ASIGNACION DE EQUILIBRIO EN REDES DE TRANSPORTE PUBLICO SIN LINEAS COMUNES

Joaquín de Cea Ch. y J. Enrique Fernández L.
Pontificia Universidad Católica de Chile
Casilla 6177, Santiago-Chile

RESUMEN

Este trabajo presenta el problema de asignación de viajes en redes de transporte público sin líneas comunes. El problema es formulado como una desigualdad variacional en la que el conjunto de soluciones factibles está definido por restricciones lineales. Dado que el Jacobiano del vector de funciones de costo en arcos (secciones de linea) de la red es asimétrico, el algoritmo de solución propuesto es una combinación del procedimiento de diagonalización y del método de Frank-Wolfe.

Acta IV Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte, 1989

1. INTRODUCCION

Las principales dificultades que se presentan para resolver el problema de asignación de equilibrio en redes de transporte público radican en la existencia de líneas comunes. Esto es, conjuntos de líneas atractivas para realizar un desplazamiento determinado, frente a las que el usuario es indiferente.

En aquellos casos en que no se considera restricción de capacidad de los vehículos, el problema ha sido debidamente formulado y existen variados algoritmos para resolverlo. Así por ejemplo, Chriqui (1974) propone un algoritmo de asignación a rutas mínimas, en tanto De Cea y Fernández (1989) formulan matemáticamente dicho problema y desarrollan un algoritmo eficiente de solución. Por otro lado, Spiess y Florian (1989) plantean y resuelven el problema de asignación a estrategias mínimas.

La situación es diferente cuando se trata de considerar la congestión al interior de los vehículos. De hecho, existen muy pocos modelos de asignación de transporte público con restricción de capacidad. El modelo TRANSEPT (ver Last y Leak, 1976) utiliza un procedimiento iterativo para asignar viajes a líneas comunes, considerando la capacidad de los vehículos y tiempos de espera dependientes de ella. Sin embargo, este modelo es sólo apropiado para analizar redes radiales. De Cea y Fernández (1988) plantean el problema general de asignación de equilibrio en redes de transporte público como una desigualdad variacional, en la que una de las restricciones que definen el conjunto de soluciones factibles es no lineal y proponen un algoritmo de solución para el caso simplificado en que todas las restricciones son lineales.

Aunque en general las redes de transporte público se caracterizan por la existencia de una proporción importante de tramos sobre los que hay líneas comunes, se presentan situaciones en que esto no ocurre. El caso más importante es el de las redes de metro, en las que en períodos de punta la restricción de capacidad de los trenes no sólo afecta la partición modal del metro sino además puede alterar la elección de rutas en él (ver por ejemplo Harris, 1989). En estos sistemas lo normal es que un individuo en el andén de una línea, equivalente al paradero en superficie, sólo enfrente una opción, sin embargo su ruta entre el origen y el destino de su viaje en el metro puede depender de los niveles de ocupación del sistema. Una situación similar puede suceder en redes de locomoción colectiva de superficie (por ejemplo en ciudades de tamaño poco densas o en grandes ciudades de países desarrollados). En ellas, o son excepcionales los tramos en los que existe más de una línea disponible o en los casos en que existen varias hay paraderos diferidos.

En el presente trabajo se aborda el problema general de asignación de equilibrio para redes de transporte público en las que no existen líneas comunes. En este caso el concepto de ruta coincide con el concepto de sección de línea y la desigualdad variacional que representa las condiciones de equilibrio tiene asociado un conjunto de soluciones factibles definido solamente por restricciones lineales. Dado que el vector de funciones de costo posee Jacobiano asimétrico, el algoritmo de solución combina un procedimiento de diagonalización con el método de Frank-Wolfe.

Este artículo ha sido organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta una serie de definiciones básicas y se introduce la notación utilizada. La sección 3 está dedicada a la formulación del problema de asignación a caminos mínimos. En la sección 4 se plantea el problema de asignación de equilibrio, se discuten sus características más importantes y se propone un algoritmo de solución. La sección 5 presenta un ejemplo numérico que ilustra el efecto producido sobre la carga de una red al considerar restricción de capacidad de los vehículos. Finalmente en la sección 6 se incluyen algunas conclusiones y una discusión sobre posibles aplicaciones del modelo propuesto.

