

## LA FORMA INCREMENTAL DEL MODELO LOGIT; APLICACIONES.

FRANCISCO J. MARTINEZ  
Departamento de Ingeniería Civil  
Universidad de Chile  
Casilla 228/3, Santiago-Chile.

### RESUMEN

En los últimos años, el modelo Logit se ha constituido en una herramienta frecuentemente utilizada en estudios de políticas y planificación de transporte de pasajeros. Si bien el modelo ha demostrado importantes cualidades que se derivan de la base teórica que lo sustenta y de la simplicidad que lo caracteriza, no es menos cierto que su utilización en estudios de transporte consume importantes cantidades de recursos debido a la cantidad y calidad de la información que se requiere. Además, el uso del modelo es relativamente delicado en lo que se refiere al tratamiento de los errores, los que son causados por varias fuentes.

En su versión original, el modelo Logit calcula las probabilidades estimando el nivel de utilidad que es percibido por el individuo en cada una de las alternativas de elección. En las formas incrementales en cambio, esto se logra conociendo las probabilidades actuales de elección de las alternativas disponibles (por ejemplo, probabilidad de elección de modos de transporte), y calculando sólo el incremento sobre la actual. Esta nueva forma de utilizar el modelo Logit, presenta ventajas interesantes para las aplicaciones concretas en estudios de transporte, pues se logra atenuar, en algún grado, las dificultades mencionadas anteriormente.

El objetivo principal de este trabajo es divulgar la técnica de las formas incrementales del modelo para aplicaciones en el campo de la predicción de demanda en estudios de transporte. En tal sentido, se presenta aquí la forma incremental del modelo Logit en su versión multinomial (presentadas por varios autores anteriormente) y luego se desarrolla la forma incremental del modelo Logit Jerárquico, así como otras formas incrementales para aplicaciones relacionadas con el modelo Logit. Finalmente se discute el uso de las formas incrementales y se analiza un caso real en que se utilizó esta técnica para predecir la partición modal en transporte urbano de pasajeros.

## 1. INTRODUCCION

El problema de predecir el comportamiento de los usuarios frente a un cambio en las características tanto del sistema de transporte como de los individuos mismos, es el tema que aborda la modelación de la demanda por transporte. El tema es en sí complejo debido a la peculiaridad de las decisiones que los individuos toman, lo que ha provocado el desarrollo de diversos enfoques para abordarlo.

El enfoque más reciente utiliza el camino de modelar el comportamiento desde una perspectiva individual (en vez de colectiva) y se le conoce como enfoque desagregado. En este tipo de modelos, el modelo Logit (Domencic y McFadden, 1975) es probablemente el más utilizado debido a su gran simpleza operacional, lo que le otorga un gran atractivo. Por ello, ha sido detalladamente tratado en la literatura, alcanzando paulatinamente nuevas capacidades y mayor flexibilidad y robustez. Entre las mejoras importantes hay que señalar el tratamiento de alternativas de elección que presentan algún grado de correlación entre sí, lo que da origen al modelo Logit Jerárquico (Williams, 1977; Daly y Zachary, 1978).

Así la familia de modelos Logit se ha transformado en una herramienta popular entre los analistas de demanda en transporte, la que es frecuentemente utilizada en estudios de planificación para predecir el comportamiento de los usuarios en la elección de modo. En comparación con otros modelos de demanda, el Logit es simple de utilizar. Sin embargo para predecir la demanda futura presenta al menos dos dificultades prácticas:

- i) es necesario recolectar y manejar gran cantidad de información, muy detallada, que describe las características tanto del sistema de transporte como de los individuos que lo utilizan; esta información no está normalmente disponible y obtenerla puede significar una fracción importante del presupuesto del estudio completo de transporte; y
- ii) dado que el enfoque de modelación es individual (desagregado), para obtener predicciones de demanda sobre un grupo de personas (agregado), es necesario utilizar métodos de agregación que pueden incorporar sesgos en la predicción y por lo tanto requieren de un análisis cuidadoso.

Este trabajo presenta técnicas que disminuyen o permiten manejar en mejor forma ambos problemas y está especialmente orientado a aplicaciones concretas en estudios de demanda de transporte. Se trata de los métodos de predicción incremental (formas incrementales) o también llamados de pivoteo (pivot point). Estos consisten básicamente en que la probabilidad de elección a futuro de una determinada alternativa se calcula sobre la base de la probabilidad, real y observable, presente en un estado cualquiera del sistema de transporte, y los cambios que directamente ocasionaría la nueva situación.

Como se muestra en este trabajo, con esta técnica se consigue simplificar la utilización práctica del modelo Logit, mediante el uso de información agregada. Como consecuencia, se puede obtener interesantes ahorros de recursos en los procesos de predicción de demanda en estudios de transporte.

