ALTERNATIVAS DE MODELACION DE EQUILIBRIOS OFERTA - DEMANDA EN REDES DE TRANSPORTE MULTIMODALES CON MODOS COMBINADOS

Enrique **FERNANDEZ**, Joaquín **DE CEA**, Enrique **CABRERA**
Departamento de Ingeniería de Transporte
Pontificia Universidad Católica de Chile

Santiago, Chile

Resumen

Este trabajo plantea y analiza diferentes alternativas de modelación en el contexto de Equilibrio Oferta-Demanda en Redes de Transporte Multimodales con Modos Combinados.

Se proponen tres enfoques de modelación para la elección de modo y ruta por parte de los usuarios y para la elección del punto de transbordo en el caso de modos combinados. Ellos se diferencian respecto de la composición y estructura de los modelos de demanda y oferta así como de sus interacciones. El primero supone que todas las decisiones de los usuarios en cuanto a elección de modo pueden ser integradas en la modelación de la red y determinadas por el proceso de elección de ruta. El segundo enfoque supone que la elección de modo debe realizarse mediante un modelo separado de demanda pero la elección de punto de trasbordo para los usuarios de modos combinados se plantea como un problema de ruteo en la red. El tercero, supone que tanto la elección de modo como la de punto de transbordo deben situarse explícitamente en la etapa de demanda.

Se definen las condiciones de equilibrio supuestas para cada enfoque de modelación y se plantean formulaciones matemáticas para cada modelo propuesto. Finalmente se muestra que todas las formulaciones permiten obtener las condiciones de equilibrio correspondientes a cada planteamiento.

1. INTRODUCCION.

Durante los últimos diez años se han obtenido importantes avances en la formulación de modelos matemáticos que permitan analizar y predecir estados de equilibrio sobre redes de transporte multimodales. Igualmente, distintos algoritmos de solución han sido propuestos en la literatura, con el fin de obtener resultados numéricos en casos prácticos (Florian, 1977; Abdulaal y Leblanc, 1979; Aashtiani y Magnanti, 1981; Dafermos, 1982; Florian y Spiess, 1983).

Sin embargo, los modelos formulados emplean una representación de modos de transporte que presenta importantes limitaciones para su aplicación práctica. Esta representación se basa en el concepto de modo abstracto generalizado (Dafermos, 1982) o considera explícitamente sólo modos "puros" (Florian y Spiess, 1983), entendiéndose por modo puro a un servicio que utiliza una sola tecnología de transporte entre el origen y el destino del viaje (Ej. Auto, Bus, Metro, etc).

Con ello, se plantean problemas cuando dichos modelos se pretenden utilizar para el análisis de sistemas de transporte reales que presentan una participación creciente de "modos compuestos". Se denomina modo compuesto a un servicio de transporte que utiliza distintas tecnologías, en distintos tramos de viaje, con diferentes secciones, cada una de las cuales ocurre sobre una red diferente y unidas por arcos de transbordo. (Ej. Auto–Metro, Bus–Metro, Taxi–Metro, etc).

La consideración explícita de modos compuestos ha sido normal en el análisis de la demanda (especialmente en la modelación de la "partición modal"). Sin embargo, ellos no han sido nunca explícitamente considerados en la formulación de modelos de redes con equilibrio multimodal. Una solución adecuada de la representación de estados de equilibrio en una red de transporte multimodal con modos compuestos debe entregar respuestas para las siguientes preguntas conceptuales: Qué decisiones de los viajeros, correspondientes a la elección de servicios compuestos deben ser consideradas en la modelación de demanda? (partición modal y/o distribución) y cuáles como un problema de modelación de equilibrio sobre la red? (elección de rutas). En tal caso, cómo lograr que la formulación correspondientes a los modelos de demanda y oferta sean consistentes?

Qué cambios es necesario introducir en la formulación analítica de los modelos de equilibrio en redes, a fin de incluir explícitamente la consideración de modos compuestos? Cómo afectan tales cambios a las propiedades matemáticas del problema ?

El objetivo del presente trabajo es enfrentar tales preguntas (que no han sido formalmente abordadas a la fecha) a fin de formular modelos de equilibrio multimodal con la consideración explícita de modos compuestos.

2. MODELACION DE MODOS COMPUESTOS.

De los diversos modos compuestos existentes en un sistema de transporte urbano, se considerará la combinación auto–metro, como un modo compuesto relevante para el análisis del equilibrio multimodal. Se supone conocida una matriz $\{\overline{g}_{i,j}\}$ de viajes personales entre el par O – D (i,j), luego la etapa de análisis de demanda se limita exclusivamente a la partición modal.

Una alternativa compuesta de viaje entre centroides i y j (con $w=(i,j)$), se define como un viaje con dos secciones principales: la primera se realiza en vehículo sobre la red vial, desde el origen i hasta la zona de estacionamiento t, localizada en las inmediaciones de una estación de metro t', y una segunda sección entre dos estaciones sobre la red metro; ambas secciones están conectadas por un "arco de transbordo", que incluye costos de estacionamiento del automóvil y acceso desde allí hasta el andén de la estación de metro. Por lo general habrá un tercer tramo de viaje (final) desde la estación de bajada hasta el destino j.

Los dos aspectos principales en el tratamiento de equilibrio multimodal con modos compuestos son:

1. Elección de modo de transporte, este se relaciona con las siguientes preguntas: Cómo identifica el usuario al modo compuesto? Cómo se le presenta la decisión de elección o cuáles son los principios de comportamiento individual con respecto a la elección entre modos, incluida la alternativa compuesta ?

