GENERALIZACION DEL MODELO DE DISPERSION DEL TRAFICO BASADO EN UNA DISTRIBUCION UNIFORME DE TIEMPOS DE VIAJE.

Jaime Gibson

Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile

Casilla 228/3, Santiago, Chile.

RESUMEN

Este trabajo presenta el desarrollo completo de un modelo de dispersión del tráfico a partir del supuesto de que los tiempos de viaje siguen una distribución uniforme, inferior y superiormente acotada. Es una generalización del modelo de Tracz, el que no incorpora adecuadamente la representación de la circulación mediante histogramas cíclicos de flujo.

El modelo queda en función de dos parámetros, $\bar{t}$ y T, sin necesidad de hacer supuestos sobre el tiempo máximo de viaje y se llega a una expresión exacta para el factor de dispersión F.

Algunas propiedades y casos particulares del modelo son discutidos. Asimismo, se demuestra que puede generarse a partir del modelo comúnmente usado - basado en una distribución cuasi-geométrica de los tiempos viaje - y se comparan algunas de sus características.

1. INTRODUCCION

La dispersión de los grupos de vehículos es un fenómeno clave en la representación macroscópica del tráfico en redes, de gran importancia en los modelos orientados a gestión del tránsito. La existencia de este fenómeno se debe, exclusivamente , a diferencias entre las velocidades de los vehículos que conforman un grupo. De aquí que la distribución de velocidades esté en el centro de los modelos de dispersión. Como el grado en que esta última se manifiesta depende de la distancia que ha recorrido el grupo como tal, se prefiere trabajar con distribuciones de tiempo de viaje.

Aunque la escasa evidencia empírica disponible permite afirmar que las distribuciones típicas que mejor se ajustan son una normal o una más compleja (Pearson tipo IV, según Seddon y Dixon, 1973), la más empleada,con mucho, es la implícita en la ecuación recursiva de Robertson (1969). Gibson y Aguirre (1984) demostraron que ésta es una cuasi-geométrica con un supuesto sobre el valor del tiempo máximo de viaje. La popularidad de esta distribución se debe a que la ecuación de Robertson está incorporada a los modelos computacionales más usados mundialmente en gestión del tránsito en redes (TRANSYT y SATURN). Seguramente, ha descansado también en que varios autores llegaron a la conclusión de que la distribución elegida tiene una influencia poco significativa sobre las predicciones de dispersión (principalmente, Seddon, 1972 a y b; Tracz, 1975).

Basándose en la conclusión mencionada, Tracz (1975) estudió las ventajas computacionales de usar una distribución rectangular de tiempos de viaje, inicialmente propuesta por Rumsay y Hartley (1972). Encontró ajustes de los histogramas predichos marginalmente superiores a los dados por la fórmula de Robertson y un leve ahorro en el tiempo de proceso. A pesar de estos resultados, la distribución rectangular o uniforme no ha recibido mayor atención posterior.

Este trabajo presenta el desarrollo de un modelo de dispersión basado en dicha distribución, compatible con el uso de histogramas cíclicos de flujo. La formulación de Tracz es, en este contexto, válida solamente bajos ciertas condiciones, como se demuestra.

En el capítulo 2 se deriva el modelo de dispersión,incluso en forma recursiva, y son discutidas algunas de sus propiedades.El capítulo 3 está destinado a compararlo con el modelo basado en la distribución cuasi-geométrica. Por último, en el capítulo 4 se indican usos promisorios del modelo desarrollado y las líneas de investigación consiguientes.

2. DERIVACION DEL MODELO DE DISPERSION

2.1. La distribución uniforme

Esta distribución asume que todos los tiempos de viaje entre un mínimo T y un máximo M son equiprobables y que los tiempos que están fuera de ese intervalo tienen probabilidad nula. Es decir:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < T \\ \dfrac{1}{M-T+1} & , \ T \leqslant t \leqslant M \\ 0 & , \ t > M \, . \end{cases} \tag{1}$$

Para trabajar con la distribución en forma adecuada a un contexto cíclico se hará uso de variables auxiliares. Sea:

$$M = T + mn + p \tag{2}$$

donde $m = \left[\dfrac{M-T}{n}\right]$ y n es el número de intervalos en que se divide el ciclo. Obviamente, $0 \leqslant p \leqslant n-1$. La distribución puede ahora escribirse:

$$P(t = k + \varepsilon n) = \begin{cases} 0 & , \ k + \varepsilon n < T \\ \dfrac{1}{mn+p+1} & , \ T \leqslant k + \varepsilon n \leqslant T + p + mn \\ 0 & , \ k + \varepsilon n > T + p + mn \end{cases} \tag{3}$$

donde $1 \leqslant k \leqslant n$ y $\varepsilon = 0,1,2,\ldots,$

La media de esta distribución es:

$$\bar{t} = \sum_{t=T}^{M} t\, P(t) = \frac{M+T}{2} = T + \frac{mn+p}{2} \, . \tag{4}$$

Todos los tiempos de viaje (T, M y $\bar{t}$) están medidos en intervalos.