En la próxima sección se muestra la derivación de la forma incremental del modelo Logit Multinomial (MNL), obtenida en trabajos anteriores. Siguiendo un desarrollo análogo, en la sección número tres se deriva la forma incremental del modelo Logit Jerárquico (HL). Estas formas se complementan, en la cuarta sección, con otras fórmulas de formas incrementales para ciertas aplicaciones usuales del modelo Logit. El punto quinto trata problema de la agregación y el uso de información agregada en las formas incrementales y, el punto sexto describe brevemente un estudio donde se aplicaron formas incrementales. Algunos comentarios al uso de estas técnicas se presentan en el punto séptimo.

## 2. EL LOGIT MULTINOMIAL INCREMENTAL (IMNL).

El Logit Incremental es un método de predicción de demanda basado en el modelo Logit totalmente consecuente con la teoría (Domencic y McFadden, 1975); de hecho es sólo una expresión diferente del modelo en su versión estándar, que presenta ciertas ventajas en el campo de predicción de demanda en estudios de transporte.

La derivación de la forma IMNL que se describe brevemente a continuación, es algebraicamente simple y ha sido tratada en diversos trabajos (Ver por ejemplo Atherton y Ben-Akiva, 1977 y Kumar, 1980). Consideremos la expresión del modelo Logit

$$P_{(i/A)} = \frac{\exp(V_i)}{\sum_{j \in A} \exp(V_j)} \quad (1)$$

que permite calcular la probabilidad ( $P_{(i/A)}$ ) de que un individuo escoja la alternativa  $i$  de un conjunto  $A$  de alternativas disponibles;  $V_i$  es una medida de la utilidad observable que el individuo percibe al elegir la alternativa  $i$ . Generalmente,  $V_i$  se estima mediante una función lineal de ciertas variables que permiten explicar el comportamiento del individuo; características del nivel de servicio y costo de la alternativa  $i$  y las características socioeconómicas del individuo modelado. Si ordenamos las variables que describen ambos aspectos en un vector  $Z_i^1$ , entonces

$$V_i = \sum_k \theta_k * Z_{ki} = \theta \cdot Z_i \quad (2)$$

en que  $\theta_k$  es un parámetro que da cuenta del nivel de utilidad que el individuo percibe por cada unidad de la variable  $Z_k$ .

Consideramos una situación en que el vector  $Z$  cambia a un estado  $Z'$ , es decir  $Z' = Z + \Delta Z$ , donde  $\Delta Z$  contiene los cambios experimentados por

<sup>1</sup> Utilizaremos la barra bajo la variable para identificar vectores, y la notación  $*$  y  $\cdot$  para la multiplicación escalar y vectorial respectivamente.

las variables <sup>2</sup>, de tal forma que  $\underline{Z}$  y  $\underline{Z}'$  contienen los valores que toman las variables en un estado inicial y final respectivamente<sup>3</sup>. Si utilizamos la ecuación (1) para determinar la probabilidad de elección en el estado final  $(P'_{(i/A)})^4$ , esto es:

$$P'_i = \frac{\exp(V'_i)}{\sum_{V_j \in A} \exp(V'_j)} \quad (3)$$

y reemplazamos  $V'$  por  $V + \Delta V$  se obtiene:

$$P'_i = \frac{\exp(V_i) * \exp(\Delta V_i)}{\sum_{V_j \in A} \exp(V_j) * \exp(\Delta V_j)} \quad (4)$$

Dividiendo el numerador y denominador del término de la mano derecha por la expresión  $\sum_j \exp(V_j)$ , y luego expandiendo la sumatoria del denominador, se obtienen expresiones que se pueden reemplazar por la probabilidad de la ecuación (1). Luego se obtiene:

$$P'_i = \frac{P_i * \exp(\Delta V_i)}{\sum_{j \in A} P_j * \exp(\Delta V_j)} \quad (5)$$

que es la forma incremental del modelo Logit Multinomial, o la forma IMNL (Kumar, 1980).

<sup>2</sup> Naturalmente, el vector  $\underline{\Delta Z}$  puede contener elementos nulos, en el caso en que algunas de las características que describen el sistema de transporte y/o al usuario permanezcan inalteradas en la situación final respecto de la inicial.

<sup>3</sup>

Utilizaremos la notación apóstrofe (') para indicar variables o vectores en el estado final. La ausencia de este signo indica estado inicial o estado supuestamente conocido desde el cual se predice.

<sup>4</sup>

Por simplicidad de notación, utilizaremos  $P_{(i/A)} = P_i$ .