2. Elección de punto de transbordo (para los usuarios de modo compuesto), esto se refiere a: Cómo se le presenta al viajero la elección de punto de transbordo? En qué supuestos de comportamiento individual se basa?

De estas preguntas, se deriva otra pregunta fundamental: Qué decisiones de los usuarios deben considerarse en el sub–modelo de demanda y cuáles deben considerarse en el sub–modelo de oferta ? Dependiendo de las respuestas que se den a las preguntas formuladas, se obtendrán distintas alternativas de modelación.

Definición de la Red y Rutas.

En la definición de los tres modelos que se presentan en las secciones que siguen, se consideran diferentes redes modales: i) red auto A, la cual contiene sólo arcos de la red auto, ii) red metro M y iii) red compuesta auto–metro $A+M$, que corresponde a la superposición de las dos redes anteriores unidas por arcos de transbordo; sobre las redes se define:

P_w^a : Conjunto de rutas entre pares O–D $w = (i, j)$ sobre la red auto.
P_w^m : Conjunto de rutas entre pares O–D $w = (i, j)$ sobre la red metro.
P_w^c : Conjunto de rutas entre pares O–D $w = (i, j)$ sobre red compuesta.
$P_{w,a}^c$: Conjunto de rutas compuestas entre pares $w = (i, j)$ sobre la red $A + M$.
P_{it}^a : Conjunto de rutas auto que conectan origen i con transbordo t.
$P_{t'j}^m$: Conjunto de rutas metro que conectan transbordo t' con destino j.

Funciones de Costos en Arcos

Los modos auto y auto–metro comparten la infraestructura vial (red auto), luego el costo de viaje sobre un arco c_l depende de los flujos de ambos modos. Los usuarios experimentan idéntico costo al transitar por los mismos arcos: $c_l^a = c_l^c = c_l$, $l \in A$; considerando funciones de costo de tipo BPR:

$$c_l(f_l^a, f_l^c) = a_l + b_l(f_l^a + f_l^c)^n = a_l + b_l(\overline{f}_l)^n, \qquad l \in A \tag{1}$$

donde f_l^a es el flujo en modo auto en arco l , f_l^c es el flujo en modo compuesto en arco l y $\overline{f}_l$ es el flujo total del arco, todos en unidades de vehículos equivalentes. Además, el efecto de congestión marginal de un usuario de auto sobre el costo de un usuario de auto-metro, es idéntico al efecto de congestión marginal producida por un usuario de auto–metro sobre el costo de un usuario de modo auto en la infraestructura compartida, lo que matemáticamente se representa como:

$$\frac{\partial c_l(\overline{f}_l)}{\partial f_l^a} = \frac{\partial c_l(\overline{f}_l)}{\partial f_l^c}, \qquad \overline{f}_l = f_l^a + f_l^c, \qquad \forall \quad l \in A. \tag{2}$$

3. ALTERNATIVAS DE MODELACION

Enfoque Puro de Oferta.

En este modelo, la elección de modo compuesto como alternativa a otros modos (puros o compuestos) y la elección de punto de transbordo, se modelan como problemas de asignación sobre la red. Para ello, se utiliza una red que integra a las sub–redes modales auto y metro unidas por arcos de transbordo, en aquellos puntos en que están físicamente conectadas. Sobre dicha red se asignan directamente los viajes de la matriz $\{\overline{g}_{ij}\}$ de tal forma que el resultado cumple con el primer principio de Wardrop (1952). Es preciso notar que sobre la red utilizada existirán tanto rutas puras como rutas compuestas. Esto determina que entre un par origen destino, los viajeros utilizan un modo compuesto (ruta compuesta) si su costo generalizado es igual al de las otras opciones (incluyendo modos puros, si la opción existe) y menor al de las opciones no utilizadas.

$$C_p^* - u_w^* \begin{cases} = 0, & \text{si } h_p^* > 0, \\ \geq 0, & \text{si } h_p^* = 0, \end{cases} \qquad p \in P_w^c, \qquad w \in W. \tag{3}$$

donde u_w^* es el costo de operación ó valoración objetiva del costo de viaje entre el par w, C_p^* es el costo de la ruta mínima p y h_p^* es el flujo sobre la ruta p; todos valores de equilibrio. Finalmente, W representa al conjunto de todos los pares O – D del sistema. Nótese que en este caso estamos considerando un solo tipo de usuario (pasajero) sobre una red generalizada.

La partición modal se obtiene para cada par w sumando todos los flujos de las rutas modales. Para el modo compuesto, se suma sobre todas las rutas que van de i a j a través de algún punto de transbordo $t \in T_w / w = (i, j)$, donde T_w es el conjunto de todas los puntos de transbordo utilizados por alguna ruta para unir el par w, que tienen flujo positivo.

Los supuestos de comportamiento individual asumidos en el presente modelo son muy simplistas, no diferenciando explícitamente al modo compuesto de otros modos puros, definiéndolo exclusivamente como una consecuencia de la asignación. Como consecuencia natural el modelo será difícil de calibrar para reproducir las elecciones reales de los viajeros y los flujos observados en las redes de auto y metro.

Enfoque Intermedio Combinado Oferta–Demanda.

En este modelo, el modo compuesto (auto–metro) se considera explícitamente como un modo diferente a los otros y se utiliza un modelo de partición modal, a fin de determinar la cantidad total de usuarios que lo utilizan entre todo par w. Supondremos que el modo compuesto no es relevante cuando existe la posibilidad de realizar el viaje sólo en metro y habrán al menos dos alternativas (auto y auto–metro) para cada par w en que el origen i no posee acceso directo a la red de metro, pero cuyo destino j es directamente accesible mediante un arco de caminata desde una estación de metro.