2. CONCEPTOS BASICOS Y NOTACION

2.1 Definiciones

El elemento fundamental en una red de transporte público sin líneas comunes es la sección de línea. Esta se define como una porción de una línea, entre dos nodos no necesariamente consecutivos de su itinerario. En contraposición a este concepto, en una red de transporte público codificada en forma tradicional se define el segmento de línea o arco, que representa una determinada porción de línea entre dos nodos consecutivos de su trazado. La figura 1 muestra una red ejemplo codificada en términos de segmentos de línea y en términos de secciones de línea.

Una ruta de transporte público representa la forma de realizar un viaje entre dos nodos de la red. A ella se asocia una secuencia de nodos (nodo de origen del viaje, nodos de trasbordo y nodo de destino) y un conjunto de líneas atractivas para cada tramo del desplazamiento. Cada uno de estos tramos recibe el nombre de sección de ruta.

Deberá notarse que en el caso particular que se analiza en este trabajo se consideran sistemas en los que los individuos una vez que se encuentran en la red (paraderos o andenes en el metro) no disponen de conjuntos de líneas atractivas , sino de una línea única. De esta forma, el concepto de sección de línea coincide con el de sección de ruta, y una ruta (a la que se le denominará camino para hacer la diferencia con el caso general) quedará definida por una o más secciones de línea adyacentes.

Lo anterior no impide que entre dos nodos exista más de una sección de línea. Sin embargo, si existe más de una, ellas no serán consideradas líneas comunes. La figura 2 ilustra un ejemplo en que por efecto de agregación en la codificación hay dos secciones de línea entre dos nodos; sin embargo en la situación real las líneas pasan por calles diferentes por lo que el usuario deberá escoger una o la otra y no la primera que esté disponible.

2.2 Notación

Considérese una red $G = (N, L)$, donde N representa un conjunto de nodos y L un conjunto de secciones de línea definidas entre pares de nodos de N. La notación que será utilizada más adelante es la siguiente:

$W =$ Conjunto de pares origen-destino conectados por al menos una sección de línea;

$w =$ Un elemento de W;

$P =$ Conjunto de caminos existentes en la red;

$P_w =$ Conjunto de caminos de la red que unen el par de nodos w;

$p =$ Un elemento de P o P_w;

$T_w =$ Demanda de viajes entre el par de nodos w;

$v_l =$ Flujo de pasajeros sobre la sección de línea l;

$V =$ Vector de flujos de pasajeros sobre las secciones de línea;

$h_p =$ Flujo de pasajeros sobre el camino p;

$H =$ Vector de flujos en los caminos de la red;

$C_p =$ Costo promedio total de viajes por el camino p;

$c_l =$ Costo de viaje asociado a la sección de línea l;

$\bar{c}_l =$ Costo de viaje fijo (tiempo de viaje en vehículo, tarifa, penalidad por trasbordo, etc) asociado a la sección de línea l;

$c =$ Vector de costos promedio totales asociados a las secciones de línea;

$C =$ Vector de costos totales asociados a los caminos;

δ_{lp} = Elemento de la matriz de incidencia sección de línea- ruta. Su valor es 1 si la sección de línea l es parte de la ruta p y 0 en otros casos;

f_l = Frecuencia de la sección de línea l. Su valor es el mismo para todas las secciones de línea de una línea determinada $\mathcal{L}$;

k_l = Capacidad de los vehículos de la línea $\mathcal{L}$;

K_l = Capacidad práctica de la sección de línea l (capacidad de la línea a la que pertenece la sección de línea l);

L_i^+ = Conjunto de secciones de línea que salen del nodo i;

L_i^- = Conjunto de secciones de línea que llegan al nodo i;

g_i = Viajes desde un origen determinado hacia el nodo i;

α, β, n = Constantes de la función de costos.

