

# **ACELERACION DEL ALGORITMO DE FRANK-WOLFE UTILIZANDO FUNCIONES CONICAS DE FLUJO-TIEMPO**

**Joaquín DE CEA, Enrique FERNANDEZ, Enrique CABRERA**

**Departamento de Ingeniería de Transporte  
Pontificia Universidad Católica de Chile**

**Santiago, Chile**

## Resumen

El reemplazo de las curvas de tipo BPR por funciones Cónicas de flujo-tiempo permite superar las principales dificultades que presenta el algoritmo de Frank-Wolfe al ser utilizado para resolver el problema de asignación de equilibrio en redes de transporte privado (equilibrio de tráfico). Este trabajo, de carácter experimental, presenta un análisis comparativo de los resultados de asignación obtenidas con ambos tipos de curvas. En particular se estudia la velocidad de convergencia del algoritmo y se comparan los vectores de flujos de equilibrio y niveles de servicio obtenidos. La experiencia ha sido realizada usando la red vial de Santiago, punta manana, año 1991 y una matriz estimada de demanda de viajes origen-destino. Toda la información mencionada proviene de ESTRAUS (Estudio del Sistema de Transporte Urbano de Santiago).

La principal conclusión del trabajo es que el uso de funciones cónicas se traduce en una importante disminución del número de iteraciones requeridas para alcanzar un porcentaje de error dado (incerteza). Así por ejemplo para alcanzar una incerteza de 3% usando curvas BPR se requieren 50 iteraciones mientras para lograr el mismo error empleando funciones cónicas se deben realizar 22 iteraciones. Lo que es más importante, estas diferencias crecen significativamente al exigirse una mayor precisión al algoritmo.

## 1. INTRODUCCION

Las funciones de "costo" o funciones "flujo-tiempo" asociadas a los arcos de la red vial, juegan un rol muy importante en el proceso de asignación de viajes o determinación de las condiciones de equilibrio en dicha red. En general, el efecto de la existencia de capacidad de una vía en el tiempo de viaje es recogido en los modelos de redes mediante el uso de curvas que expresan el tiempo de viaje (o el costo) sobre un arco en función del flujo vehicular.

La selección de un tipo adecuado de curvas considera un compromiso entre la capacidad que estas funciones deben tener para representar el fenómeno que se desea modelar (crecimiento del tiempo de viaje al aumentar el flujo sobre el arco) por un lado, y la forma más adecuada desde el punto de vista de los problemas que pueden presentarse en la convergencia del algoritmo de asignación, por el otro. Generalmente estas funciones se expresan como el producto del tiempo de flujo libre  $\alpha$  multiplicado por una función de congestión cuyo argumento es la razón entre el flujo  $v$  y una estimación de la capacidad  $c$ :

$$t(v) = \alpha \cdot f\left(\frac{v}{c}\right) \quad (1)$$

En el pasado se han propuesto muchos tipos de funciones flujo-tiempo (ver Branston, 1976), sin embargo las más utilizadas en aplicaciones prácticas han sido las funciones BPR (Bureau of Public Roads, 1964). En su forma más general esta función toma la forma:

$$t(v) = \alpha + \beta \cdot \left(\frac{v}{c_p}\right)^n \quad (2)$$

en la que  $c_p$  representa la capacidad práctica del arco, definida vagamente como "el número máximo de vehículos que puede pasar a través de un punto determinado de un arco vial durante una hora sin que la densidad de tráfico se haga tan grande como para provocar esperas no razonables a los conductores" (Bureau of Public Roads, 1950). Si se denota por  $x$  la razón flujo-capacidad práctica ( $v/c_p$ ) la expresión (2) puede escribirse como:

$$t(v) = \alpha + \beta \cdot x^n \quad (3)$$

donde  $\alpha$  representa costo de viaje a flujo libre,  $\alpha + \beta$  tiempo de viaje a flujo de capacidad y  $n$  es el exponente de la función, que define cuan rápido aumenta el tiempo de viaje al aumentar  $x$ . Una función equivalente fue definida por