Supondremos el siguiente modelo Logit de elección modal, G_1, basado en la valoración subjetiva de cada modo:

$$G_w^a(U_w^{c*} - U_w^{a*}) = \frac{1}{1 + exp-(\alpha_{ac} + \beta(U_w^{c*} - U_w^{a*}))}, \tag{4}$$

donde G_w^a es la proporción de usuarios que utilizan el modo auto para viajar de i a j; U_w^{a*} y U_w^{c*} representan la "desutilidad" o valoración subjetiva del costo de las opciónes modales auto y auto–metro entre el par w; α_{ac}, β son parámetros de calibración que deben obtenerse de observaciones de la realidad. Con el objetivo de que la asignación y partición modal sean consistentes, la asignación de las matrices modales de terminadas por (4) debe hacerse sobre la red modal correspondiente a cada caso: los viajes en auto $\{g_w^a = \overline{g}_w \cdot G_w^a\}$ deben asignarse sobre la red de auto A y los viajes en auto–metro $\{g_w^c = \overline{g}_w \cdot G_w^c\}$ sobre la red compuesta $A + M$.

Sin embargo, deben considerarse las interacciones de congestión sobre los arcos de la red auto (calles y vías urbanas) entre flujos de modos auto y auto–metro. Los flujos asignados a cada red modal deberán cumplir el primer principio de Wardrop:

$$C_p^{k*} - u_w^{k*} \begin{cases} = 0, & \text{si } h_p^* > 0, \\ \geq 0, & \text{si } h_p^* = 0, \end{cases} \qquad \mathrm{p} \in (P_w^a, P_w^m), \quad w \in W_k, k = a, m \tag{5}$$

donde W_k es el conjunto de pares O – D que son conectados por al menos una ruta del modo k. Es necesario considerar que todos los usuarios de modo auto–metro que viajan entre w experimentan, bajo condiciones de equilibrio, idéntico nivel de desutilidad U_w^{c*}:

$$C_p^{c*} - U_w^{c*} \begin{cases} = 0, & \text{si } h_p^* > 0, \\ \geq 0, & \text{si } h_p^* = 0, \end{cases} \qquad \mathrm{p} \in (P_{w,c}^c), \qquad w \in W_c \tag{6}$$

en que: $U_w^{c*} = (\theta_1/\gamma_w)C_p^{a*} + \theta_2 C_p^{m*}$,donde θ_1, θ_2 son parámetros de calibración, γ_w es el factor de ocupación de los vehículos, C_p^{a*} y C_p^{m*}, representan el costo objetivo de operación de la ruta p (una de las rutas mínimas en condición de equilibrio), sobre la sección auto y metro del viaje compuesto respectivamente.

En este caso la red compuesta está codificada de tal forma que C_p^{a*} contiene el costo de estacionamiento del automóvil y C_p^{m*} contiene el tiempo de acceso desde el estacionamiento hasta el andén del metro. Es decir, el último arco de la sección auto de la ruta compuesta representa el estacionamiento y el primer arco de la parte metro representa el acceso a la estación.

Es importante notar que en este enfoque distinguimos dos tipos de usuarios sobre los arcos de la red A: viajeros del modo auto puro y viajeros del modo compuesto auto–metro que están operando en la sección auto de su ruta combinada. La cantidad de cada uno de estos usuarios entre cada par w es determinada por el sub–modelo de elección modal (4).

Este modelo permite considerar una valoración subjetiva diferente de cada alternativa modal y calibrar el proceso de elección basado en la realidad observada. Sin embargo, el proceso de elección de punto de transbordo es modelado según una asignación de equilibrio de tráfico no permitiendo incluir consideraciones de atractividad especial de las distintas facilidades de transbordo. Esto puede ser una perspectiva muy simplista para modelar la variedad de efectos que pueden definir la elección de punto de transbordo.

Enfoque Combinado Oferta–Demanda

Este modelo elimina las limitaciones del modelo anterior en la elección del punto de transbordo para usuarios de modo compuesto, considerándola como una opción que debe incluirse explícitamente en el sub–modelo de demanda. Con el objetivo de determinar la proporción de usuarios de modo compuesto entre el par w que trasborda en t, $\{G^{c}_{w,t}\}$, se considera un modelo adicional de tipo Logit G_2, que se agrega al sub–modelo de demanda:

$$G^{c}_{w,t}(U^{c*}_{w,t}) = \frac{exp - \beta\big(\lambda_t + U^{c*}_{w,t}\big)}{\sum\limits_{r} exp - \beta\big(\lambda_r + U^{c*}_{w,r}\big)}, \tag{7}$$

donde $\{\lambda_t + U^{c*}_{w,t}\}$ representa la desutilidad o valoración subjetiva de la opción modal auto–metro que utiliza el punto de transbordo t; λ_t, β son parámetros del modelo que deben calibrarse basado en observaciones de la realidad. La suma del denominador debe realizarse sobre todos los puntos de transbordo disponibles $r \in T_w$ para realizar el viaje compuesto.

A su vez, la valoración subjetiva $U^{c*}_{w,t}$ tiene la siguiente expresión:

$$U^{c*}_{w,t} = (\theta_1/\gamma_w)u^{a*}_{it} + \theta_2 u^{m*}_{t'j} + \theta_3 c_{tt'} \tag{8}$$

donde, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ son parámetros de calibración, γ_w es el factor de ocupación de los vehículos, u^{a*}_{it} es el costo objetivo de la sección de viaje en auto del modo combinado, $u^{m*}_{t'j}$ es el costo objetivo de la sección de viaje en metro del viaje combinado, finalmente $c_{tt'}$ es el costo de transbordo que incluye el estacionamiento y el acceso hasta el andén de la estación t'.