2.3 Funciones de Costo

Las formulaciones matemáticas que se presentan en las secciones que siguen, consideran dos situaciones: costos independientes de los flujos y costos crecientes con los flujos. En el primer caso el costo total de viaje asociado a una sección de línea será constante y de la forma:

$$c_l = \bar{c}_l + \alpha / f_l \tag{1}$$

donde el primer término, como se mencionó, representa el tiempo de viaje en vehículo, tarifa y penalidad por trasbordo y el segundo el tiempo de espera en paradero.

En el caso en que se considera la restricción de capacidad de los vehículos es preciso agregar un tercer término a la expresión (1). Este constituye el efecto de congestión y representa la forma en que el tiempo de espera de los viajes crece al aumentar el flujo de pasajeros en las líneas. Siguiendo el mismo razonamiento de De Cea y Fernández (1988) para el caso general de asignación de equilibrio en redes de transporte público, el costo de viaje asociado a una sección de línea se puede representar de la siguiente manera:

$$c_l = \bar{c}_l + \frac{\alpha}{f_l} + \beta(\frac{v_l + \tilde{v}_l}{K_l})^n \tag{2}$$

donde $\tilde{v}_l$ es el flujo que compite con v_l por la misma capacidad común. Esta capacidad común es la de la línea a la que pertenece la sección l y todos los flujos que conforman el término $\tilde{v}_l$ están asociados a secciones de la misma línea. Esto es así debido a que en el caso particular que se analiza en este trabajo se supone que no existen líneas comunes.

3. ASIGNACION A CAMINOS DE COSTO MINIMO

El problema de asignación de viajes a caminos de costo mínimo es parte del problema de asignación de equilibrio. Por esto conviene analizarlo en mayor detalle.

Al no existir restricción de capacidad ni considerarse efectos de congestión, el problema de asignación de una matriz de viajes sobre una red, puede dividirse en tantos problemas como orígenes de viajes existan en el sistema analizado. Así, para un origen determinado "O", el vector de flujos sobre los arcos de la red $G = (N, L)$ resultante de la asignación de los viajes g_i (viajes entre el origen "O" y el destino "i") se obtiene al resolver el siguiente problema:

$P(1)$

$$\text{Min} \sum_{l \in L} v_l \, c_l \tag{3}$$

$$\text{s.a} \qquad \sum_{l \in L_i^+} v_l + g_i = \sum_{l \in L_i^-} v_l \qquad , \forall i \in N \tag{4}$$

$$v_l \geq 0 \qquad , \forall l \in L \tag{5}$$

El costo c_l asociado a la sección de línea l es, en este caso, constante y está dado por la expresión (1).

La forma más eficiente de resolver (P1) es asignando los flujos g_i a los caminos mínimos en la red $G = (N, L)$. Entre los algoritmos más usados para este fin puede mencionarse, por ejemplo, el de Dijkstra y el de D'Esopo (ver Crovetto, 1989).

4. ASIGNACION DE EQUILIBRIO

4.1. Características del Vector de Funciones de Costo

El problema de asignación de equilibrio sobre una red de transporte público $G = (N, L)$, sin líneas comunes, es equivalente al problema de asignación de equilibrio en redes viales. En general, si se supone que los usuarios se comportan de acuerdo al primer principio de Wardrop (ver Wardrop, 1952) éste puede ser expresado en términos de una desigualdad variacional a la que está asociado un conjunto de soluciones factibles definido por restricciones lineales.

El algoritmo de solución del problema así planteado dependerá fundamentalmente de las características del vector de funciones de costo $c = \{c_1, c_2, \ldots, c_l, \ldots, c_m\}$. La forma de la función de costo asociada a una sección de línea determinada ya ha sido presentada en la sección anterior. Interesa, ahora, analizar el Jacobiano de c, esto es, las interrelaciones existentes entre pares de funciones (c_i, c_j).

Para dicho análisis, considerese una línea codificada en término de sus secciones, como se indica en la figura 3 (el número sobre cada arco identifica a la sección de línea).