Steenbrinck (1974); en ella la capacidad práctica es reemplazada por el concepto de capacidad máxima ( $c_s$ ) para flujo a régimen permanente.

$$t(v) = \alpha + \beta \cdot \left(\frac{v}{c_s}\right)^n \quad (4)$$

Aun cuando funciones como las señaladas en (2) y (3) son ampliamente usadas en la mayoría de las implementaciones de algoritmos de asignación de equilibrio de tráfico, presentan una serie de inconvenientes, especialmente de carácter numérico, que atentan contra la eficiencia computacional de los algoritmos mencionados. Por tal motivo, se han hecho esfuerzos por proponer funciones que representando adecuadamente el fenómeno que se desea modelar, superen las dificultades antes mencionadas. Uno de los intentos más promisorios aparecidos en la literatura reciente es el presentado por Spiess (1989), quien plantea la utilización de "funciones cónicas" \*. Estas tienen la siguiente forma:

$$t(x) = \alpha + \beta \cdot (\sqrt{n^2(1-x)^2 + \delta^2} - n(1-x) - \delta + 1) \quad (5)$$

con:

$$\delta = \frac{2n-1}{2n-2}$$

De acuerdo a la experiencia reportada en Spiess (1989) el reemplazo de funciones cónicas permite mejorar notablemente la convergencia del algoritmo de Frank-Wolfe respecto a la observada para las tradicionales funciones BPR.

El presente trabajo reporta una experiencia motivada por la búsqueda de mejoras en la eficiencia computacional del modelo ESTRAUS, desarrollado en el contexto del Estudio de Evaluación y Desarrollo del Sistema de Transporte Urbano de la Ciudad de Santiago (SECTU, 1989). Su objetivo fue doble. Por un lado interesaba evaluar el impacto del cambio de funciones de costo en las características de convergencia del algoritmo de asignación de equilibrio de tráfico y su consecuente impacto en el tiempo de cálculo requerido. En segundo término interesaba establecer un procedimiento que permitiera transformar las funciones BPR ya calibradas para la red de Santiago en aquellas funciones cónicas que mejor reprodujeran los resultados obtenidos antes de la transformación.

El artículo ha sido organizado como sigue. En la sección 2 se analizan en forma breve las desventajas de las funciones BPR y se presentan las ventajas de

---

\* Su nombre proviene del hecho que la función resulta de la intersección de un plano (x-y) con un cono obtuso tridimensional. Una denominación más exacta para todas las funciones podría ser "funciones hiperbólicas de congestión"

las funciones cónicas. Luego en la sección 3 se presentan los principales resultados de la comparación de flujos y niveles de servicio de equilibrio usando funciones BPR y cónicas, poniendo especial énfasis en la calidad de los resultados y en la eficiencia computacional para distintos niveles de precisión del algoritmo de Frank-Wolfe. Se introduce el concepto de "cónicas ajustadas", que corresponden a las funciones cónicas ligeramente modificadas para reproducir en la mejor forma los resultados obtenidos previamente utilizando las funciones BPR, sin sacrificar la eficiencia computacional de las funciones cónicas. Finalmente en la sección 4 se entregan algunas conclusiones del trabajo.

## 2. FUNCIONES BPR Y CONICAS: VENTAJAS Y DESVENTAJAS

Los principales problemas asociados al uso de funciones de flujo-tiempo de tipo BPR (especialmente para valores altos del parámetro de congestión  $n$ ) son los siguientes:

- i) En las primeras iteraciones del algoritmo de Frank-Wolfe la variable " $x$ " puede alcanzar valores bastante mayores que 1, por lo que el tiempo de viaje debido a la congestión puede resultar extremadamente alto. Este fenómeno puede provocar problemas de convergencia del algoritmo, dificultades numéricas y pérdida de precisión. Todo aquello redundaría en el aumento del número de iteraciones necesarias para alcanzar un nivel aceptable de exactitud, con el consecuente aumento del tiempo de cálculo.
- ii) Para arcos que operan bajo su capacidad, especialmente cuando se trabaja con altos valores de " $n$ ", el tiempo de viaje resulta igual (o muy similar al tiempo de flujo libre). El modelo de equilibrio degenera localmente a una asignación de todo o nada, en el que el menor cambio (o error) en el tiempo de flujo libre puede tener como consecuencia un cambio de flujos de un camino a otro. Adicionalmente, dado que para altos valores de  $n$  el valor numérico del tiempo de viaje resulta idéntico para un rango relativamente amplio de flujo, la solución de equilibrio no es garantizadamente única pues la función flujo-tiempo no es estrictamente creciente, debido a problemas de aproximación numérica.
- iii) A pesar de que las funciones BPR son bastantes simples, su evaluación computacional requiere al menos de dos operaciones trascendentales (una logarítmica y una exponencial) para implementar el cálculo de  $x^n$ . A pesar de la formulación más complicada, la evaluación de funciones cónicas resulta una eficiente alternativa comparativamente con las funciones tipo BPR (ver Spiess, 1989).

Las características principales de las funciones cónicas, por su parte, pueden



resumirse como sigue (debe considerarse que los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $n$  de la expresión (5) son los mismos que los que aparecen en la expresión (3) ) :

- i)  $t(x)$  es estrictamente creciente (condición necesaria para que el modelo converja a una solución única).
- ii)  $t(0) = \alpha$  y  $t(1) = \alpha + \beta$ . Esto garantiza compatibilidad con las funciones BPR en cuanto a los tiempos de viaje a flujo libre y a capacidad.
- iii)  $t'(x)$  existe y es estrictamente creciente (esto asegura la convexidad de la función de oferta y así la convexidad de la función objetivo del problema de equilibrio de tráfico).
- iv)  $t'(1) = n$  (define cuan rápido afecta el incremento de  $x$  al tiempo de viaje).
- v)  $t'(0) < Mn$ , con  $M$  entero finito (limita el valor del tiempo de viaje en un arco a un valor razonable para grados de saturación mayores que 1).
- vi)  $t'(0) > 0$  (garantiza unicidad de los flujos sobre los arcos y distribuye flujos sobre rutas no congestionadas proporcionales a su capacidad).

Como el lector notará, las cuatro primeras características son satisfechas también por las funciones de tipo BPR. Las dos características restantes permiten a las funciones cónicas superar los problemas planteados anteriormente para las de tipo BPR. Debe notarse, además, que la función BPR es en realidad estrictamente creciente. Lo que sucede en este caso es que para valores altos de " $n$ ", por problemas de precisión y aproximación numérica de los computadores existe un rango de flujos ( entre 0 y 300 pas/hr. por ejemplo) en que el valor "aproximado" del tiempo de viaje resulta ser constante (tiempo de flujo libre), ocasionándose el problema antes mencionado.

La figura 1 muestra la forma de las funciones BPR y cónica para un mismo conjunto de valores de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $n$ . Es importante hacer las siguientes observaciones:

- i) Ambas curvas parten en el punto  $(0, \alpha)$  y se cortan en el punto  $(1, \alpha + \beta)$ .
- ii) Mientras que para valores bajos de  $x$  ( $0 - 0,4$ ), la función BPR es prácticamente paralela al eje  $x$ , la cónica es siempre creciente.
- iii) La función cónica va por sobre la BPR para valores de  $x$  entre 0 y 1 y por debajo de ella para  $x > 1$ .