El representante de la valoración subjetiva del modo compuesto es la expresión Log–sum (Williams, 1977) de las desutilidades de las alternativas de transbordo existentes, $t \in T_w$.

$$L^{c}_{w} = -(1/\beta) \cdot ln\Big(\sum_{t \in T_w} exp\{-\beta(\lambda_t + U^{c}_{w,t})\}\Big), \qquad w \in W_a \tag{9}$$

Luego, el modelo de partición modal adquiere la siguiente forma:

$$G^{a}_{w}(L^{c*}_{w} - U^{a*}_{w}) = \frac{1}{1 + exp-(\alpha_{ac} + \beta(L^{c*}_{w} - U^{a*}_{w}))}, \tag{10}$$

Por lo tanto, el número de usuarios de auto–metro que trasbordan en la estación de metro t está dado por: $\{g^{a}_{w,t} = \overline{g}_{w} \cdot G^{a}_{w} \cdot G^{a}_{w,t}\}$

De esta forma, para los usuarios de modo compuesto se determinan matrices O–D intermedias, cuyos elementos generales son $\sum_j g^{a}_{w,t}$ y $\sum_i g^{a}_{w,t}$. Luego, la etapa de asignación de tráfico se simplifica, pues las matrices intermedias determinadas por el modelo de distribución se suman a las matrices modales auto $\{g^{a}_{w}\}$ y metro $\{g^{m}_{w}\}$ asignándose sobre las sub–redes puras auto y metro. Como consecuencia directa solo es necesario calcular rutas mínimas sobre las redes puras auto y metro, entre pares origen–destino (i,j), origen–transbordo (i,t) y transbordo–destino (t',j).

Por lo tanto, el concepto de equilibrio de tráfico se cumplirá solo sobre las redes puras auto y metro obteniéndose que para cada par w, todos los usuarios de modo compuesto que utilizan el mismo punto de transbordo t experimentan igual costo de operación en cada sección del viaje compuesto (auto u^{a*}_{it} y metro $u^{m*}_{t'j}$) y naturalmente los usuarios de modo auto experimentan igual costo de operación u^{a*}_{w}.

$$C^{k*}_{p} - u^{k*}_{w} \begin{cases} = 0, & \text{si } h^{*}_{p} > 0, \quad \text{p} \in \{P^{a}_{w}, P^{m}_{w}, P^{a}_{it}, P^{m}_{t'j}\} \\ \geq 0, & \text{si } h^{*}_{p} = 0, \quad \text{w} \in (W_{a}, W_{m}), (i,t) \in W_{a}, (t',j) \in W_{m} \end{cases} \tag{11}$$

Consideraciones Generales.

Al utilizar el Modelo 1, todas las rutas utilizadas (auto o compuestas) deben tener igual nivel de desutilidad objetiva: u^{*}_{w} (ver (3)). Al utilizar el Modelo 2, todas las rutas utilizadas de modo auto tienen igual nivel de desutilidad objetiva u^{a*}_{w}, todas las rutas de modo compuesto presentan igual nivel de desutilidad subjetiva U^{c*}_{w}, independientemente del punto de transbordo utilizado, pero u^{a*}_{w} y U^{c*}_{w} serán en general distintos y la diferencia depenederá de los valores de los parámetros de la función de elección modal tipo G_1 de (4).

Finalmente al utilizar el Modelo 3, todas las rutas utilizadas del modo auto presentan igual desutilidad u^{a*}_{w} (ver (11)). Todas las rutas de modo compuesto que usan el mismo punto de transbordo t presentan también el mismo nivel de desutilidad subjetiva: $\{U^{c*}_{w,t}\}$. Sin embargo las rutas de modo compuesto que usan distintos puntos de transbordo t, pueden tener distinta desutilidad y la diferencia entre ellas depende de los parámetros de la función de elección G_2. Sin embargo, los usuarios del modo compuesto experimentan igual costo de operación sobre cada una de las secciones del modo compuesto: u^{a*}_{it} entre el origen i y punto de transbordo t y $u^{m*}_{t'j}$ entre el andén de la estación t' y el punto de destino final j.

4. FORMULACION MATEMATICA.

Modelo 1, Enfoque Puro de Oferta

Este modelo corresponde a un problema de equilibrio de tráfico, sobre una red compuesta, este puede ser representado utilizando el formulismo de las desigualdades variacionales, como:

$$c(f^*)^T(f - f^*) > 0, \tag{12}$$

donde la solución f^* satisface las siguientes restricciones de continuidad:

$$\overline{g}_w = \sum_{p \in P_w^a} h_p^a + \sum_{p \in P_w^m} h_p^m + \sum_{p \in P_{w,a}^a} h_p^c, \qquad w \in W, \tag{13}$$

$$f_l = \sum_{w \in W} \frac{1}{\gamma_w} \left(\sum_{p \in P_{w,a}^c} \delta_{lp} h_p^c + \sum_{p \in P_w^a} \delta_{lp} h_p^a, \right), \quad l \in A, \tag{14}$$

$$f_l = \sum_{w \in W} \left(\sum_{p \in P_{w,a}^c} \delta_{lp} h_p^c + \sum_{p \in P_w^m} \delta_{lp} h_p^m, \right), \qquad l \in M, \tag{15}$$

$$\sum_{k \in B_t^a} f_{kt}^a = \sum_{w \in W} \frac{1}{\gamma_w} f_{tt',w}^c \qquad \forall\ t, \tag{16}$$

$$f_l \geq 0, \qquad\qquad l \in (A, M), \tag{17}$$

$$\delta_{lp} = \begin{cases} 1, & \text{si l} \in p; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \qquad l \in (A, M) \qquad \forall p,$$

h_p^a, h_p^m y h_p^c representan flujos en rutas p sobre la red auto A, metro M y compuesta $A + M$, expresados en pasajeros; f_l, $l \in A$ es el flujo de autos sobre el arco l de la red A y f_l, $l \in M$ es el flujo de autos en red M; $f_{tt',w}^c$ es el flujo de pasajeros correspondientes al par w que utilizan el arco de transbordo (t, t'); f_{kt}^a es el flujo de vehículos sobre el arco (k, t) que conecta un nodo k de la red auto con la zona de estacionamiento t y B_t^a es el conjunto de nodos de la red auto que accesan una zona de estacionamiento t en forma directa, mediante el arco (k, t).