De acuerdo a la definición de las funciones de costo, reflejada en la expresión (2), si se analizan dos secciones i y j que se originan en el mismo nodo se puede concluir que el efecto sobre el costo c_j de una variación del flujo v_i es idéntico al efecto sobre el costo c_i de una variación equivalente del flujo v_j. Considerese por ejemplo las secciones 2 y 6, que salen del nodo 2. Sus funciones de costo son:

$$c_2 = \bar{c}_2 + \frac{\alpha}{f_2} + \beta(\frac{v_2 + v_6 + v_4 + v_5}{K_2})^n \tag{6}$$

$$c_6 = \bar{c}_6 + \frac{\alpha}{f_6} + \beta(\frac{v_6 + v_2 + v_4 + v_5}{K_2})^n \tag{7}$$

Dado que las secciones 2 y 6 pertenecen a la misma línea $K_2 = K_6 = K$. En consecuencia es fácil ver de (6) y (7) que:

$$\frac{\partial c_6}{\partial v_2} = \frac{\partial c_2}{\partial v_6} = \frac{\beta n}{K^n}(v_2 + v_6 + v_4 + v_5)^{n-1} \tag{8}$$

Esta simetría no se presenta , necesariamente, cuando se comparan secciones cuyo nodo de origen es diferente. Así por ejemplo, para la pareja de secciones (2,4) se tiene:

$$c_4 = \bar{c}_4 + \frac{\alpha}{f_4} + \beta\left(\frac{v_1 + v_4 + v_5}{K_4}\right)^n \tag{9}$$

Por lo que de (6) y (9) se desprende que:

$$\frac{\partial c_2}{\partial v_4} \neq \frac{\partial c_4}{\partial v_2} \tag{10}$$

De todo lo anterior se concluye que , dadas las funciones de costo de viaje en las secciones de línea de la forma expresada por la expresión (1), el Jacobiano del vector c es asimétrico, por lo que la desigualdad variacional que expresa las condiciones de equilibrio, en este caso, no posee un problema de optimización equivalente.

4.2 Formulación matemática

Se supondrá que los usuarios de la red $G = (N, L)$ se comportan de acuerdo al primer principio de Wardrop. Esto es, para viajes entre un par de nodos w, los viajeros consideran los costos de desplazamiento a través de todos los caminos alternativos posibles (secuencias de secciones de línea) y escogen aquella que minimice el costo total de viaje. Por lo tanto, una asignación de flujos de equilibrio cumplirá las siguientes condiciones:

$$C_p \begin{cases} = C_w^*, & \forall p \in P_w / h_p > 0 \\ \geq C_w^*, & \forall p \in P_w / h_p = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Estas condiciones de equilibrio pueden expresarse también mediante la siguiente desigualdad variacional:

$$C(H^*)(H - H^*) \leq 0 \quad , \qquad \forall H \in \Omega \tag{12}$$

donde H^* representa el vector de flujos en los caminos de la red para la solución de equilibrio y Ω es el conjunto de vectores de flujo factibles.

El conjunto Ω queda definido por las ecuaciones de continuidad, relaciones entre flujos en caminos y flujos en secciones de línea, y condiciones de no negatividad de los flujos en las secciones de línea:

$$\sum_{p \in P_w} h_p = T_w \quad , \quad \forall w \in W \tag{13}$$

$$\sum_{p \in P} \delta_{lp} h_p = v_l \quad , \quad \forall l \in L \tag{14}$$

$$v_l \geq 0 \quad , \quad \forall l \in L \tag{15}$$

Debe notarse que a diferencia del caso general (red de transporte público con líneas comunes) en este problema todas las restricciones son lineales.

Evidentemente, el problema (12) puede expresarse en términos del vector de flujos en secciones de línea, V:

$$C(V^*)(V^* - V) \leq 0 \quad , \quad \forall V \in \Omega \tag{16}$$

donde V^* es el vector de flujos de equilibrio sobre las secciones de línea.