La ecuación (5) permite observar, claramente que la probabilidad de elección de una alternativa ( $P'_i$ ), puede calcularse utilizando las probabilidades observadas del conjunto de alternativas disponibles en una situación distinta cualquiera, ( $P_j, \forall j \in A$ ) y la diferencia en las utilidades percibidas por el individuo en ambas situaciones. Es decir, se predice la demanda en una determinada situación "pivoteando" sobre otra conocida, que llamaremos inicial o base, e incorporando solamente la información que describe la diferencia entre ésta y el estado final, que es la mínima necesaria para ligar ambos estados. En el caso de proyectos de transporte en los que se requiere determinar los cambios en la proporción de viajeros en cada modo de transporte, se puede utilizar, por ejemplo, la situación actual u otra observada como situación base para abordar el análisis incremental.

En el caso particular de que la función de utilidad tenga forma lineal, como se presenta en la ecuación (2), la función  $V$  es de la siguiente forma:

$$\Delta V_i = \sum_k \theta_k * \Delta Z_{ik} = \theta * \Delta Z_i \quad (6)$$

y si reemplazamos  $\Delta V$  en la ecuación (5), se obtiene:

$$P'_i = \frac{P_i * \exp(\theta * \Delta Z_i)}{\sum_{j \in A} P_j * \exp(\theta * \Delta Z_j)} \quad (7)$$

que la forma MNL para modelos Logit usuales con función de utilidad lineal.

Conviene destacar que las principales ventajas de la forma incremental, descritas más adelante, provienen de poder obtener una expresión de la probabilidad con las características de la ecuación (7), donde  $P' = f(\theta, \Delta Z)$  no dependa de los valores iniciales de las variables  $Z$ . Para poder derivar formas incrementales que posean esta característica, se debe cumplir la condición necesaria de que la función de utilidad  $V$  sea separable, es decir que se pueda escribir la igualdad:  $V' = V + \Delta V$  tal que  $\Delta V = f(\theta, \Delta Z)$ . En caso contrario,  $\Delta V = f(\theta, \Delta Z, Z)$  y por lo tanto  $P'$  también será función de  $Z$  inicial. Esta condición estará asegurada si la función  $V$  es de la forma lineal (en parámetros y variables), lo que corresponde al caso más usual en estudios de transporte.

A continuación se describen brevemente las principales características del método comparándolo con la forma usual del modelo Logit.

i) Se reduce la cantidad de información necesaria para predecir cambios en la demanda; en efecto no se requiere conocer en detalle los vectores  $Z$  y  $Z'$ , sino solamente las diferencias entre ambos ( $\Delta Z$ ). Por otra parte se requiere conocer la partición modal inicial del conjunto de alternativas disponibles. Dependiendo de la información que se disponga, esto puede significar una disminución en los errores involucrados en la información que se utiliza además de una disminución en los costos de recolección de datos. Se reduce también la cantidad de cálculos necesarios debido a que no se recalculan la utilidades, sino solamente las variaciones de ellas.

ii) Por construcción, la forma IMNL es sólo una forma distinta de expresar el modelo Logit Multinomial, en consecuencia conserva inalterados los supuestos, ventajas y restricciones de éste último. El método no incorpora nuevas restricciones; en particular permite una predicción multivariada (varios elementos no nulos en el vector  $\Delta Z$ ). Por lo tanto, el resultado obtenido con la forma IMNL será idéntico al que resulta de estimar con el modelo Logit en su forma usual.

iii) Naturalmente, se mantiene la propiedad de las probabilidades:

$$\sum_j P_j = 1 \quad (\text{si } \sum_j P_j = 1)$$

iv) Quizás la principal cualidad de este método radica en el uso de la técnica de pivotar sobre un estado conocido sin necesidad de incorporar restricciones adicionales. Si se piensa por ejemplo en el caso de predicción de la partición modal de la demanda por transporte, en que las probabilidades observadas en la situación base reflejan un estado de equilibrio real del mercado de transporte, se notará que con la técnica incremental dicho equilibrio es ingresado y utilizado para la predicción, lo que le otorga al método mayor confiabilidad, y también simplicidad, que si se tratase de una situación modelada vía estimación de utilidades. Sin perjuicio de lo anterior, se notará que permanece inalterada la necesidad de contar con un modelo o con el conjunto de parámetros de la función de utilidad, y que se mantienen las dificultades en la modelación de alternativas.

### 3. EL LOGIT JERARQUICO INCREMENTAL (IHL).

El modelo Logit Jerárquico (Williams, 1977, Daly y Zachary, 1978), al igual que el Multinomial, tiene una forma funcional exponencial. En consecuencia, por simple analogía, se puede intuir la posibilidad de desarrollar una forma incremental para este modelo. Para su derivación pensemos en un modelo con una estructura jerárquica sencilla como el de la Figura 1, que presenta dos niveles de alternativas correlacionadas: un nivel inferior (I), compuesto por un conjunto  $A^I$  de alternativas disponibles, y un nivel superior (S) con un conjunto  $A^S$  de alternativas de elección (que incluye entre otras, la alternativa anidada en el nivel inferior). Además supondremos que las funciones de utilidad son lineales (Ver Ortúzar y Serra, 1987).