Las restricciónes (13) a (17) indican respectivamente: continuidad de la demanda total entre el par w (13); compatibilidad de flujos en arcos de la red auto (14), metro (15), estacionamiento (16) y no–negatividad de los flujos (17).

El problema definido por las ecuaciones (12) a (17) es equivalente al siguiente modelo de optimización:

$$(P1): \qquad \min_{(f) \in \Omega^1} Z = \theta_1 \sum_{l \in A} \int_0^{f_l} c_l(x) d(x) + \theta_2 \sum_{l \in M} \int_0^{f_l} c_l(x) d(x), \tag{18}$$

donde Ω^1 es el conjunto definido por las restricciones (13) a (17). En este caso para simplificar la representación (18), se incluyó el arco de transbordo en la red metro. Sin embargo esta representación tiene la desventaja de que los costos de transbordo aparecen multiplicados por el mismo parámetro θ_2 que el correspondiente a la red metro en vez de un nuevo parámetro θ_3 que indica que para el viajero, usar el arco de transbordo tiene una desutilidad particular distinta a la de la sección auto o metro del viaje. Se puede incluir explícitamente la diferenciación considerando en la función objetivo un término adicional del tipo:

$$\theta_3 \sum_{tt'} \int_0^{f_{tt'}} c_{tt'}(x)d(x) \tag{19}$$

Modelo 2, Enfoque Intermedio Combinado Oferta–Demanda.

Las condiciones de equilibrio (4), (5) y (6) correspondientes al segundo modelo, son equivalentes a la siguiente desigualdad variacional (Florian y Spiess, 1983):

$$c(\overline{f}^*)^T(\overline{f} - \overline{f}^*) - G^{-1}(g_w^{a*})(g_w^a - g_w^{a*}) \geq 0, \tag{20}$$

la solución $\overline{f}$ debe satisfacer las siguientes restricciones de continuidad:

$$\overline{g}_w = g_w^a + g_w^c, \qquad w \in W_c, \tag{21}$$

$$\overline{g}_w = g_w^a + g_w^m, \qquad w \in W_m, \tag{22}$$

$$g_w^a = \sum_{p \in P_w^a} h_p^a, \qquad w \in W_a, \tag{23}$$

$$g_w^m = \sum_{p \in P_w^m} h_p^m, \qquad w \in W_m, \tag{24}$$

$$g_w^c = \sum_{p \in P_{w,c}^c} h_p^c, \qquad w \in W_c, \tag{25}$$

$$\overline{f}_l = \sum_{w \in W} \frac{1}{\gamma_w} \left(\sum_{p \in P_{w,c}^c} \delta_{lp} h_p^c + \sum_{p \in P_w^a} \delta_{lp} h_p^a, \right), \quad l \in A, \tag{26}$$

$$\overline{f}_l = \sum_{w \in W} \left(\sum_{p \in P_{w,c}^c} \delta_{lp} h_p^c + \sum_{p \in P_w^m} \delta_{lp} h_p^m, \right), \qquad l \in M, \tag{27}$$

$$\sum_{k \in B_t^a} f_{kt}^a = \sum_{w \in W} \frac{1}{\gamma_w} f_{tt',w}^c, \qquad \forall \ t, \tag{28}$$

$$\overline{f}_l \geq 0, \qquad l \in (A, M), \tag{29}$$

$$\delta_{lp} = \begin{cases} 1, & \text{si } l \in p; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \qquad l \in (A, M), \qquad \forall p,$$

Es necesario mencionar que dado que se tiene un modelo de demanda G_1 que determina separadamente matrices de viaje modo auto $\{g_w^a\}$ y modo compuesto $\{g_w^c\}$, los flujos $\overline{f}_l$ son vectoriales (ver (1) y (2)) ya que sobre cada arco de las redes A y M tenemos dos tipos de viajeros (del modo puro correspondiente y del modo compuesto). Sin embargo, de acuerdo con (2), el Jacobiano de las funciones de costo $c_l(\overline{f}_l)$ es simétrico, luego existe un problema de optimización equivalente con solución única.

De esta forma el modelo definido por las ecuaciones (20) a (29) es equivalente al siguiente problema de optimización:

$$(P2): \qquad \min_{\{f,g\}} Z = \theta_1 \sum_{l\in A} \oint_0^{\overline{f}_l} c_l(\overline{x})d(\overline{x}) \quad +\theta_2 \sum_{l\in M} \oint_0^{\overline{f}_l} c_l(\overline{x})d(\overline{x})$$
$$- \sum_{\substack{w\in W_c \\ w\in W_m}} \int_0^{g_w^c} G_w^{-1}(y)dy, \qquad \{f,g\} \in \Omega^2. \quad (30)$$

donde Ω^2 es el conjunto definido por las restricciones (21) a (29). En forma análoga al primer modelo aquí se está suponiendo que los arcos de transbordo están incluidos en la red metro; en otro caso se debe considerar otro término en la función objetivo (30) igual al propuesto anteriormente (19).

