ASIGNACION DE TRANSPORTE PUBLICO CON RESTRICCION
DE CAPACIDAD: PLANTEAMIENTO Y FORMULACION

J. de Cea Ch. y J. Enrique Fernández L.
Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería de Transporte, Casilla 6177, Santiago

Resumen

Una de las limitaciones más importantes de los modelos operacionales de asignación a redes de transporte público es la no consideración del fenómeno de congestión. En general se supone que las funciones de costo (tiempo) generalizado de viaje son independientes del flujo de pasajeros sobre la red. Esto, ha dado origen a formulaciones lineales del problema para las que existen algoritmos eficientes de solución.

En este trabajo, luego de una muy breve discusión sobre el estado del arte en la materia, se plantea el problema de asignación a redes de transporte público con restricción de capacidad, se presenta una formulación general de equilibrio, en la que los costos de espera son funciones de los flujos de pasajeros y se propone una serie de métodos de solución.

1. Introducción

Una de las principales limitaciones de los modelos operacionales de asignación de transporte público es la no consideración del fenómeno de congestión. En general se supone que las funciones de costo (tiempo) generalizado de viaje son independientes de los flujos de pasajeros sobre la red, lo que da origen a formulaciones lineales del problema, para las que existen algoritmos eficientes de solución.

En el caso del transporte privado, en el que la importancia de la congestión resulta más evidente, los modelos aceptables de asignación consideran funciones de costo no lineales y crecientes con los flujos. En este caso, una vez planteadas las condiciones de equilibrio sobre la red, ha sido posible formular problemas de optimización no lineales para lo que se han desarrollado también algoritmos de solución muy eficientes.

Entre las causas de este desigual grado de desarrollo de los modelos de asignación de viajes (públicos y privados) cabe destacar las siguientes:

a) La naturaleza especial de los viajes en transporte público implica la construcción de redes complejas, en las que no sólo deben representarse las etapas de acceso y viaje en vehiculo, como en el caso del transporte privado, sino además el pago de tarifas, tiempos de espera de vehiculos y tiempos de transbordo. Todo esto se traduce, además, en que los tiempos de cálculo computacional requeridos para resolver este problema de asignación son considerablemente mayores que para el caso de transporte privado. Por esto, en muchos casos el tratamiento de redes de gran tamaño ha quedado limitado por los recursos computacionales disponibles.

b) En los paises industrializados, en los que han sido desarrollados la mayor parte de los modelos existentes, los servicios de transporte público operan muy por debajo de su capacidad, por lo que el fenómeno de la espera de los pasajeros se simplifica considerablemente al suponer que dichos tiempos son independientes de los flujos sobre las lineas en operación.

c) La mayoría de los modelos de asignación de transporte público existentes carecen de una formulación matemática explicita. Varios de ellos corresponden a definiciones directas de algoritmos correspondientes a adaptaciones de técnicas de asignación normalmente usadas en transporte privado. Esta carencia de formulaciones matemáticas del problema ha constituido un freno al planteamiento de modelos más complejos.

La investigación que ha dado origen a este trabajo busca estudiar el problema de asignación de viajes a redes de transporte público en forma general, considerando todas las caracteristicas relevantes de este sistema, en especial aquellas que son propias de los paises en desarrollo. En este contexto, surge como objetivo general el liberar a los modelos de asignacion a redes de transporte público de la limitación señalada en el primer párrafo de esta sección.

A pesar de que el problema de asignación de viajes a redes de transporte público ha sido estudiado por muchos autores en el pasado, muy poco, o casi nada, se ha avanzado en la formulación de modelos de elección de rutas en redes con capacidad.

TRANSEPT (ver Last y Leak, 1976) asigna viajes a líneas comunes, considerando la capacidad y tiempo de espera de cada línea, usando un proceso iterativo. Dado que la carga se hace arco a arco para cada ruta, el procedimiento parece solamente adecuado para redes radiales.

Spiess (1983) generaliza su modelo lineal al caso en que el costo (tiempo) de viaje en vehículo sobre un arco de la red es una función creciente del flujos de pasajeros sobre dicho arco. Define las condiciones de equilibrio y demuestra que el problema es equivalente a un problema de minización convexa que puede resolverse mediante una adaptación del método de Frank Wolfe.

Una formulación similar a la anterior ha sido propuesta por Nguyen y Pallottino (1985); a partir del concepto de hipercamino, plantean un problema de equilibrio.

