium predictions in transportation markets : The state of the art. Transp. Research 17B, 155-172.

Fernandez, J.E. (1986) Transit Networks : Simulation vs. Optimization Approaches. PTCR Summer Annual Meeting. Canada.

Fernandez, J.E. y Bravo F.(1986) Modelación de sistemas de transporte público urbano. III CLAIO Congreso Latino Iberoamericano de Investigación Operacional. Santiago, Chile.

Fernandez, J.E., Bravo F. y Weintraub A.(1986) Una aplicación del método de Frank Wolfe a la solución del problema de equilibrio de operadores de transporte público. IV Congreso Panamericano de Ingeniería de Transporte y Transito. Santiago, Chile.

Fisk, C.S. y Boyce, D.E.(1983) Alternative variational inequality formulations of the network equilibrium travel choice problem. Transp. Science 17, 454-463.

Fisk, C.S.(1984) A conceptual framework for optimal transportation systems with integrated supply and demand models. Transp. Science 20, 37-47.

Florian, M. y Spiess, H.(1982) The convergence of diagonalization algorithms for asymmetric network equilibrium problems. Transp. Research 16B(6), 447-483.

Friesz, T.L.(1985) Transportation network equilibrium, design and aggregation : key developments and reseach opportunities. Transp. Research 19(A), 413-427.