Modelo 3, Enfoque Combinado Oferta–Demanda.

Las condiciones de equilibrio (7) a (11), definen al tercer modelo y pueden obtenerse como las condiciones de optimalidad del siguiente problema de optimización, en que por simplicidad se supone un tratamiento del arco de transbordo similar al considerado en el modelo anterior. Además, dado que lo que interesa es mostrar la forma de considerar conjuntamente, modos puros y compuestos alternativos, la siguiente formulación se presenta para aquellos pares w en que las únicas alternativas son auto v/s auto–metro. Es trivial, aunque complica un poco la presentación, el agregar la alternativa metro.

$$(P3): \qquad \min_{\{h_p\}} Z = \quad \theta_1 \sum_{l\in A} \oint_0^{\overline{f}_l} c_l(\overline{x})d(\overline{x}) \quad + \quad \theta_2 \sum_{l\in M} \oint_0^{\overline{f}_l} c_l(\overline{x})d(\overline{x}) \qquad (31)$$
$$+ \quad (1/\beta)\sum_w g_w^a \left(lng_w^a - 1 + \alpha\right) + (1/\beta)\sum_w \sum_{t\in T_w} g_{w,t}^c \left(lng_{w,t}^c - 1\right),$$

$$\{s.a.\} \qquad : \overline{g}_w = g_w^a + g_w^c, \qquad w \in W_c, \tag{32}$$

$$g_w^a = \sum_{p \in P_w^a} h_p^a, \qquad w \in W_a, \tag{33}$$

$$\overline{f}_l = \sum_{w \in W} \frac{1}{\gamma_w} \left(\sum_{p \in P_{it}^a} \sum_{t \in T_w} \delta_{lp} h_p^c + \sum_{p \in P_w^a} \delta_{lp} h_p^a, \right), l \in A, \tag{34}$$

$$\overline{f}_l = \sum_{w \in W} \left(\sum_{p \in P_{tj}^m} \sum_{t \in T_w} \delta_{lp} h_p^c + \sum_{p \in P_w^m} \delta_{lp} h_p^m, \right), \quad l \in M, \tag{35}$$

$$g_{it}^c = \sum_{p \in P_{it}^a} h_p^c, \qquad \forall \ (i,t) \tag{36}$$

$$g_{tj}^c = \sum_{p \in P_{tj}^m} h_p^c, \qquad \forall \ (t,j) \tag{37}$$

$$g_{it}^c = \sum_j g_{w,t}^c, \qquad \forall \ (i,t) \tag{38}$$

$$g_{tj}^c = \sum_i g_{w,t}^c, \qquad \forall \ (t,j) \tag{39}$$

$$g_t = \sum_w g_{w,t}^c \qquad \forall \ t \tag{40}$$

$$g_w^c = \sum_{t \in T_w} g_{w,t}^c \qquad w \in W_c, \tag{41}$$

$$h_p \geq 0, \qquad p \in \{P_w^a, P_{it}^a, P_{tj}^m\} \tag{42}$$

$$\delta_{lp} = \begin{cases} 1, & \text{si l} \in p; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \qquad l \in (A, M), \qquad \forall p \tag{43}$$

5. Condiciones de Optimalidad.

En esta sección se mostrará, para el caso del tercer modelo como las condiciones de equilibrio y (7) a (11), se obtienen por las condiciones necesarias de optimalidad del problema (P3) definido por las formulaciones (31) a (43). En forma análoga, aunque más sencilla, se puede demostrar lo mismo para el caso del Modelo 2 y para el caso del Modelo 1 resulta evidente.

El problema (P3) es de la forma: $(Min \quad Z, \quad s.a: \quad ax = b_i)$ y el correspondiente Lagrangiano $\mathcal{L}$ será de la forma: $\mathcal{L} = Z + \sum_i \lambda_i (b_i - ax)$, donde λ_i es el multiplicador de lagrange correspondiente a la restricción i. Para simplificar la notación nos concentraremos sólo en aquellos pares O – D, $w \in W_c$ que disponen de las alternativas auto y compuesta.

El Lagrangiano considera explícitamente sólo tres restricciones, estas son: (38) el número de viajes en modo compuesto, desde el origen i que utilizan transbordo t, debe ser igual a la suma de los viajes originados en i hacia todos los destinos a través del transbordo t, (40) el número total de viajes en modo compuesto que utilizan el transbordo t, debe ser igual a la suma sobre todos los pares O – D que trasbordan en t; (41) el número total de viajes en modo compuesto entre un par O – D w, debe ser igual a la suma sobre todos los puntos de transbordo t. Las otras restricciones se utilizan directamente en la función objetivo a través de la derivación en cadena de las condiciones de optimalidad. Finalmente el Lagrangiano resulta igual a:

$$\min_{\{h_p,\lambda_{i,t},\lambda_t,\lambda_w\}} :$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \quad & \theta_1 \sum_{l\in A} \oint_0^{\overline{f}_l} c_l(\overline{x}) d(\overline{x}) \quad + \quad \theta_2 \sum_{l\in M} \int_0^{\overline{f}_l} c_l(\overline{x}) d(\overline{x}) \\
+ \quad & (1/\beta) \sum_w g_w^a \left(ln g_w^a - 1 + \alpha \right) + (1/\beta) \sum_w \sum_{t\in T_w} g_{w,t}^c \left(ln g_{w,t}^c - 1 \right) \\
+ \quad & \sum_{i,t} \lambda_{i,t} \left(\sum_j g_{w,t}^c - g_{it}^c \right) \\
+ \quad & \sum_t \lambda_t \left(\sum_w g_{w,t}^c - g_t \right) \\
+ \quad & \sum_w \lambda_w \left(\sum_t g_{w,t}^c - g_w^c \right).
\end{aligned} \tag{44}$$