2.2. El modelo cíclico de dispersión

Supóngase que se conoce el histograma cíclico de pasadas por una sección de una vía. Para obtener el histograma correspondiente a otra sección situada aguas abajo, y suponiendo que hay conservación de flujo entre ambas secciones, vale la construcción siguiente. De los vehículos que pasan por la primera sección en el intervalo j llegarán a la segunda en el intervalo i aquellos que demoren $i-j+\varepsilon n$.

O sea:

$$q_2(i) = \Sigma \quad q_1(j)\ P(t = i - j + \varepsilon n) \ . \tag{5}$$

Definiendo los límites de la sumatoria en consonancia con los de la distribución, queda:

$$q_2(i) = \sum_{j=i-T-n+1}^{i-T} q_1(j) \sum_{\varepsilon=0}^{m-1} \frac{1}{mn+p+1} + \sum_{j=i-T-p}^{i-T} q_1(j)\ \frac{1}{mn+p+1}$$

$$q_2(i+T) = \frac{m}{mn+p+1} \sum_{j=i-n+1}^{i} q_1(j) + \frac{1}{mn+p+1} \sum_{j=i-p}^{i} q_1(j) \ .$$

Como $q_1(j) = q_1(j \pm n)$, si $\sum_{j=1}^{n} q_1(j) = Q$ se obtiene:

$$q_2(i+T) = \frac{m\ Q}{mn+p+1} + \frac{1}{mn+p+1} \sum_{j=i-p}^{i} q_1(j) \ . \tag{6}$$

Haciendo $i \rightarrow i-1$:

$$q_2(i+T-1) = \frac{m\ Q}{mn+p+1} + \frac{1}{mn+p+1} \sum_{j=i-p-1}^{i-1} q_1(j) \ ,$$

de donde

$$q_2(i+T) = \frac{1}{mn+p+1} \left[q_1(i) - q_1(i-p-1)\right] + q_2(i+T-1) \ .$$

Sea:

$$F = \frac{1}{mn+p+1} \ , \tag{7}$$

lo que conduce a

$$q_2(i+T) = F\ \left[q_1(i) - q_1(i-p-1)\right] + q_2(i+T-1) \ . \tag{8}$$

Para asegurar la conservación del flujo en este tipo de modelos es necesario utilizar una expresión especial para el primer intervalo a predecir (i=1). La condición es:

$$q_2(1+T) + \sum_{i=2}^{n} q_2(i+T) = Q \quad , \tag{9}$$

donde Q es el flujo total en un ciclo.

Se puede demostrar que:

$$\sum_{i=2}^{n} q_2(i+T) = \frac{1}{mn+p+1} \left(p \sum_{i=1}^{n} q_1(i) + \sum_{i=2}^{n-p} q_1(i) \right) + \frac{m(n-1)\ Q}{mn+p+1}$$

que sustituida en (9) y reordenada, da:

$$q_2(1+T) = QF\ (1+m) - F \sum_{i=2}^{n-p} q_1(i) \ . \tag{10}$$

Se tiene así un modelo recursivo conformado por la ec.(10) y la (8), válida para $i = 2,\ldots,n$.

2.3. Algunas propiedades del modelo

Es interesante estudiar el comportamiento del modelo en casos particulares que corresponden a situaciones reales límites o frecuentes.

a) $F = 1$

Para que esto se cumpla, de la ec.(7) es necesario que $m=p=0$. Esto implica (ec. 2) $M=T$, i.e. nula dispersión.