4.3 Algoritmo de Solución

El algoritmo de solución del problema (16) se basa en el uso del método de diagonalización (ver Florian, 1977). Este es un procedimiento iterativo en el que al interior de una iteración la función de costo asociada a una sección de línea l se transforma en una función que depende solamente de v_l, fijando los demás flujos de los que depende en los valores de una solución anterior o inicial. El método trabaja en cada iteración con un problema "diagonalizado" que en consecuencia es simétrico y cuenta con un problema de optimización equivalente. El algoritmo se detiene cuando las soluciones de dos iteraciones consecutivas son suficientemente cercanas.

Si se define $\hat{c}(V)$ al vector diagonalizado de funciones de costo, en cada iteración del algoritmo de diagonalización se debe resolver un problema del tipo:

$$\hat{c}(V^*)(V^* - V) \leq 0 \quad , \qquad \forall V \in \Omega \tag{17}$$

Este último problema tiene el siguiente problema de optimización equivalente, que puede resolverse mediante el método Frank- Wolfe:

$$\underset{V \in \Omega}{Min} \int_0^V \hat{c}(x)\, dx \tag{18}$$

El algoritmo completo de solución del problema (16) puede resumirse como sigue:

Etapa 0: (Inicialización) Encontrar una solución factible $\bar{V}$.

Etapa 1: Diagonalizar $c(V)$ en la solución $\bar{V}$.

Etapa 2: Resolver el problema (18) para obtener $\hat{V}$.

Etapa 3: Test de parada. Si $\bar{V}$ y $\hat{V}$ son suficientemente cercanos, parar. Si no

Etapa 4: Hacer $\bar{V} = \hat{V}$ y volver a la etapa 1.

5. EJEMPLO NUMERICO

Con el fin de ilustrar los resultados entregados por el algoritmo descrito en las sección 4.3 y compararlos con los que se obtienen al no considerar restricción de capacidad de los vehículos, se presenta a continuación un ejemplo numérico para una red muy simple, representada en la figura 4. Ella consta de cinco nodos y cuatro líneas de metro. Los datos más relevantes son los siguientes:

Linea 1 La frecuencia es de 30 trenes por hora. Su trazado es 1-2-3 y sus tiempos de viaje de 5 minutos en cada segmento. Genera tres secciones de línea. Arco (1,2): sección 1; arco (2,3): sección 2; arco (1,3): sección 3.

Linea 2 La frecuencia es de 20 trenes por hora. Consta de un solo arco con un tiempo de viaje de 5 minutos. Genera una sección de línea. Arco (2,4): sección 4.

Linea 3 Su frecuencia es de 20 trenes por hora. Une los nodos 4 y 5 con un tiempo de viaje de 5 minutos. Genera una sección de línea. Arco (4,5): sección 5.

Linea 4 Su frecuencia es de 20 trenes por hora. Une los nodos 3 y 5 con un tiempo de viaje de 5 minutos. Genera una sección de línea. Arco (3,5): sección 6.

Todos los trenes tienen una capacidad de 800 pasajeros. La demanda está dada por 20.000 viajes entre el nodo 1 y el nodo 3; 10.000 viajes entre el nodo 1 y el nodo 5; y 10.000 viajes entre el nodo 2 y el nodo 5.

Se han considerado los siguientes parámetros para las funciones de costo:

$$\alpha = 0.5 \quad ; \quad \beta = 10 \quad ; \quad n = 2$$

Las funciones de costo para cada una de las secciones de línea de la red son las siguientes:

$$c_1 = 6 + 10(\frac{v_1 + v_3}{24.000})^2 \qquad c_4 = 6.5 + 10(\frac{v_4}{16.000})^2$$

$$c_2 = 6 + 10(\frac{v_2 + v_3}{24.000})^2 \qquad c_5 = 6.5 + 10(\frac{v_5}{16.000})^2$$

$$c_3 = 11 + 10(\frac{v_1 + v_3}{24000})^2 \qquad c_6 = 6.5 + 10(\frac{v_6}{16.000})^2$$

Deberá notarse que la asimetría del problema radica en las secciones de línea 2 y 3. De hecho:

$$\frac{\partial c_2}{\partial v_3} \neq \frac{\partial c_3}{\partial v_2}$$

El problema converge en 2 diagonalizaciones y al interior de cada diagonalización en dos iteraciones de Frank-Wolfe. La tabla 1 presenta las cargas, sobre cada arco de la red, obtenidas con el algoritmo de equilibrio y con el algoritmo de asignación a caminos mínimos. En cada caso se indica el factor de sobrecarga en cada arco, definido como la razón entre el flujo en el arco y su capacidad.