Sino se dispone de software adecuado (ver Daly, 1987, Ortúzar, Achondo e Ivelic, 1987), es posible calibrar un modelo Logit Jerárquico

como el del ejemplo, estimando modelos Logit multinomiales para cada uno de los niveles; desgraciadamente, en este caso se pueden obtener diferentes vectores de parámetros de sensibilidad para el nivel inferior y superior, que los denotaremos  $\theta^I$  y  $\theta^S$  respectivamente. Así, la utilidad que percibe un individuo por viajar en un modo de transporte que pertenece al nido inferior,  $V_i = V_{(i \in A^I)}$ , o superior,  $V_s = V_{(s \in A^S)}$ , se calculan como:

$$V_i = \theta^I \cdot Z_i \quad (8)$$

$$V_s = \theta^S \cdot Z_s \quad (9)$$

respectivamente; excepto la utilidad esperada de las alternativas anidadas en el nivel inferior,  $V_i = V_{(i \in A^S)}$ , que tiene la forma particular siguiente (ver Ortúzar, 1983):

$$V_i = \theta \cdot EMU + \alpha \cdot W \quad (10)$$

en que  $\theta$  y  $\alpha$  son parámetros estimados por el modelo Logit y  $W$  es el vector de aquellas variables con idéntico valor para todas las alternativas del nido.  $EMU$  es la utilidad máxima esperada de las alternativas presentes en el nido y se calcula con la expresión (ver Sobel, 1980).

$$EMU = \ln \left[ \sum_{A^I} \exp(V_i) \right] \quad (11)$$

Por otra parte, en el modelo jerárquico, la expresión para calcular la probabilidad ( $P_i$ ) con que se elige una alternativa  $i$  del nivel inferior, se obtiene como la probabilidad compuesta por la probabilidad de que se elija el nido en el nivel superior,  $P_{(i \in A^S)}$ , multiplicada por la probabilidad condicional de elegir la alternativa  $i$  entre las disponibles en el nido,  $P_{(i \in A^I/I)}$ ; luego,

$$P_i = P_{(i \in A^S)} \cdot P_{(i \in A^I/I)} \quad (12)$$

5

El lo sucesivo, los sub (o super) índices  $i$  y  $s$  denotan que el elemento referido pertenece al nido inferior y superior respectivamente. Como caso especial, el sub (o super) índice  $i$  se refiere a la alternativa nido inferior, con  $i \in A$ .

La probabilidad de elegir una alternativa perteneciente al nido superior ( $P_s$ ), se obtiene en forma análoga al caso multinomial (ecuación 1) considerando el conjunto  $A^S$  de alternativas.

Para derivar la forma incremental del modelo Logit Jerárquico estimado secuencialmente (IHL), supongamos que  $Z^I$ ,  $Z^S$  y  $W$  sufren modificaciones contenidas en los vectores  $\Delta Z^I$ ,  $\Delta Z^S$  y  $\Delta W$  respectivamente. El tratamiento algebraico en general es similar al caso multinomial, excepto por la presencia en el nivel superior de una alternativa que reúne un conjunto de alternativas, caso que analizaremos a continuación.

En la situación que se desea predecir, la utilidad máxima esperada del nido  $I$  es

$$EMU^I = \ln \left[ \sum_{A^I} \exp(V_j^I) \right] \quad (13)$$

y como  $V_j^I = V_j + \Delta V_j$ , se obtiene:

$$EMU^I = \ln \left[ \sum_{A^I} \exp(V_j) * \exp(\Delta V_j) \right] \quad (14)$$

Dividiendo y multiplicando el término entre paréntesis por  $\sum_{A^I} \exp(V_j)$  y considerando la ecuación (1) para reemplazar términos, se obtiene:

$$EMU^I = \ln \left[ \left( \sum_{A^I} P_j * \exp(\Delta V_j) \right) * \sum_{A^I} \exp(V_j) \right] ;$$

o bien,

$$EMU^I = \ln \left[ \sum_{A^I} P_j * \exp(\Delta V_j) \right] + EMU \quad (15)$$

por lo tanto,

$$\Delta EMU = EMU^I - EMU = \ln \left[ \sum_{A^I} P_j * \exp(\Delta V_j) \right] \quad (16)$$

que representa la variación en la utilidad máxima esperada en el nido, debida a un cambio en las variables contenidas en el vector  $Z^I$ . Esta descomposición permite desarrollar las formas IHL.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Una derivación independiente con una interesante discusión adicional se presenta en Bates et al. 1977.