Asumiendo que sólo se analizan pares O –D $w \in W_c$, las variables relevantes son:

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_p, & p \in P_w^a \\ h_p, & p \in P_{it}^a \\ h_p, & p \in P_{tj}^m \end{array} \right\} \qquad \{\lambda_{i,t}, \quad \lambda_t, \quad \lambda_w\}$$

El multiplicador $\lambda_{i,t}$, se puede interpretar como el precio sombra del costo de viaje entre el origen i y transbordo t, λ_w como el precio sombra del costo de viaje en modo compuesto entre el origen i y destino j y λ_t como el precio sombra de utilizar el transbordo t, el que se refiere en general a su atractividad.

Es necesario notar que dado que el Jacobiano de $\{c_l(\overline{x})\}$ es simétrico tal como se demostró anteriormente la solución de la integral de línea del primer término en (31) está definida y es única. Además, dado que las funciones $c_l(\overline{x})$ son monótonas crecientes en $\overline{x}$, todos los términos de la expresión (31) son convexos, luego las condiciones de optimalidad de Khun–Tucker (Zangwill, 1969) son necesarias y suficientes para garantizar la optimalidad de la solución: $\{h_p^*\}$.

Si derivamos en forma parcial $\mathcal{L}$, con respecto a las variables mencionadas, se tendrá:

$$\partial\mathcal{L}/\partial h_p = (\theta_1/\gamma_w)C_p^a + (1/\beta)\left(lng_w^a + \alpha\right) + \lambda_w, \qquad p \in P_w^a, \tag{45}$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial h_p = (\theta_1/\gamma_w)C_p^a - \lambda_{i,t}, \qquad p \in P_{it}^a, \tag{46}$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial h_p = \theta_2 C_p^m + (1/\beta)lng_{w,t}^c + \lambda_{i,t} + \lambda_t + \lambda_w, \qquad p \in P_{tj}^m, \tag{47}$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_t = \sum_w g_{w,t}^c - g_t, \qquad \forall \ t, \tag{48}$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_{i,t} = \sum_j g_{w,t}^c - g_{i,t}^c, \qquad \forall \ (i,t), \tag{49}$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial\lambda_w = \sum_t g_{w,t}^c - g_w^c, \qquad w \in W_o, \tag{50}$$

De acuerdo a las restricciones de no–negatividad (42) se tiene que h_p^*, $p \in P_w^a$, alcanzará el valor óptimo (solución de equilibrio) cuando:

$$\partial\mathcal{L}/\partial h_p : \begin{cases} = 0, & \text{si } h_p^* > 0; \\ \geq 0, & \text{si } h_p^* = 0. \end{cases} \qquad p \in P_w^a \qquad \forall \quad w, \tag{51}$$

Luego, aplicando la condición (51) en (45), se obtiene:

$$C_p^{a*} : \begin{cases} = - & (\gamma_w/\theta_1)(1/\beta(lng_w^a + \alpha) + \lambda_w), \quad si \quad h_p^* > 0; \\ \geq - & (\gamma_w/\theta_1)(1/\beta(lng_w^a + \alpha) + \lambda_w), \quad si \quad h_p^* = 0; \end{cases} \quad p \in P_w^a, \quad \forall w, \tag{52}$$

De (52) se deduce que todas las rutas $p \in P_w^a$ efectivamente utilizadas presentan igual costo de operación u_w^{a*}; todas las rutas no utilizadas (en el mismo conjunto) presentan un costo mayor: $C_p^a > u_w^{a*}$. De esta forma la solución $\{h_p^*, p \in P_w^a\}$, satisface el primer principio de equilibrio de Wardrop (ver ((11)), en que:

$$u_w^{a*} = \frac{\gamma_w}{\theta_1}\left(\frac{1}{\beta}(lng_w^a + \alpha) + \lambda_w\right)$$

Aplicando la condición (51) en (46), se obtiene análogamente:

$$C_p^{a*} : \begin{cases} = & (\gamma_w/\theta_1)\lambda_{i,t}, \quad si \quad h_p^* > 0; \\ \geq & (\gamma_w/\theta_1)\lambda_{i,t}, \quad si \quad h_p^* = 0; \end{cases} \qquad p \in P_{it}^a, \qquad \forall (it), \tag{53}$$

Luego, se cumple el primer principio de Wardrop para todas las rutas que conectan el origen i con transbordo t, $p \in P_{it}^a$ (ver ((11)), en que:

$$u_{it}^{a*} = (\gamma_w/\theta_1)\lambda_{i,t}$$

Aplicando la condición (51) en (47), se obtiene análogamente el primer principio de Wardrop sobre la red metro, para los viajes entre t y j, (ver ((11)):

$$C_p^{m*} : \begin{cases} = & u_{tj}^{m*} \quad si \quad h_p^* > 0; \\ \geq & u_{tj}^{m*} \quad si \quad h_p^* = 0; \end{cases} \qquad p \in P_{tj}^m, \qquad \forall (tj), \tag{54}$$

con: $u_{tj}^{m*} = -\theta_2^{-1}\big((1/\beta)lng_{w,t}^{o} + \lambda_{i,t} + \lambda_t + \lambda_w\big)$, de esta forma se obtiene el primer principio de equilibrio del tercer modelo.