Tabla 1. Resultados de asignaciones a red ejemplo

Arco	Asignación Todo o Nada		Asignación de Equilibrio	
	Flujo	Factor de Sobrecarga	Flujo	Factor de Sobrecarga
1 — 2	30.000	1,250	30.000	1,250
2 — 3	40.000	1,667	30.000	1,250
2 — 4	—	—	10.000	0,625
3 — 5	20.000	1,250	10.000	0,625
4 — 5	—	—	10.000	0,625

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un algoritmo que resuelve, en forma exacta, el problema de asignación de equilibrio con demanda fija, en redes de transporte público sin líneas comunes. La aplicación más evidente se relaciona con el análisis de redes de metro congestionadas, aunque también puede emplearse en el caso de redes de superficie poco densas (ciudades de tamaño medio de países desarrollados, por ejemplo).

Es interesante hacer notar que el modelo presentado constituye una alternativa al modelo descrito en De Cea y Fernández (1988) para el análisis de redes de tranporte público en general (con líneas comunes). Ambos modelos entregarían resultados aproximados. Este omitirá la existencia de líneas comunes (aunque producirá dispersión entre ellas debido a la congestión) en tanto el ante. 'or no está libre de error al considerar que en una sección de rutas la carga de cada sección de línea es proporcional a su frecuencia, e independiente de su capacidad disponible.

En una investigación futura se intentará establecer cuál de estas fuentes de error es más importante.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo presentado forma parte del proyecto de investigación 541/89, financiado por el Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT).

REFERENCIAS

CHRIQUI, C. (1974) Réseaux de transport en commun: les problèmes de cheminement et d'accès. *Publication No 11, Centre de Recherche sur les Transports Université de Montréal*, Canadá.

CROVETTO, G. (1989) *Implementación computacional y prueba de un modelo de asignación a redes congestionadas de transporte público.*Tesis de Magister, Escuela de Ingeniería, P. Universidad Católica de Chile.

DE CEA, J y FERNANDEZ, J.E. (1988) Equilibrium assigment on congested transit networks. V *Congreso Panamericano de Ingeniería de Tránsito y Transporte*,Mayagüez, Puerto Rico.

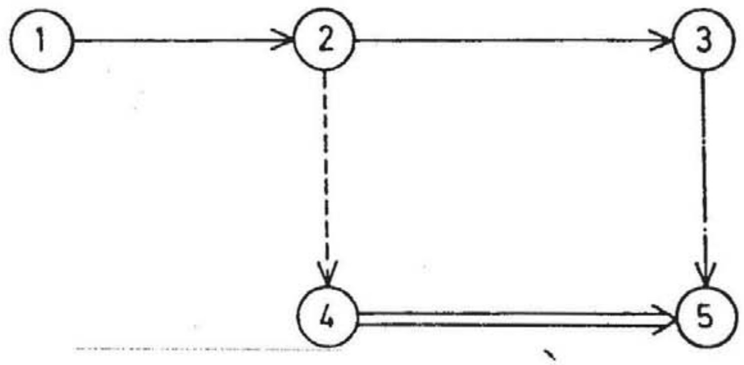
DE CEA, J. y FERNANDEZ, J.E. (1989) Transit assignment to minimal routes: an efficient new algorithm. *Traffic Engineering and Control*(en imprenta).

FLORIAN, M. (1977) A traffic equilibrium model of travel by car and public transit modes. *Transportation Science, Vol.*8, 166-179.