De las ecs.(10) y (8):

$$q_2(1+T) = Q - \sum_{i=2}^{n} q_1(i) = q_1(1)$$

$$q_2(i+T) = q_1(i) - q_1(i-1) + q_2(i+T-1) \ , \quad i=2,\ldots,n.$$

Pero de ambas se sigue que $q_2(i+T) = q_1(i)$, $\forall$ i. Es decir, hay una traslación paralela del histograma, como debe ser al no existir dispersión.

b) $F = 0$

Este caso supone $m = \infty$ (y , por lo tanto, $M = \infty$) y se puede asociar a la máxima dispersión. Entonces:

$$q_2(1+T) = Q\frac{1+m}{mn+p+1} = Q\frac{1+\frac{1}{m}}{n+\frac{p+1}{m}} = \frac{Q}{n} \quad (\text{si } m \to \infty)$$

$$q_2(i+T) = q_2(i+T-1) \quad , \quad i=2,\ldots,n.$$

De ambas, $q_2(i+T) = \frac{Q}{n}$, $\forall i$. Esto es, se predice un histograma uniforme, que es lo esperado.

c) $m = 0$

En este caso, $M - T=p<n$, situación muy frecuente en la práctica. Se tiene que:

$$q_2(1+T) = \frac{Q}{1+p} - \frac{1}{1+p}\sum_{i=2}^{n-p} q_1(i)$$

$$q_2(1+T) = \frac{1}{1+p}\sum_{j=1-p}^{1} q_1(j)$$

y, de la ec. (6):

$$q_2(i+T) = \frac{1}{1+p}\sum_{j=i-p}^{i} q_1(j) \quad , \quad i=2,\ldots,n.$$

De ambas, $q_2(i+T) = \frac{1}{1+p}\sum_{j=i-p}^{i} q_1(j)$,$\forall i$.

Este es exactamente el modelo planteado por Tracz, que resulta ser un caso particular del modelo desarrollado.

En suma, la distribución uniforme de tiempos de viaje da origen a un modelo recursivo de dispersión que permite recorrer todo el rango de situaciones, desde la total a la nula dispersión, a través del factor $F(0 \leq F \leq 1)$ con resultados consistentes en los casos extremos. Además, se prueba que el modelo formulado por Tracz es válido sii $M<(T+n)$.

2.4. Formulación en función del tiempo de viaje

Es usual que los modelos de dispersión contengan como variable explícita el tiempo medio de viaje, que es el dato normalmente conocido para un arco de una red.

De la ec. (4):

$$mn+p = 2(\bar{t}-T).$$

Entonces,

$$F = \frac{1}{1+2(\bar{t}-T)}$$

y el modelo puede formularse:

$$q_2(1+T) = F\left[Q(1+m) - \sum_{i=2}^{n-p} q_1(i)\right] \qquad (11a)$$

$$q_2(i+T) = F[q_1(i) - q_1(i-p-1)] + q_2(i+T-1),\ i=2,\ldots,n \qquad (11b)$$

con $F = \dfrac{1}{1+2(\bar{t}-T)}$ $\qquad$ (11c)

$$m = \left[\frac{2(\bar{t}-T)}{n}\right] \qquad (\ [\ ]\ :\ \text{mayor entero contenido}) \qquad (11d)$$

$$p = 2(\bar{t}-T) - mn. \qquad (11e)$$

Se suele añadir una relación $T=g(\bar{t})$, de modo que la única variable del modelo es $\bar{t}$. Por ejemplo, Tracz propuso:

$$T = \left[\ (1 - \frac{\alpha}{2}\ )\ \bar{t} + 0.5\right] \qquad (12)$$

donde α es un parámetro a calibrar. Así, conociendo α, $\bar{t}$ y $q_1(i)$ es posible predecir un histograma aguas abajo con las ecuaciones (11a) a (11e) y (12).

3. RELACION CON LA DISTRIBUCION CUASI-GEOMETRICA

La distribución cuasi-geométrica de tiempos de viaje reviste interés por ser la que subyace (Gibson y Aguirre, 1984) a la conocida ecuación recursiva de Robertson. Cualquier modelo de dispersión alternativo debe ser contrastado con este estándar de la práctica actual.

Gibson y Aguirre demostraron que la distribución uniforme constituye un caso particular de la cuasi-geométrica. En efecto, ésta está dada por:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{si } t < T \\ \dfrac{F(1-F)^{t-T}}{1-(1-F)^{M-T+1}} & ,\ \text{si } T \leq t \leq M \\ 0 & ,\ \text{si } t > M \end{cases} \qquad (13)$$

donde T y M son los tiempos de viaje mínimo y máximo, respectivamente, y F es un parámetro tal que $0 \leq F \leq 1$. Los tiempos están medidos en interlos.