Ambas formulaciones, sin embargo, eluden el problema de la restricción de capacidad asociado al fenómeno de espera de los pasajeros y relacionan la "congestión" a un problema de "comodidad" de viaje. Este enfoque es inadecuado para modelar redes como las existentes en Santiago, en que sin duda alguna la restricción de capacidad de los vehículos afecta principalmente el tiempo de espera de los viajeros.

En este trabajo se presenta una formulación preliminar de un modelo de asignación de viajes a redes de transporte público con capacidad, en el que dicha restricción está ligada al tiempo de espera en paraderos. En la sección 2 se discute el problema de elección de rutas en tales redes, en tanto la seccion 3 presenta una primera formulación analítica para este enfoque. En la sección 4 se analizan distintos métodos de solución y finalmente en la sección 5 se presentan algunas conclusiones y recomendaciones para el trabajo futuro.

2. Notación y supuestos básicos

2.1. Notación y algunas definiciones

Con el objeto de permitir una mejor comprensión del problema a tratar, se definen a continuación los conceptos de línea, sección de línea, ruta y sección de ruta.

Denominaremos línea de transporte público, o simplemente línea, a un servicio de vehículos de una determinada capacidad y frecuencia con un itinerario fijo definido por una secuencia de nodos de la red.

Una sección de línea es un tramo de una línea comprendido entre dos nodos no necesariamente consecutivos.

Una ruta de transporte público define la forma de realizar un viaje entre un nodo de origen y un nodo de destino. A ella se asocia dos tipos de información diferente. En primer lugar una secuencia de nodos, en la que además de los nodos de origen y destino se indican los nodos de transbordo (si los hay). Esta secuencia, define el nodo inicial y final de cada una de los tramos que conforman la ruta (nodo origen-primer nodo de transbordo, primer nodo de transbordo-segundo nodo de transbordo,.....último nodo de transbordo-nodo de destino). Cada uno de estos tramos tiene asociado el conjunto de líneas percibidas como equivalentes por los viajeros del tramo.

Los tramos de rutas antes señalados y los conjuntos de líneas asociados a ellos reciben el nombre de secciones de ruta.

A continuación se presenta la notación a utilizar en lo que sigue de este trabajo:

$G(N,S)$: grafo en que N representa un conjunto de nodos y S un conjunto de secciones de ruta.

W : conjunto de pares origen destino de viajes entre nodos de N.

P : conjunto de rutas percibidas en la red por los usuarios.

P_w : conjunto de rutas percibidas por los usuarios entre el par $w \in W$.

h_p : flujo en la ruta $p \in P$.

H : vector de flujos en las rutas de la red.

v_s : flujo sobre la sección de ruta $s \in S$.

V : vector de flujos en las secciones de ruta.

L_s : conjunto de líneas que conforman la sección de ruta $s \in S$.

$v_s^{\,l}$: flujo en la línea $l \in L_s$ sobre la sección de ruta s.

v_{il} : Viajeros de la línea l que la abordan en un nodo anterior a i y se bajan en un nodo posterior a i.

f_l : frecuencia de la línea l.

δ_{sp} : elemento de la matriz de incidencia sección de ruta que toma el valor 1 si la sección de ruta s pertenece a la ruta p y $\emptyset$ en otros casos.

tv_s : tiempo promedio de viaje sobre la sección de ruta s (se supone constante).

te_s : tiempo promedio de espera asociado a la sección de ruta s (función creciente del vector de flujos V).

c_s	:	tv_s+te_s, costo medio total asociado a la sección de ruta s (función creciente del vector de flujos V).
c	:	vector de costos promedio totales asociados a las secciones de ruta.
c_p	:	costo promedio total de la ruta p ($c_p = \sum_{s\epsilon S} c_s\delta_{sp}$)
C	:	vector de costos promedio totales asociados a las rutas.

2.2 Hipótesis sobre el comportamiento de los usuarios

El aspecto central del problema de elección de rutas en redes de transporte público con capacidad lo constituye el fenómeno de la espera.

En redes de transporte público "congestionadas", como ocurre normalmente en sistemas urbanos de países en desarrollo, la sobrecarga de los servicios se traduce en aumentos importantes de los tiempos de espera de los pasajeros. Por este motivo, en tal situación parece recomendable suponer que, en general, el tiempo de espera de un viaje sea una función creciente de los flujos en la red.