Analicemos ahora la separabilidad de la función de utilidad del nido ( $V_I$ ) considerando la ecuación (10) en la situación modificada; luego:

$$V_I' = \theta * EMU' + \alpha * W' \quad (17)$$

que se puede descomponer, usando la ecuación (16), en

$$V_I' = \theta * EMU + \alpha * W + \theta * \Delta EMU + \alpha * \Delta W, \quad (18)$$

y reemplazando la ecuación (12), se puede expresar como

$$V_I' = V_I + \theta * \Delta EMU + \alpha * \Delta W = V_I + \Delta V_I, \quad (19)$$

donde hemos definido la variación de la utilidad del nido I como:

$$\Delta V_I = \theta * \Delta EMU + \alpha * \Delta W \quad (20)$$

La separabilidad que muestra la ecuación (19), permite derivar las formas incrementales. La probabilidad de elegir una alternativa i del nido en la situación modificada, se puede obtener a partir de la ecuación (12), esto es:

$$P_i' = P_i' * P'_{(i/I)} \quad (21)$$

Dado que las probabilidades ( $P_i'$ ) y ( $P'_{(i/I)}$ ), provienen independientemente de un modelo MNL, es posible reemplazar, en ambos términos, directamente la forma incremental IMNL presentada en la ecuación (5), luego:

$$P_i' = \frac{P_i * \exp(\Delta V_I)}{\sum_{S \in A} P_S * \exp(\Delta V_S)} * \frac{P_i * \exp(\Delta V_I)}{\sum_{A} P_j * \exp(\Delta V_j)} \quad (22)$$

Análogamente, la probabilidad de elegir una alternativa k del nivel superior es:

$$P_k' = \frac{P_k * \exp(\Delta V_k)}{\sum_{S \in A} P_S * \exp(\Delta V_S)} \quad (23)$$

Las ecuaciones (22) y (23) son las formas incrementales de la probabilidad de elegir una alternativa del nido inferior y superior respectivamente, que llamaremos la forma IHL. Por construcción, esta forma hereda las restricciones y características del modelo Logit Jerárquico y, además son válidos los comentarios señalados anteriormente para la forma IMNL. Se notará, por otra parte, que es posible derivar formas incrementales para otras estructuras jerárquicas, distintas a la utilizada como ejemplo (ver Fig. 1).

#### 4. OTRAS FORMAS INCREMENTALES

A partir de las formas IMNL e IHL derivadas en los puntos anteriores, es fácil concebir que en otras aplicaciones del modelo Logit también se puedan obtener formas incrementales y así, aprovechar las ventajas comunes a estas formas que se han discutido anteriormente. Aquí presentaremos, a modo de ejemplo, dos casos en que las formas incrementales resultan interesantes.

##### 4.1 Medidas de beneficio a usuarios.

Una medida del beneficio que perciben los usuarios del sistema de transporte, por utilizar una nueva facilidad generada por ejemplo por un proyecto, es el Excedente Marshalliano de Consumidor (EMC). Si se utiliza un modelo Logit Multinomial para predecir el cambio en la partición modal que ocurrirá como resultado de las modificaciones introducidas en el sistema, la variación unitaria que experimenta el EMC se puede calcular mediante la expresión:

$$EMC = -\frac{1}{\theta p} \ln \frac{\sum_i \exp(V_i')}{\sum_i \exp(V_i)} \quad (24)$$

que corresponden al resultado de la integración directa de la curva de demanda entre los estados inicial y final (Williams, 1976);  $p$  es el parámetro que acompaña la variable costo del viaje (usualmente la tarifa) en la función de utilidad del modelo MNL. (Jara-Díaz y Farah, 1988). Esta expresión es válida sólo para modelos de partición modal sin efecto ingreso (Jara-Díaz y Videla, 1987).

Para desarrollar la forma incremental de la ecuación (24) notemos que el logaritmo natural de la expresión entre paréntesis se puede expresar como:  $EMU' - EMU = \Delta EMU$ ; luego,

$$\Delta EMC = -\frac{1}{\theta p} * \Delta EMU \quad (25)$$

y reemplazando  $\Delta EMU$  de la expresión 16,

$$\Delta EMC = \frac{-1}{\theta p} * \ln \sum_{i \in A} P_i \exp(\Delta V_i) \quad (26)$$

La ecuación (26) constituye la forma incremental del excedente marshalliano del consumidor en el modelo Logit Multinomial; naturalmente son válidas las ventajas y características pertinentes, mencionadas para la forma IMNL.