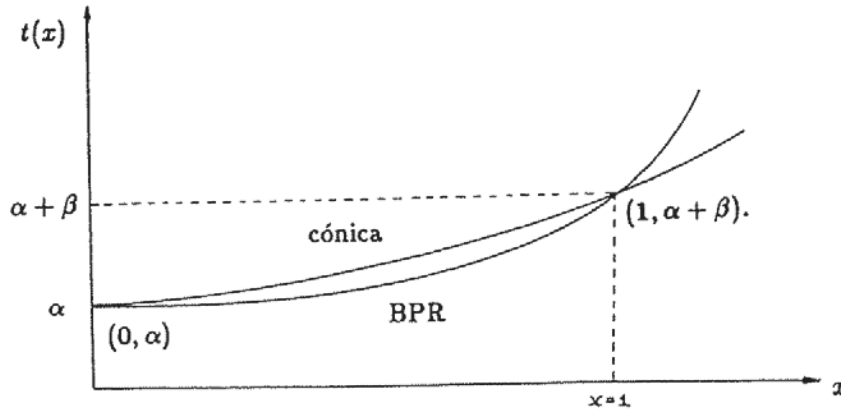


Figura 1: Forma de funciones BPR y cónica

### 3. DESCRIPCION DE LA EXPERIENCIA REALIZADA

#### 3.1 Traspaso de Parámetros

Como se observa en la figura 1, el simple traspaso de las funciones BPR a cónicas, manteniendo los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $n$  (en nuestro caso ya estimados en ESTRAUS al calibrar las funciones BPR) se traduciría en la obtención de funciones que, en el rango de valores de  $x$  comprendidos entre 0 y 1, sobrestimarían el valor de  $t(x)$  respecto de los obtenidos utilizando funciones BPR. Para valores de  $x$  superiores a 1 se produciría la situación contraria. Dado que el objetivo principal del trabajo es transformar las funciones BPR de la red de Santiago ya calibradas en funciones cónicas compatibles, se procedió a ajustar las cónicas a fin de minimizar las diferencias entre estas y las funciones BPR (ver figura 1).

Es claro que este ajuste solo puede limitarse a variar el valor de  $n$  puesto que como hemos visto  $\alpha$  y  $\beta$  deben ser iguales en ambos tipos de curvas (recuérdese que  $\alpha$  representa el tiempo a flujo libre y  $\alpha + \beta$  el tiempo a capacidad).

El criterio empleado en el ajuste de las funciones cónicas se basó en la necesidad de "acercar" la cónica a la BPR. Esto se logra "bajando" la cónica en el rango  $0 < x < 1$  y "subiéndola" en el rango  $x > 1$ . Este doble efecto se puede obtener manteniendo fijos los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  y aumentando el valor de " $n$ ". Esto "achata" la curva cónica y la acerca a la BPR (ver Figura 2). El ajuste se realizó numéricamente mediante una minimización de la integral de la diferencia entre ambas curvas, obteniéndose el siguiente valor para el parámetro de congestión de

las cónicas ajustadas:

$$\hat{n} = 1,2n + 0,6 \quad (6)$$

Así, la transformación de curvas consistió en pasar del conjunto de parámetros  $\{\alpha, \beta, n\}$  para cada arco de la red calibrada con funciones de flujo-tiempo de tipo BPR al conjunto  $\{\alpha, \beta, \hat{n}\}$  para las cónicas.