Aceptada esta hipótesis, es necesario profundizar en el problema y establecer el comportamiento de los viajeros, para lo que es muy importante saber qué esperan cuando se encuentran en un paradero. Al respecto, los trabajos de Le Clercq (1972), Chriqui (1974), Chriqui y Robillard (1975) y Spiess (1983) se basan en la idea que los viajeros conocen a priori un conjunto de "líneas atractivas" para realizar su viaje y que abordan, de entre ellas, la primera disponible. Esta suposición ha dado origen, en el caso de los modelos sin capacidad, al modelo de asignación a rutas mínimas, planteado por Chriqui (1974) y formulado matemáticamente por De Cea (1986), y al modelo de asignación a estrategias óptimas propuesto por Spiess (1983).

No existen motivos para hacer hipótesis diferentes en el caso de considerar el problema de la capacidad, por lo que supondremos en este caso que para efectuar su viaje (o una parte de él si tiene transbordos) el viajero espera un conjunto de líneas que le son atractivas para realizar el viaje y no una línea en particular. Este último caso se presenta solamente cuando para realizar un viaje existe una línea única. A nivel individual, cada viajero escogerá la primera línea disponible de las atractivas y a nivel agregado los pasajeros que viajan entre dos nodos dados se repartirán de alguna forma entre todas ellas.

Es importante tener presente que entre los viajeros que esperan ser servidos en un nodo determinado hay distintos grupos, según tengan destinos de viaje diferentes, ya que el conjunto de líneas atractivas será distinto para cada uno de ellos. Por lo tanto, dos viajeros distintos que abordan una misma línea en el mismo nodo de origen experimentarán, en general, distintos tiempos de espera si van a diferentes destinos. Dado que cada uno de ellos esperará un conjunto diferente de líneas cuya frecuencia total es distinta, el tiempo esperado de espera será diferente.

Supondremos por lo tanto que el tiempo que un viajero espera en el paradero de origen para poder obtener el servicio depende de la capacidad disponible del conjunto de lineas que le son atractivas para realizar su viaje. Esta capacidad será igual a la suma de las capacidades disponibles de cada una de las lineas que componen el conjunto atractivo. A su vez, la capacidad disponible de cada linea en un nodo (o paradero) será igual a la capacidad total de la linea, que resulta de multiplicar la capacidad de cada vehiculo por la frecuencia de la linea, menos los pasajeros que subieron antes del nodo analizado más los que se bajan en el nodo; todo esto por unidad de tiempo. Dado que lo que el viajero espera no es una linea en particular, sino que un conjunto de lineas, lo que interesa considerar no es la capacidad disponible de cada linea sino que la del conjunto de lineas correspondientes. El servicio relevante para el viajero es el provisto por dicho conjunto y dado que es indiferente a cualquier linea que pertenezca a él, tomará la primera de ellas que llegue al paradero y tenga capacidad disponible.

Lo anterior significa que el proceso subyacente de carga a la red de transporte público puede desagregarse en dos niveles: en el primer nivel tenemos un proceso de asignación de usuarios a secciones de ruta que contienen varias lineas comunes que son indiferentes para el usuario. Este percibe dicho conjunto como si fuera una sola linea con una frecuencia total y una capacidad total.

La decisión de utilizar una sección de ruta dependerá del tiempo total de viaje sobre la ruta a la que pertenece. En un segundo nivel tendremos el problema de asignación de los usuarios de una sección de ruta a las lineas que la componen. Dado que cada usuario tomará el primer vehiculo que llegue al paradero que pertenezca a cualquiera de las lineas de la sección de ruta analizada y posea capacidad disponible, la cantidad de pasajeros que se suben a una linea en un nodo será proporcional a su frecuencia si es que posee capacidad.

Una complicación importante de este problema se deriva de que una misma linea pertenecerá en general a varias secciones de rutas distintas y esto por lo tanto hace que la capacidad disponible de una sección de ruta dependa de los flujos de las otras secciones a las que la misma linea pertenece. Esto significa que el costo o tiempo de viaje sobre una sección de ruta dependerá no sólo del flujo que la utiliza sino también de los flujos que utilizan otras secciones de ruta.

El modelo que se propone en este trabajo asocia, en forma explicita, un tiempo de espera a cada grupo de usuarios en cada nodo de la red, que como se verá depende, en general, de los flujos de viajeros de otros grupos. Para esta presentación se ha limitado el concepto de lineas atractivas al concepto de lineas comunes, definido en Chriqui (1974).