#### 4.2 Análisis de parámetros de sensibilidad.

Supongamos que se conoce la probabilidad de elección de un modo de transporte cualquiera  $i$ , tanto en la situación inicial ( $P_i$ ) como en otra final ( $P_i^1$ ), y que se cuenta con un modelo Logit Multinomial que es capaz de predecir tales cambios de partición modal. Analicemos el caso en que la diferencia entre ambos estados es exclusivamente consecuencia del cambio en solamente una de las variables contenidas en la función de utilidad del modelo, y que la llamaremos  $Z_i^*$ . Es el caso de un corredor urbano servido por varios modos de transporte, en que eventualmente uno de los modos modifica su tarifa de viaje permaneciendo constante tanto las tarifas en el resto de los modos como las características socioeconómicas de los individuos.

Recordemos la forma IMNL (ecuación 7), notando que en éste caso particular  $\theta \cdot \Delta Z_i = \theta^* \cdot \Delta Z_i^*$  (el resto de los elementos de la sumatoria son nulos y  $\theta^*$  es el parámetro que acompaña a  $Z^*$  en la función de utilidad), luego se obtiene:

$$P_i^1 = \frac{P_i \exp(\theta^* \cdot \Delta Z_i^*)}{\sum_{j \in A} P_j \exp(\theta^* \cdot \Delta Z_j^*)} \quad ;$$

pero como sólo el modo  $i$  ha experimentado una variación de la variable  $Z^*$ , el denominador se simplifica a:

$$P_i^1 = \frac{P_i \exp(\theta^* \cdot \Delta Z_i^*)}{\sum_{j \in A} P_j + P_i \exp(\theta^* \cdot \Delta Z_i^*)} \quad (27)$$

Si aceptamos que la ecuación (1) se puede aplicar a un conjunto de individuos homogéneos (Ver Punto 5.1), se puede reemplazar la probabilidad de elección individual por la proporción en que el modo es

elegido, que llamaremos  $S_i$ . Despejando el parámetro  $\theta^*$  en la ecuación (27) se obtiene<sup>7</sup>:

$$\theta^* = \frac{-1}{\Delta Z_i^*} * \ln \left[ \frac{S_i'}{S_i} \frac{(1-S_i)}{(1-S_i')} \right] \quad (28)$$

La ecuación (28) establece el valor que debería tener el parámetro  $\theta^*$  para reproducir exactamente el cambio observado en la partición modal del modo  $i$ , como producto de la variación de la variable  $Z^*$ . Luego, si para un grupo homogéneo de individuos, se dispone de información de la partición modal de un modo de transporte, antes y después de que este se vea afectado por un cambio en una de las variables de nivel de servicio, es posible estimar el valor apropiado del parámetro asociado a esa variable. Este procedimiento puede ser útil como método de análisis de los parámetros obtenidos en la calibración de modelos MNL. Naturalmente, la ecuación (28) supone que la causa única (o claramente principal) para que la partición modal se modifique de  $S$  a  $S'$  es el cambio contenido en  $\Delta Z^*$ .

## 5. EL PROBLEMA DE LA AGREGACION

Una dificultad de predecir demanda con modelos desagregados, que predicen el comportamiento individual, es la necesidad de agregar para predecir comportamientos grupales. En efecto la ecuación (1) es válida para decisiones individuales, sin embargo, para efectos de planificar el transporte, se requiere predecir la partición modal de grupos de individuos.

En el modelo MNL original, el problema consiste en definir como obtener las variables del vector  $Z$ , agregadas, para reproducir el comportamiento grupal, utilizando las expresiones derivadas a nivel individual. En el caso de las formas incrementales el problema de agregación es particularmente importante debido a que las expresiones que hemos analizado contienen además las probabilidades iniciales como parte de las información básica.

Afortunadamente, el tema ha sido estudiado para el modelo MNL (Kumar, 1980). En forma resumida, para utilizar la ecuación (1) a nivel grupal, sin incurrir en sesgos sistemáticos, se debe cumplir que los individuos del grupo sean "homogéneos", esto es, que dispongan de igual conjunto de alternativas de transporte y que los costos y tiempos involucrados en el

<sup>7</sup> En este paso se reemplaza  $\sum_{j \neq i} S_j$  por  $(1-S_i)$ .

viaje y las características socioeconómicas de los individuos sean idénticas para todos los individuos del grupo.

Cumpléndose satisfactoriamente esta condición, se puede aplicar la ecuación (1) para predecir la partición modal del grupo. Muy probablemente el grupo en estudio no cumplirá a cabalidad esta condición y es necesario utilizar métodos que eviten errores de gran magnitud. El método más simple, llamado inocente o "naive", que consiste en obtener promedios zonales de las variables del vector  $Z$  y reemplazarlos en la función de utilidad, induce sesgos debido a la no-linealidad de la ecuación (1). Sin embargo, el sesgo se minimiza con el método de "clasificación de la población" en zonas y estratos, de tal forma de aplicar el método inocente a grupos más homogéneos en términos de las condiciones precedentes. Si se dispone de información de una muestra adecuada de la población se puede utilizar el "método de enumeración muestral" (ver por ejemplo Ortúzar, 1984).