Se puede demostrar que:

$$\lim_{F \to 0} p(t) = \frac{1}{M-T+1}, \quad T \leq t \leq M \tag{14}$$

que es justamente la distribución uniforme. Como el parámetro F regula el grado de dispersión, F=0 es interpretable como el máximo grado posible para un par (T,M) dado. Obviamente, para un cierto intervalo (T,M), que los tiempos de viaje comprendidos en él sean equiprobables conlleva la mínima estabilidad de los pelotones que se forman en las intersecciones.

La diferencia entre M y T determina la magnitud absoluta de la dispersión que se produce. Ella sólo es total cuando $(M-T) \to \infty$. A su vez, es nula si M=T. Bajo estas condiciones, es evidente que ambas distribuciones permiten recorrer todo el espectro de situaciones; lo que las hace diferentes es el monto **relativo** de dispersión que asumen.

Ahora bien, para aquilatar esta diferencia hay que tener presente varios factores. En primer lugar, ninguna reproduce con fidelidad la distribución real, a juzgar por los datos publicados. Esta normalmente presenta un sesgo hacia la izquierda que se atenúa con la longitud del tramo, llegando a ser aproximadamente simétrica para $L \approx 300$ m. La distribución cuasi-geométrica es siempre sesgada a la izquierda y más fuertemente que la real; su moda es T, lo que no ocurre en ningún conjunto de datos reportado. Por su parte, la uniforme es simétrica y no refleja la mayor probabilidad que, en la práctica, tienen los tiempos de viaje cercanos a la media.

Segundo, lo relevante no son las distribuciones por sí mismas sino los modelos de dispersión que se sustentan en ellas. Cuando se aplica la ecuación de Robertson se introduce el supuesto $M \geq n+T$. En la inmensa mayoría de los casos, ésta es una considerable sobreestimación. En cambio, con el modelo aquí desarrollado M puede ser pequeño: su valor depende de $\bar{t}$ y T. Entonces, puesto que el problema práctico consiste, como se ha dicho, en derivar el intervalo (T,M) correspondiente a partir del tiempo medio de viaje observado o estimado, es de esperar que para la distribución cuasi-geométrica se tienda a asumir también un T algo mayor que el real. Así se compensa la asignación de probabilidad no nula a tiempos mayores que el M real. El intervalo (T,M) para la uniforme tenderá a tener un límite inferior mayor, y uno superior menor, que el real.

Esto significa que para un $\bar{t}$ dado, el modelo basado en la distribución uniforme supone un mayor grado de dispersión que se aplica a un intervalo menor, en comparación a la cuasi-geométrica. Es decir, la diferencia teórica resulta bastante amortiguada.

Desde otra perspectiva. este contrapeso indica que la ventaja de la distribución uniforme de tener un parámetro menos (F) es aparente. Nótese que el F usado en el modelo de dispersión respectivo es una simple variable auxiliar, empleada sólo para facilitar la analogía con la ecuación de Robertson.

Otra diferencia en el terreno de los modelos de dispersión asociados es que al usar la cuasi-geométrica se introduce una aproximación para $F(F=1/(1+\bar{t}-T))$ lo que implica, bajo ciertas condiciones, una reproducción inexacta del tiempo medio de viaje. No obstante, recuérdese que el modelo uniforme requiere que $\bar{t}$ se aproxime a unidades de medio intervalo, lo que corrientemente tiene un efecto equivalente. Hay, eso sí, situaciones en las que esta consistencia será de provecho.

Una limitación reconocida de la ecuación de Robertson es que predecir el histograma de pasadas por una cierta sección directamente o con un paso intermedio no conduce al mismo resultado. Esta deficiencia no es resuelta al usar una distribución uniforme. La causa del problema es que la suma de tiempos de viaje provenientes de una distribución cuasi-geométrica no da una cuasi-geométrica; lo mismo acontece con la distribución uniforme, donde la suma origina una triangular simétrica.

En cuanto a la rapidez computacional, no se divisan ventajas para alguno de los modelos. Sus expresiones son sencillas y similares.

Un último aspecto dice relación con el parámetro T. Este se estima a partir de $\bar{t}$ con alguna función que no forma parte, propiamente, del modelo de dispersión. Pero para probar especificaciones de ella y calibrar sus parámetros puede ser ventajosa la mayor consistencia del modelo uniforme. No hay, hasta ahora, evidencia que pueda ser usada para hacer comparaciones al respecto. Todos los experimentos publicados tienen errores en el método de calibración, por deficiencias en la formulación de los modelos de dispersión involucrados. Un nuevo método de calibración desarrollado por el autor (Gibson, 1986) no ha sido aún probado a la escala necesaria para emitir una opinión fundada al respecto.