Finalmente, en este caso supondremos que todas las lineas que unen un nodo origen con un nodo destino determinado son comunes. Al respecto debe recordarse que cuando no se considera la capacidad, sólo un subconjunto de esas lineas es considerado atractivo. Al existir la restricción de capacidad en cambio no debe exlcuirse a priori ninguna linea del conjunto de lineas potencialmente atractivas, pues podria suceder que aquella fuera la única con capacidad disponible en el nodo de origen.

2.3 Codificación de la red

De todo lo anterior se desprende que es conveniente codificar la red de transporte público en términos de secciones de ruta. Una sección de ruta entre dos nodos representa una línea ficticia compuesta de todas las líneas comunes existentes entre ellos.

Así, una ruta sin transbordo estará constituida por una sección de ruta en tanto un viaje a través de una ruta con "n" transbordos estará formada por "(n+1)" secciones de ruta.

La Fig. No. 1a) ilustra una red codificada en términos de líneas y la Fig. No. 1b) representa la misma red codificada en términos de secciones de ruta.

De acuerdo a lo establecido anteriormente, cada sección de ruta es utilizada por un determinado grupo de viajeros, quienes perciben un tiempo de espera (que es una función creciente de los flujos sobre todas las secciones de ruta) y un tiempo de viaje que es constante (independiente de los flujos sobre las secciones de ruta). De esta forma, a cada arco de esta red ficticia (que representa una sección de ruta) se puede asociar un costo total (espera más tiempo de viaje) que será una función creciente del vector de flujos.

Por lo tanto nuestra red estará compuesta por arcos que correponden a secciones de rutas y cuyas funciones de costo tendrán la siguiente forma:

$$c_s = c(v_s/\mu K_i^s) \tag{1}$$

en que K_i^s es la capacidad disponible de la sección de ruta s en el nodo i. Por lo tanto K_i^s tendrá la siguiente expresión:

$$K_i^s = \sum_{l \varepsilon L_s} f_l k_l - \sum_{l \varepsilon L_s} v_{il} \tag{2}$$

en que k_l representa la capacidad de un vehículo de la línea l y v_{il} es igual a la cantidad de viajeros de la línea l que abordaron la línea en un nodo anterior a i y se bajarán en un nodo posterior a i. O expresado de otra forma, v_{il} es igual al flujo de pasajeros que la línea trae al llegar al nodo i menos los que se bajan en dicho nodo.

En la Fig. No.2 se presenta gráficamente la forma típica de una función de costo sobre una sección de ruta. La constante μ sirve como parámetro de ajuste a fin de hacer que la pendiente de c sea mayor o menor; en general se usará un valor de μ menor que la unidad, a fin de lograr que el costo sea elevado cuando el flujo de la sección se aproxime a su capacidad.

A continuación se proponen dos tipos de funciones que podrían utilizarse para expresar c_s:

$$c_s = \begin{cases} \underline{c} & , \text{si } v_s \le \mu K_i^s \\ e^{(v_s/K_i^s)\theta} & , \text{si } v_s > \mu K_i^s \end{cases} \tag{3}$$

donde $\underline{c}$ un costo fijo de espera para baja utilización.

Otra alternativa es utilizar una función de la forma de las utilizadas en redes de transporte privado:

$$c_s = A + B\,(v_s/\mu K_i^s)^{\alpha} \tag{4}$$

El problema de elección de rutas sobre una red así definida se reduce a un problema de equilibrio en redes con funciones de costo no separables.

3. Formulación Matemática

Supondremos que los usuarios de la red de transporte público se comportan de acuerdo con el primer principio de Wardrop (Wardrop, 1952), aplicado a una red codificada de acuerdo a lo presentado en 2.3. Los usuarios tomarán en cuenta los costos de viajar a través de todas las rutas alternativas posibles sobre la red y escogerán aquella que represente el menor coto total de viaje. Por lo tanto, una asignación de flujos de equilibrio cumplirá con las siguientes condiciones:

$$C_p \begin{cases} = C_w^* & , \forall p \in P_w \,/\, h_p > 0 \\ \ge C_w^* & , \forall p \in P_w \,/\, h_p = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Es obvio que análogamente a lo que ocurre en el caso del problema de asignación a redes de transporte privado con congestión (ver Fernández y Friesz, 1983) las condiciones de equilibrio pueden también expresarse mediante la siguiente desigualdad variacional:

$$C(H^*)(H^*-H) \le 0 \quad , \forall H \in \Omega \tag{6}$$

en que H^* es el vector de flujos en rutas para la solución de equilibrio y Ω es el conjunto de flujos factibles. El conjunto Ω queda definido por las siguientes ecuaciones de continuidad y no negatividad que deben cumplirse sobre la red definida en 2.3:

$$\sum_{p \in P_w} h_p = T_w \qquad , \forall w \in W \qquad (7)$$

$$\sum_{p \in P} h_p \delta_{sp} = v_s \qquad , \forall s \in S \qquad (8)$$

$$v_s^{\,i} = v_s (f_i / \sum_j f_j) \qquad , \forall s \in S, \forall_i \in L_s \qquad (9)$$

$$h_p \geq 0 \qquad , \forall p \in P \qquad (10)$$

Debe notarse que la ecuación (9) asegura también que la suma de los flujos de cada linea $i \in L_s$ sea igual al total de flujos sobre la sección. A su vez, la no negatividad de $v_s^{\,i}$, v_s y T_w está asegurada por la condición (10) en conjunto con el resto de las restricciones.

Es posible también formular la desigualdad (6) en términos del vector de flujos en secciones de rutas V:

$$c(V^*)(V^*-V) \leq 0 \qquad , \forall V \in \Omega \qquad (11)$$

Como puede verse, no hemos incluido explicitamente una restricción de capacidad para los flujos de cada linea o sección de ruta. Similarmente al enfoque adoptado tradicionalmente en los modelos de asignación de equilibrio en redes de transporte privado, estamos suponiendo que no existe una capacidad rigida pero a través de las funciones de costo utilizadas (ver sección 2.3) se está haciendo que el costo de viaje aumente significativamente a medida que los flujos se aproximan a la capacidad. Con ello se desalienta la utilización de aquellas rutas y secciones de ruta más congestionadas. A pesar de que esto constituye una simplificación que no asegura en forma absoluta que no existan lineas o secciones de ruta congestionadas, tal simplificación ha mostrado funcionar bastante bien en el caso de redes privadas. En todo caso, la formulación usada debiera producir un avance significativo en cuanto al realismo de las soluciones obtenidas para redes de transporte páblico congestionadas con respecto a las soluciones obtenidas aplicando los modelos disponibles que suponen costos independientes de los flujos. Una evaluación definitiva sólo será posible una vez que el enfoque propuesto sea implementado y se realicen experiencias que permitan analizar y comparar los resultados obtenidos.

4. Enfoques de Solución

Dado que el problema planteado posee las mismas caracteristicas formales, en términos matemáticos, que el problema de asignación a redes de transporte privado, se puede usar el mismo tipo de métodos de solución (ver Fernández y Friesz, 1983).

Sin embargo es necesario tener presente que en este caso las funciones de costo tienen jacobiano asimétrico, por lo que los métodos a utilizar deberán ser aquellos que consideran redes con tales características.

El método más usado en transporte para resolver problemas del tipo (6) o (11) es el que recibe el nombre de diagonalización (ver Fernández y Friesz, 1983) y que corresponde en general al enfoque de Jacobi para la solución de ecuaciones lineales o no lineales (ver Ortega and Reinboldt, 1970; Pang and Chang, 1971). La idea detrás de este procedimiento es la siguiente: considere que todos los flujos de la red son fijos a excepción del flujo correspondiente a la sección de ruta analizada, de tal forma de crear funciones de costo separables que poseen Jacobiano simétrico. A este proceso se le denomina "diagonalización" ya que el Jacobiano obtenido es diagonal. Para tales funciones el problema (6) o (11) es equivalente a un problema de programación no lineal del siguiente tipo:

$$\underset{(v_s)}{\text{Min}} \sum_{s \in S} \int_{g}^{v_s} c(x)dx \qquad (12)$$

s.a. ecuaciones (7), (8), (9) y (10)

El problema (12) es un problema con función objetivo no lineal y restricciones lineales y por lo tanto puede resolverse mediante la aplicación de algún método apropiado, como por ejemplo el de Frank-Wolfe que ha sido ampliamente usado en problemas de asignación a redes de transporte (ver Fernández et al, 1986 y Bravo y Fernández, 1987). Una vez obtenida la solución al problema (12) las funciones de costo se vuelven a diagonalizar en torno a una nueva solución y se vuelve a resolver el nuevo problema (12) así obtenido. El procedimiento se repite hasta que la solución converja de acuerdo a una tolerancia o error predefinido.