Koppelman (1976), en un estudio que compara los errores de agregación de los varios métodos disponibles, concluye que el error de agregación, en todos los métodos de agregación estudiados, es "substancialmente inferior" cuando se utilizan formas incrementales en comparación con los métodos originales. Este resultado se obtuvo en todas las políticas de transporte que ese estudio consideró. En consecuencia, el uso de las formas incrementales tiene ventajas desde el punto de vista del problema de agregación.

## 6. APLICACION DE FORMAS INCREMENTALES

En esta sección se señalan algunos aspectos importantes en la utilización de formas incrementales, que se concluyen del uso de esta técnica en el Estudio de Tarificación del Centro de Santiago (Citra, 1987). En este caso se utilizó, la forma IMNL para predecir los cambios en la partición modal del transporte de pasajeros de Santiago que se producirían como consecuencia de la implementación de medidas de tarificación vial en el centro de la ciudad.

En el caso multinomial, la expresión (7) muestra que la información necesaria para predecir la partición modal es:

i) La partición modal en un estado base ( $P_i, \psi_i(A^I)$ ),

ii) la variación que experimentan las variables explicativas ( $\Delta Z_i$ ), y

iii) los parámetros de sensibilidad asociados con las variables que se modifican del vector  $Z$  en la función de utilidad del modelo Logit ( $\theta$ )<sup>8</sup>.

---

<sup>8</sup> En el caso de formas IHL se requiere conocer además los parámetros asociados a la existencia de nidos ( $\theta$ ).

Tal información debe disponerse para cada unidad de análisis (o de predicción) que dependa de las características del estudio. A modo de ejemplo, en el estudio de tarificación mencionado, donde para agregar se utilizó el método de clasificación de la población, la unidad de análisis estaba definida por las siguientes características:

- i) Par origen-destino del viaje, en que el Centro se divide en varias zonas y el resto de la ciudad se divide en corredores cuasi-homogeneos en cuanto a disponibilidad de servicios transporte público.
- ii) Segmentación de los individuos (estrato), dependiendo de la disponibilidad de automóvil en el hogar.
- iii) Propósito del viaje, diferenciando motivo, trabajo y otros.
- iv) Período del día en que se realiza el viaje. Se consideraron tres períodos.

Naturalmente, si se utiliza el modelo MNL, la cantidad de información a recolectar y procesar requiere de mucho esfuerzo y costo.

Una ventaja notable del uso de las formas incrementales es que la información que requiere normalmente está disponible o es sencilla de obtener. En efecto, la partición modal es sencillamente la proporción de individuos que elige cada modo de transporte disponible en el estrato, la que se obtuvo mediante encuestas disponibles (Encuesta Origen Destino, 1986). Los valores del vector  $\Delta Z$  se desprenden directamente de las políticas y/o proyectos en estudio, que en nuestro ejemplo consisten en cambios en los costos (o tarifas) del viaje y también cambios en los tiempos de viaje producto de cambios en la congestión por variación de la partición modal. Finalmente, los parámetros  $\theta$  se obtienen de la calibración de modelos Logit, proceso que es más complejo y exige información muy detallada, por lo que se recomienda investigar la disponibilidad de modelos previamente calibrados aptos para las unidades de análisis en las que se requiere predecir demanda; el estudio utilizó modelos MNL calibrados previamente en corredores de Santiago (Ver Ortúzar, 1986).

Especialmente interesante resulta el uso de modelos previamente calibrados cuando se trabaja con formas incrementales. En efecto, lo que se está utilizando de los modelos son solamente los parámetros asociados a las variables de nivel de servicio que efectivamente experimentan un cambio. Luego, para utilizar modelos "prestados", no se exige que el modelo completo (el conjunto completo de los parámetros de la función de utilidad) sea apropiado a la unidad de estudio, sino solamente un subconjunto de parámetros. En particular no es necesario ajustar las constantes modales de la función de utilidad. Esta simplificación es consecuencia de la presencia de la probabilidad (o partición modal) inicial en las normas incrementales.

## 6. CONCLUSIONES

Parece claro que, si se dispone de modelos previamente calibrados, las formas incrementales de los modelos Logit pueden proporcionar interesantes ventajas para estudios de planificación en transporte, a

saber: se requiere menor información que si se utiliza la forma original del Logit para predecir demanda, y la información que se necesita es fácil de obtener y generalmente está disponible. Esto conduce a disminuir los costos de estudios de planificación de transporte.