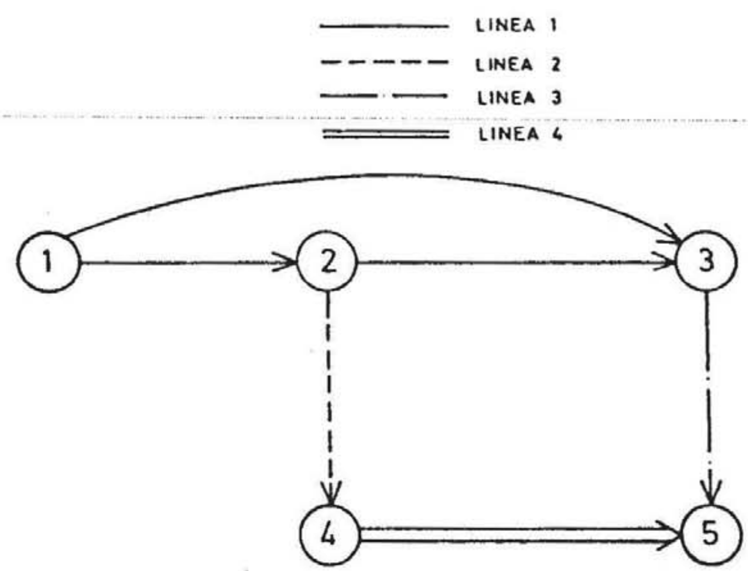
HARRIS, N.G. (1989) Capacity restraint simulation in a public transport environment. *Traffic Engineering and Control*, 30(6), 312-315.

LAST, A. y LEAK, S.E. (1976) TRANSEPT: a bus model. *Traffic Engineering and Control,* 5(1), 14-20.

SPIESS, H. y FLORIAN, M. (1989) Optimal strategies: a new assignment model for transit networks. *Transportation Research 23 B*(2), 83-102.

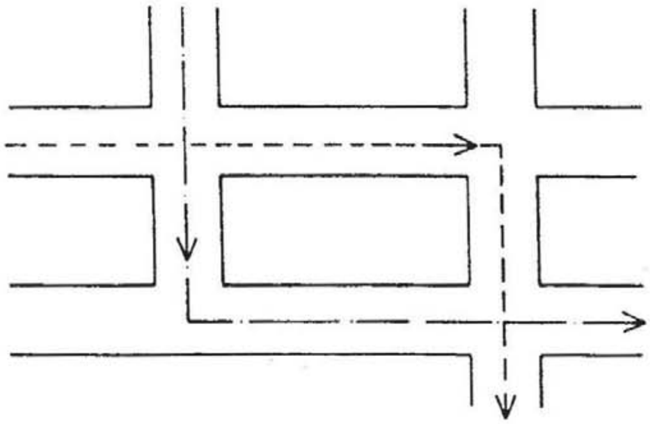


a) RED CODIFICADA EN TERMINOS DE SEGMENTOS DE LINEA

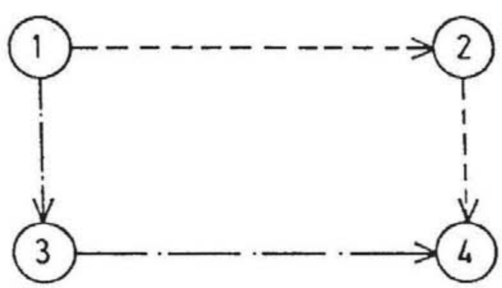


b) RED CODIFICADA EN TERMINOS DE SECCIONES DE LINEA

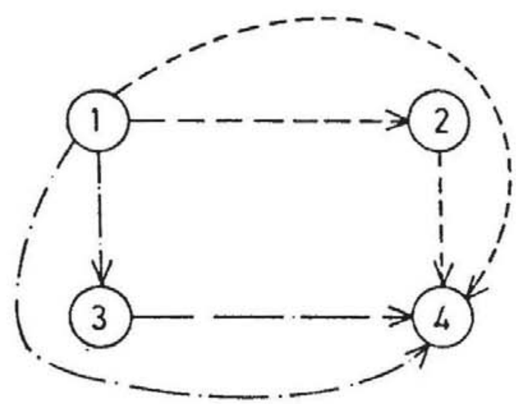
FIG. N°1 CODIFICACION DE UNA RED DE TRANSPORTE PUBLICO SIN LINEAS COMUNES.