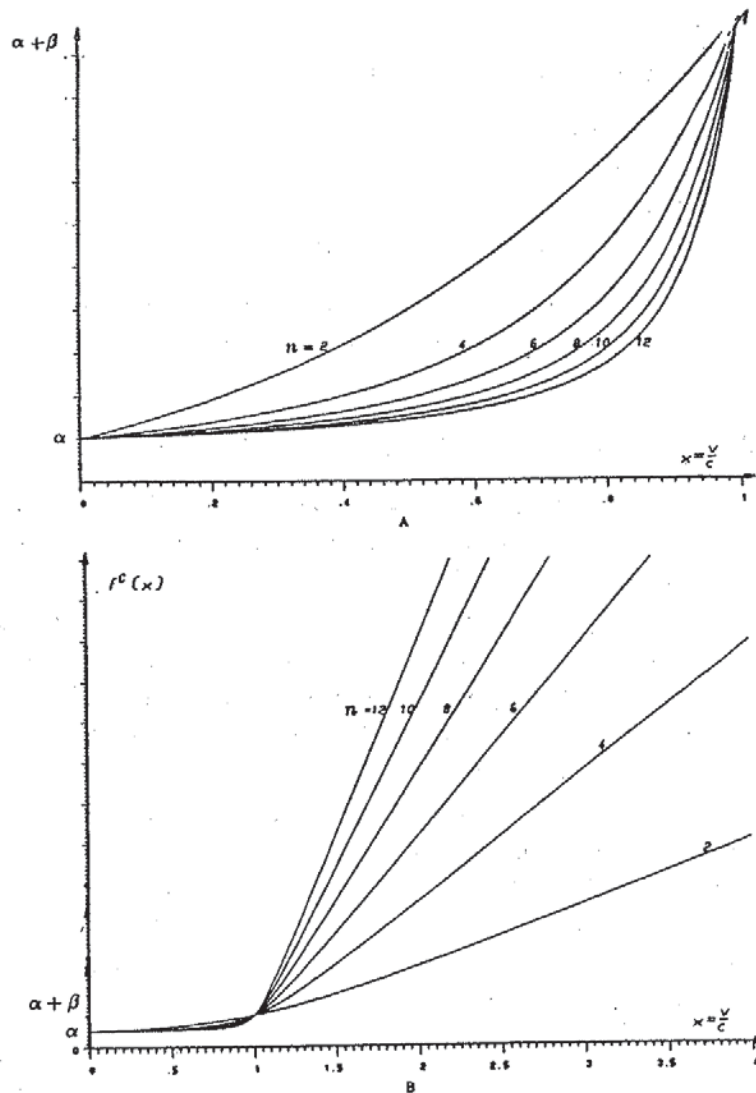


Figura 2: Forma de funciones cónicas para distintos valores de "n"

### 3.2 Red Utilizada y Algoritmo de Asignación de Equilibrio

El Análisis comparativo del efecto del uso de ambos tipos de curvas en la eficiencia del algoritmo de Frank-Wolfe y en la calidad de los resultados de equilibrio se realizó utilizando una implementación de dicho algoritmo desarrollada en el Departamento de Transporte de la Pontificia Universidad Católica de Chile y la red vial de Santiago codificada para el período punta AM, para el año 1991 (SECTU, 1989).

Las características más importantes de dicha red son:

- Número de centroides :	264
- Número de nodos :	804
- Número de arcos de acceso :	307
- Número de arcos de la red vial:	3148

Evidentemente fue necesario modificar el algoritmo de asignación con el objetivo de tener una versión que considerara las funciones de flujo-tiempo de tipo cónicas.

### 3.3 Análisis de Convergencia del Algoritmo de Asignación

La velocidad de convergencia del algoritmo de Frank-Wolfe se analiza, considerando como unidad de medida el número de iteraciones requeridas para alcanzar un nivel dado de precisión. Debe mencionarse que a pesar de que la evaluación de funciones cónicas es más rápida que la correspondiente a funciones de tipo BPR (ver Spiess, 1989), el tiempo de ejecución de una iteración es muy similar en ambos casos. Esto se debe a que las evaluaciones de las funciones flujo-tiempo representa una pequeña parte del tiempo de ejecución de una iteración completa del algoritmo de Frank-Wolfe.

La figura 3 presenta en forma gráfica el número de iteraciones requerido por el algoritmo para alcanzar una determinada incerteza (diferencia porcentual entre las cotas superior e inferior de la solución óptima) en ambos casos, partiendo de una solución inicial factible obtenida asignando la matriz de demanda de viajes a rutas mínimas, cuando los tiempos de los arcos corresponden a los tiempos de flujo libre. La misma información se presenta en la tabla 1.

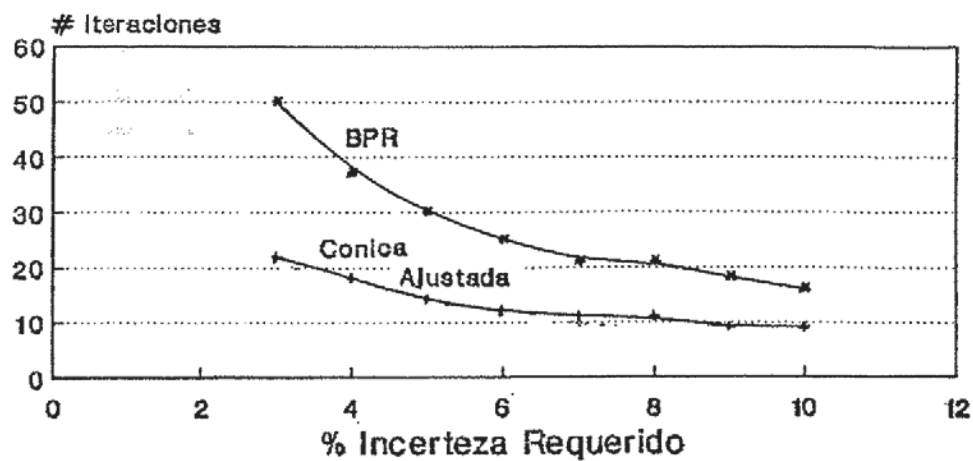
Es interesante hacer notar que el número de iteraciones requerido para alcanzar grados de incerteza del orden de 4 a 10% es aproximadamente el doble cuando se usan funciones de tipo BPR en comparación a las requeridas al usar funciones cónicas. Lo que es más interesante, esta diferencia crece significativamente cuando se exige mayor precisión al algoritmo.