Por otra parte, es interesante notar que el ahorro de información proviene en parte de no tener que estimar los vectores  $Z$  y  $Z'$ ; en su reemplazo, la información se obtiene de otras fuentes:  $P_i$  y  $\Delta Z$ . Es decir, se predice el nuevo estado pivotando sobre uno observado, lo cual es muy confortable para el modelador del sistema de transporte pues le permite utilizar información directamente contrastable con la realidad y por lo tanto susceptible de verificar, controlando de esta manera ciertas fuentes de errores. Además, existen ventajas potenciales que provienen de la minimización de los errores de agregación en la predicción.

#### AGRADECIMIENTOS

Mis agradecimientos por sus interesantes comentarios a T. Gálvez y S. Jara, de la Universidad de Chile. A. S. González, de Citra Ltda. y A. Valenzuela, de la Dirección General del Metro por su participación en la aplicación aquí presentada y a J. de D. Ortúzar, de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

#### REFERENCIAS

Atherton, T.J. y Ben-Akiva, M. (1977) Methodology for short-range travel demand predictions: analysis of carpooling incentives. J. Transport Economics and Policy 11(3), 224-261.

Bates, J., Ashley, D. y Hyman, G. (1987). The Nested Incremental Logit Model: Theory and Application to Modal Choice. 15th P.T.R.C. Summer Annual Meeting, University of Bath, 7-11 Septiembre, Inglaterra.

CITRA Ltda. (1987) Estudio de Tarificación del Centro de Santiago. Realizado para SECTU, Santiago.

Daly A.J. (1987). Estimating Tree Logit Models. Transportation Research, Vol 21 B, N° 4, pp 251-267.

Daly A.J. y Zachary, S. (1978). Improved multiple Choice model. En. D.A. Hensher y M.A. Daloi (Eds.). Determinants of travel Choice. Saxon House, Sussex.

Jara-Díaz, S. R y Farah, M. (1988) Valuation of user's benefits in transport systems. Transport Reviews (en prensa).

Jara-Díaz, S.R. y Videla, J. (1987). On the role of income in the evaluation of users' benefits from mode choice models. Fifth International Conference on Travel Behaviour, Aix-en-Provence, 20-33 Octubre, Francia.

Koppelman, F.S. (1976) Guidelines for Aggregate Travel Prediction Using Disaggregate Choice Models. Transpn. Res. Rec. 610, 19-24.

Kumar, A. (1980) Use of incremental form of logit models in demand analysis. 59th Annual Meeting of the Transportation Research Board.

Domencich, T. A. Y McFadden, D. (1975) Urban Travel Demand: A Behavioural Analysis. North Holland, Amsterdam.

Ortúzar, J. de D. (1983). Nested Logit Models for mix mode Travels in urban corridors. Transportation Research, Vol 17 A, Nº 4, pp. 283-299.

Ortúzar, J. de D. (1984). Una introducción a los modelos agregados de demanda de transporte. 1er Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte, 7-9 Mayo, Santiago.

Ortúzar, J. de D. (1986). The cultural and temporal transferability of discrete choice disaggregate mode split model. World Conference on Transport Research, Vancouver 11-15 Mayo, Canadá.

Ortúzar, J. de D. y Serra, M. (1987). Un modelo Logit Jerárquico de partición Modal para el corredor Las Condes-Centro de Santiago. Ingeniería de Sistemas, Vol 5, Nº 1 pp. 11-24.

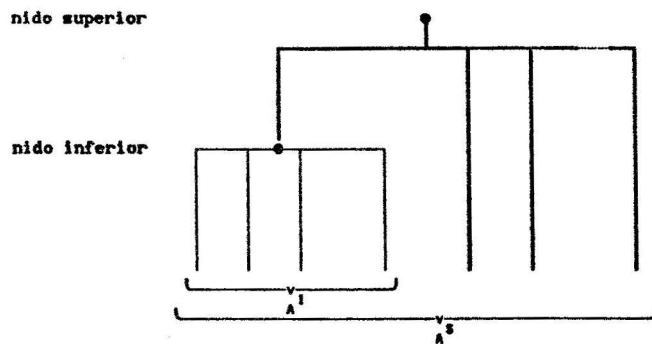
Ortúzar, J. de D., Achondo, Ivelic, A.M. (1987). Secuential and full information estimation of Hierarchy Logit Models: Some new evidence. 11th Triennial Conference on Operation Research. Buenos Aires, 10-14 Agosto, Argentina.

Sobel, K. L (1980). Travel Demand Forecasting with the nested logit model. Transportation Research Record 775, 48-55.

Williams, H (1976). Travel Demand models, duality relations and user benefit analysis. Journal of Regional Science 16, 147-166.

William, H.C. W.L. (1977). On the formation of travel demand models and economic evaluation methods of user benefit. Environmental Planning, Vol 9 A, Nº 3, pp 285-344.





**Fig. 1 : Estructura jerárquica de las alternativas de elección.**