El método será garantizadamente convergente si se cumplen ciertas condiciones suficientes. Dafermos (1981) desarrolla condiciones para la convergencia global y Florian y Spiess (1981) proveen condiciones suficientes para la convergencia local. Las condiciones son en general bastante exigentes y en la práctica resultan imposibles de utilizar. La experiencia práctica en la utilización del método ha probado sin embargo que para funciones del tipo de las utilizadas en el presente trabajo el algoritmo de diagonalización es generalmente convergente.

Existen otros métodos posibles de utilizar para la solución del problema (11) como el de planos cortantes (ver Nguyen y Dupuis, 1984 y Fernández et al, 1986).

5. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un modelo de asignación de equilibrio a redes de transporte público con capacidad y se ha propuesto distintos métodos de solución. A partir de una codificación especial de la red, en términos de secciones de ruta con costos dependientes de los flujos, el problema ha sido formulado en la misma forma en que tradicionalmente se ha formulado el problema de equilibrio en redes de transporte privado con funciones de costo no separables. Por lo tanto, se propone utilizar en este caso los mismos enfoques de solución.

En cuanto al trabajo futuro, la investigación se centrará en la prueba de los distintos métodos de solución propuestos y en la evaluación de los resultados obtenidos en comparación con los entregados por los modelos de asignación de transporte público tradicionales.

Reconocimientos

El trabajo presentado forma parte de un proyecto de investigación financiado por el Departamento de Investigaciones de la Universidad Católica de Chile (DIUC), el Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT) y el International Development Research Centre de Canadá (IDRC).

Referencias

BRAVO, F. y FERNANDEZ, J.E. (1987) "Solución al problema de equilibrio de operadores privados de transporte público considerando restricción vehicular mediante Frank-Wolfe", III Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte, 18-20 de Noviembre 1987, Concepción, Chile.

CHRIQUI, C. (1974) "Réseaux de transport en commun: les problèmes de cheminement et d'accès", Publication No.11, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal. Canadá.

CHRIQUI, C. y ROBILLARD, P. (1975) "Common bus lines", Transportation Science 9, 115-121.

DAFERMOS, S.C. (1981) "Decomposition algorithms for the general asymmetric traffic equilibrium problem", Leftschetz Center for Dynamical Systems, Brown University.

DE CEA, J. (1986) "Rutas y estrategias óptimas en modelos de asignación a redes de transporte público", IV Congreso Panamericano de Ingeniería de Tránsito y Transporte, 1-4 Diciembre 1986, Santiago, Chile.

FERNANDEZ, J.E., BRAVO, F. y WEINTRAUB, A. (1986) "Una aplicación del método de Frank-Wolfe a la solución del problema de equilibrio de operadores de transporte público", IV Congreso Panamericano de Ingeniería de Tránsito y Transporte, 1-4 Diciembre 1986, Santiago, Chile.

FERNANDEZ, J.E. y FRIESZ, T.L. (1983) "Equilibrium predictions in transportation markets: The state of the art", Transportation Research B, Vol. 17B, No. 2, 155-172.

FERNANDEZ, J.E., MONDSCHEIN, S. y WEINTRAUB, A. (1986) " Solución al problema de equilibrio de operadores de transporte público mediante un algoritmo de corte", IV Congreso Panamericano de Ingeniería de Tránsito y Transporte, 1-4 Diciembre 1986, Santiago, Chile.

FLORIAN, M. y SPIESS, H. (1981) "The convergence of diagonalization algorithms for fixed demand asymmetric network equilibrium problems", Publication No. 198, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, Canadá.

LAST, A. y LEAK, S.E. (1976) "Transept: a bus model", Traffic Engineering and Control, 14-20.

LE CLERCQ, F. (1972) "A public transport assignment method", Traffic Engineering and Control 14, 91-96.

NGUYEN, S. y DUPUIS, C. (1984) "An efficient method for computing traffic equilibria in networks with asymmetric transportation costs", Transportation Science 18, 185-202.