Ahora reemplazando $\lambda_{i,t}$ de (46) en (47), y reordenando los términos:

$$g_{w,t}^{c*} = exp\big(-\beta\lambda_w\big) \cdot exp\big(-\beta(\lambda_t + (\theta_1/\gamma_w)C_p^{a*} + \theta_2 C_p^{m*})\big), \tag{55}$$

Se puede ver que el término : $(\lambda_t + (\theta_1/\gamma_w)C_p^{a*} + \theta_2 C_p^{m*})$ corresponde a la valoración subjetiva del costo total de viaje para un usuario de modo compuesto, en ruta p que utiliza el punto de trasbordo t (ver (8)). Luego es fácil notar que la proporción de viajes en modo compuesto entre el par O − D $w = (i,j)$ que utilizan el transbordo t está dado por la expresión (7), correspondiente a la segunda condición de equilibrio del tercer modelo.

$$\frac{g_{w,t}^{c*}}{\sum_r g_{w,r}^{c*}} = \frac{exp - \beta\big(\lambda_t + U_{w,t}^{c*}\big)}{\sum_r exp - \beta\big(\lambda_r + U_{w,r}^{c*}\big)} \tag{56}$$

donde: $U_{w,t}^{c*} = (\theta_1/\gamma_w)C_p^{a*} + \theta_2 C_p^{m*}$

Ahora, reemplazando la expresión (55) en (50), se obtiene:

$$g_w^{c*} = \sum_{t\in T_w} \big(exp - (\beta\lambda_w) \cdot exp - \beta(\lambda_t + U_{w,t}^{c*})\big), \tag{57}$$

que puede escribirse como:

$$g_w^{c*} = exp(-\beta\lambda_w) \cdot \sum_{t\in T_w} exp - \beta(\lambda_t + U_{w,t}^{c*}) \tag{58}$$

Tomando logaritmo en ambos miembros, y reordenando, se obtiene :

$$\lambda_w = (1/\beta)ln \sum_{t\in T_w} exp - \beta(\lambda_t + U_{w,t}^{c*}) - (1/\beta)lng_w^{c*} \tag{59}$$

Reemplazando este valor de λ_w en (45) y reordenando, se tiene:

$$(\theta_1/\gamma_w)C_p^{a*} - \left(-(1/\beta)ln\sum_{t\in T_w} exp - \beta(\lambda_t + U_{w,t}^{c*})\right) = (1/\beta)\left(ln(\frac{\overline{g}_w}{g_w^{a*}} - 1) - \alpha\right), \tag{60}$$

Pero, con anterioridad se había definido "desutilidad en modo puro" como ($U_w^{a*} = (\theta_1/\gamma_w)C_p^{a*}$) y desutilidad representativa en modo "compuesto" como la expresión Log-Sum de las desutilidades de las rutas auto-metro posibles, de (7): $L_w^{c*} = -(1/\beta)ln \sum_{t\in T_w} exp - \beta(\lambda_t + U_{w,t}^{c*})$ y denotando como G^{-1} a la inversa de la función de elección modal tipo G_1 de (10), se obtiene la tercera condición de equilibrio del modelo 3.

$$U_w^{a*} - L_w^{c*} = G_w^{-1}(g_w^{a*}), \qquad w \in W_c \tag{61}$$

Luego se ha demostrado, en forma rigurosa que las condiciones de optimalidad del problema de optimización (P3), satisfacen las condiciones de equilibrio (7) a (11) del tercer modelo.

6. EXTENSIONES Y DESARROLLO FUTURO.

El desarrollo futuro de la presente investigación sigue dos líneas generales de acción, la primera se refiere al análisis matemático de las soluciones y la comparación entre las soluciones obtenidas con cada uno de los modelos planteados, la segunda se refiere a la calibración de los modelos y la implementación computacional de los algoritmos de solución. Esta requiere también el desarrollo de algoritmos de rutas mínimas especialmente adaptados para el caso de la red compuesta utilizada en el segundo modelo.

Agradecimientos.

Este proyecto se desarrolla con fondos aportados por FONDECYT, el objetivo del estudio es mejorar las herramientas de análisis de sistemas de transporte con conocimientos acordes al estado del arte en la materia, tendientes a evaluar correctamente las inversiones realizadas en transporte.

BIBLIOGRAFIA

- **AASHTIANI, H.Z y MAGNANTI, T.L.** (1981) "Equilibria on a congested transportation network". SIAM J. **Algebraic Discrete Meth. Vol. 2**, 213–216.
- **ABDULAAL, M. y LEBLANC, M.J.** (1979) "Methods for combining modal split and equilibrium assignment models". **Transportation Science, Vol 13**, 292–314.
- **DAFERMOS, S.C.** (1982) "The general multimodal network equilibrium problem with elastic demand". **Networks Vol 12, 57–72.**
- **FERNANDEZ, J.E. y DE CEA, J.** (1990) "Una aplicación de modelación de equilibrio en redes al sistema de transporte urbano de Santiago de Chile". **Apuntes de Ingeniería 39**, 23–40.
- **FERNANDEZ, J.E. y FRIESZ, T.L.** (1983) "Equilibrium predictions in transportation markets: the state of the art". **Transportation Research 17B**, 155–172.
- **FLORIAN, M.** (1977) "A traffic equilibrium model of travel by car and public transit modes". **Transportation Science. Vol. 8**, 166–179.
- **FLORIAN, M. y LOS, M.** (1979) "Determinig intermediate origen–destination matrices for the analysis of composite mode trips". **Transportation** Reserch. **Vol. 13–B**, *N°* 2, 91–103.
- **FLORIAN, M. y SPIESS, H.** (1983) "On binary mode choice/Assignment models". **Transportation Reserch. Vol. 17**, *N°* 1, 32–47.
- **ZANGWILL, W.I.** (1969) Nonlinear Programing: A Unified Approach. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.