a) CODIFICACION DESAGREGADA



b) CODIFICACION AGREGADA EN TERMINOS DE SEGMENTOS DE LINEA



c) CODIFICACION AGREGADA EN TERMINOS DE SECCIONES DE LINEA

FIG. N°2 SECCIONES NO COMUNES ENTRE DOS NODOS

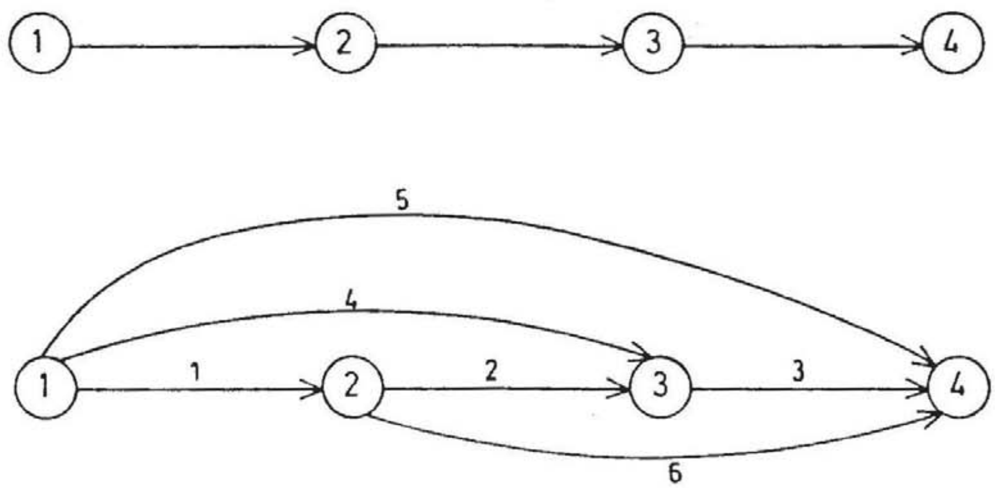


FIG. Nº 3 FLUJOS QUE COMPITEN POR UNA CAPACIDAD COMUN

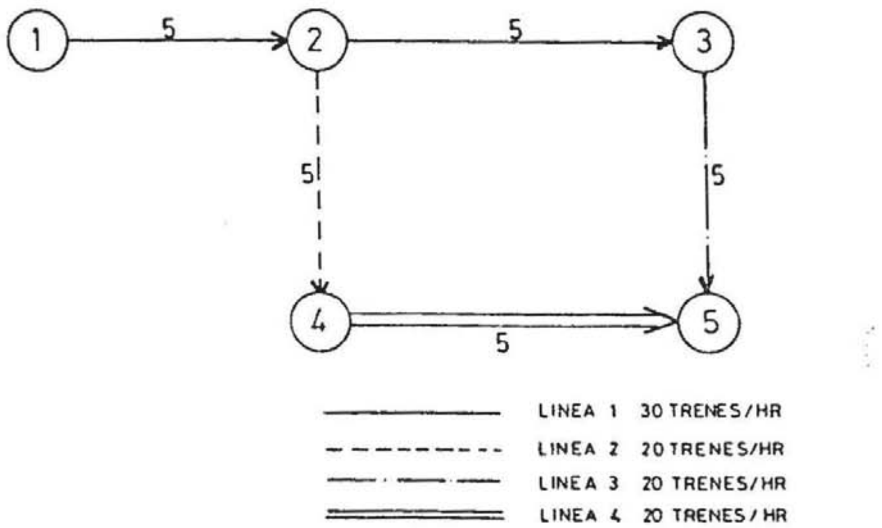


FIG. Nº4 RED PROBLEMA EJEMPLO