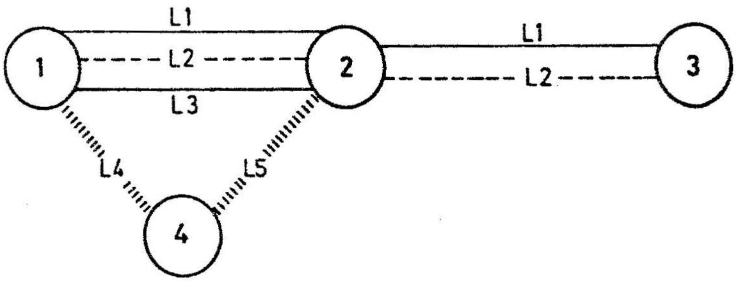
NGUYEN, S. y PALLOTTINO, S. (1985) " Equilibrium traffic assignment for large scale transit networks", Mimeo.

ORTEGA, J.M. y REINBOLDT, W.C. (1970) "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables", Academic Press, New York.

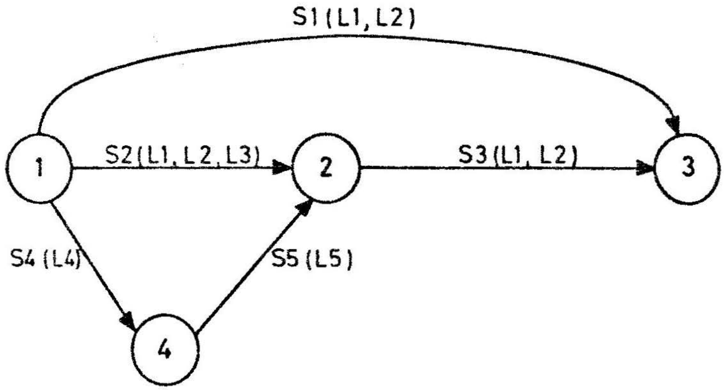
PANG, J.S. y CHANG D. (1981) "Iterative methods for variational and complementarity problems", Mathematical Programming 24, 284-313.

SPIESS, H. (1983) " On optimal route choice strategies in transit networks, Publication No. 286, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, Canadá.

WARDROP, P.G. (1952) "Some theoretical aspects of road traffic research", Procd. Institute of Civil Engineers, Part II, 325-378.



a) Red codificada en términos de lineas



b) Red codificada en términos de secciones de ruta

Fig. 1 Codificación de una red de Transporte público para tratar el problema de asignación con capacidad.

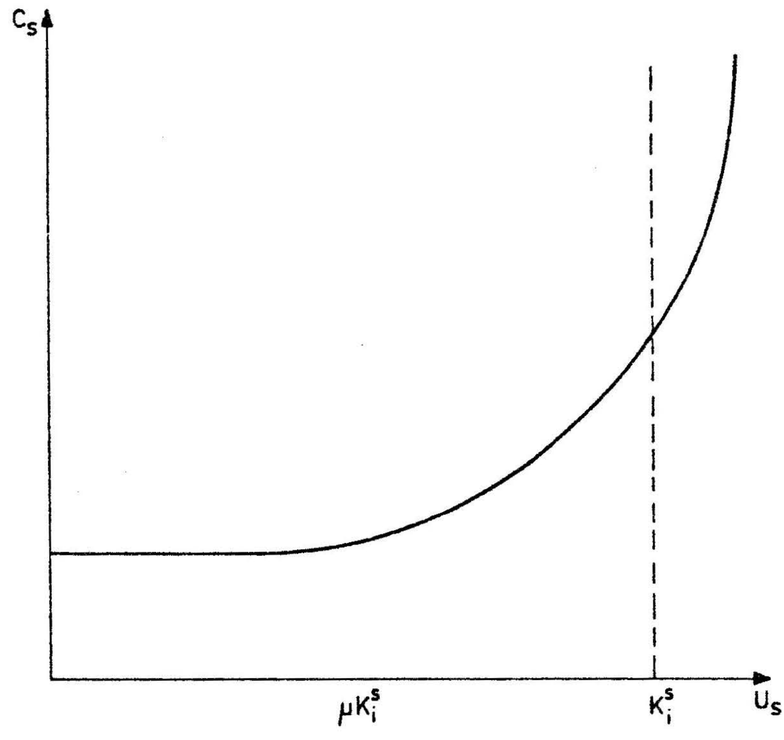


Fig. 2 Forma de la función de costos en la sección de la ruta s para flujos dados en todas las seccione de ruta restantes.