Con el fin de ilustrar algunos de estos puntos se presenta un ejemplo comparativo en la Tabla 1. Usando los histogramas observados en dos secciones de la Avda. Costanera en Santiago para 30 pelotones de automóviles, se hizo lo siguiente:

- predecir el histograma aguas abajo con los dos modelos, para tres valores del parámetro T;

- calcular la diferencia Δ entre el tiempo medio de viaje empleado como dato y el valor reproducido según la predicción;

- calcular la suma de diferencias al cuadrado (ΣR^2) entre el histograma predicho y el observado.

TABLA Nº 1

Comparación de modelos de dispersión

T	Modelo cuasi-geométrico Δ 1)	ΣR^2	Modelo uniforme Δ 1)	ΣR^2
4	0,07	1443	0,03	1266
5	0,07	1259	0,03	1263
6	0,19	1430	0,19	1371

1) Medido en intervalos.

Estos resultados, que nada pueden probar por tratarse sólo de un caso, están en línea con el análisis precedente. Las predicciones de ambos modelos son muy similares, con indicios de mayor estabilidad del uniforme.

4. COMENTARIOS FINALES

Si bien la distribución uniforme resulta ser un caso particular de la cuasi-geométrica, da origen a un modelo de dispersión internamente consistente y que cubre toda la gama de situaciones reales posibles. Tiene menos supuestos que el modelo de Robertson corregido, aunque ello frecuentemente no implicará diferencias prácticas sensibles, y es similar a él en términos computacionales. Constituye, pues, una genuina alternativa.

Es interesante explorar más su potencialidad, por tres razones. La primera es que no está sujeto a errores de reproducción del tiempo medio de viaje en ningún caso. La segunda es que podría ofrecer una mejor base para obtener una función $T=g(\bar{t})$ estable.

La última, y la más importante, es que puede describir adecuadamente el comportamiento de ciertos tipos de vehículos (con alta varianza de velocidades), en especial los buses que se detienen en paraderos. De ser así, habría una notable superioridad de este modelo para aplicaciones en que el tráfico mixto es predominante.

La importancia potencial de mejoras en la modelación de la dispersión ha sido recientemente puesta de relieve por Willumsen y Coeymans (1987). En un experimento en la calle Recoleta, en Santiago, encontraron que ellas conducen a mayores beneficios que el uso de técnicas sofisticadas de control (como la semi-actuación por vehículos).

Está en curso una investigación en este sentido, la que envuelve comparación con histogramas observados en arcos con parada de buses y la implementación del modelo en el programa TRANSYT-8 para apreciar su comportamiento en redes.

Otra línea de investigación es superar el problema de no transitividad. No se visualiza una solución sencilla porque la propiedad necesaria no la poseen distribuciones que generen modelos de dispersión computacionalmente eficientes. Se está probando con una distribución triangular que, sin ser en rigor transitiva , es más estable.

REFERENCIAS

GIBSON, J. y AGUIRRE, J.F. (1984). Sobre la correcta especificación y calibración del modelo de dispersión de Robertson. Publicación ST-INV/01/84, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile, Santiago.

GIBSON, J. (1986). Un método de calibración de los parámetros de dispersión del tráfico. Publicación ST-INV/02/86, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile. Santiago.

ROBERTSON, D.I. (1969) TRANSYT: a traffic network study tool. Report LR 253, Road Research Laboratory, Crowthorne.

RUMSAY, A.F. y HARTLEY, M.G. (1972). Simulation of a pair of intersections. Traffic Engineering and Control, Vol. 13, 522-525.

SEDDON, P.A. (1972a,b). Another look at platoon dispersion: 2. The diffusion theory y 3. The recurrence relationship. Traffic Engineering and Control, Vol. 13, 388-390 y 442-444.

SEDDON, P.A. y DIXON, M.L. (1973). The distribution of journey times for vehicles leaving traffic signals. Traffic Engineering and Control, Vol. 15, 345-347.

TRACZ, M. (1975). The prediction of platoon dispersion based on rectangular distribution of journey time. Traffic Engineering and Control, Vol. 16, 490-492.

WILLUMSEN, L.G. y COEYMANS, J.E. (1987). Research into the value of Area Traffic Control techniques in a developing country. Final Report on contract TRR 842/415, University College London.