**TABLA N° 1 COMPARACION DE LA VELOCIDAD DE CONVERGENCIA  
DEL ALGORITMO DE EQUILIBRIO DE TRAFICO  
PARA FUNCIONES BPR Y CONICAS AJUSTADAS**

% Incerteza	N° Iteraciones	
	BPR	Cónicas Ajustadas
10	17	9
9	19	10
8	21	11
7	22	12
6	26	13
5	30	15
4	37	18
3	50	22

**Tabla Número 1**



**Figura Número 3**

### 3.4 Comparación de las Soluciones de Equilibrio

Las soluciones de equilibrio (para distintos valores de incerteza) obtenidas con las curvas BPR y cónicas ajustadas se comparan gráficamente en las figuras 4 y 5. En la primera de ellas se presenta en el eje vertical el flujo de equilibrio obtenido para la asignación realizada con funciones cónicas ajustadas y en el eje horizontal el valor correspondiente obtenido en la asignación efectuada con funciones BPR. Las observaciones graficadas corresponden al valor que para un determinado arco de la red tiene dicho flujo en uno u otro caso. La figura 5 representa el mismo ejercicio pero para los costos (tiempos) modelados en ambas situaciones.

En todos los casos se puede observar que la inmensa mayoría de los puntos se encuentran muy cercanos a la recta de  $45^\circ$ , lo que es un índice de lo similares que resultan ambas soluciones. También resulta claro que en la medida que se exige al algoritmo un mayor grado de exactitud (menor incerteza) existe una mayor correlación entre las soluciones de equilibrio. Así por ejemplo, para una incerteza del 4% los coeficientes de correlación entre las soluciones de flujos y costos para las asignaciones con funciones BPR y cónicas ajustadas alcanzan valores de 0,9945 y 0,9519 respectivamente.

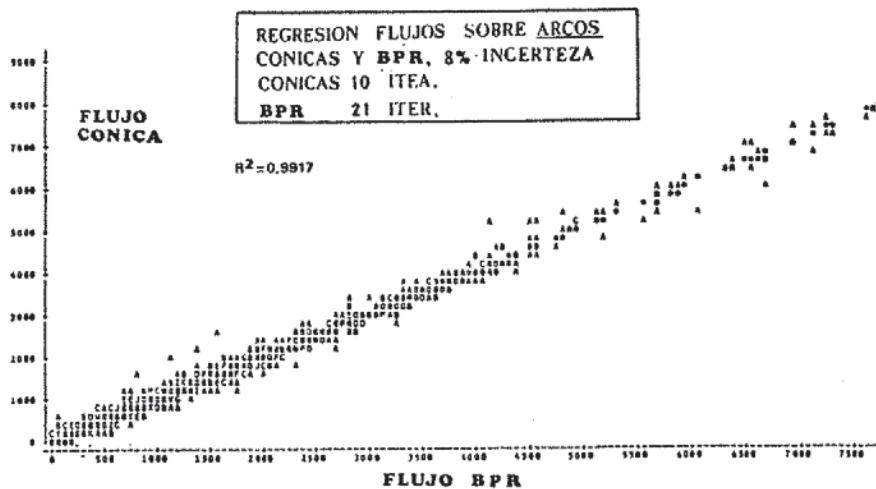
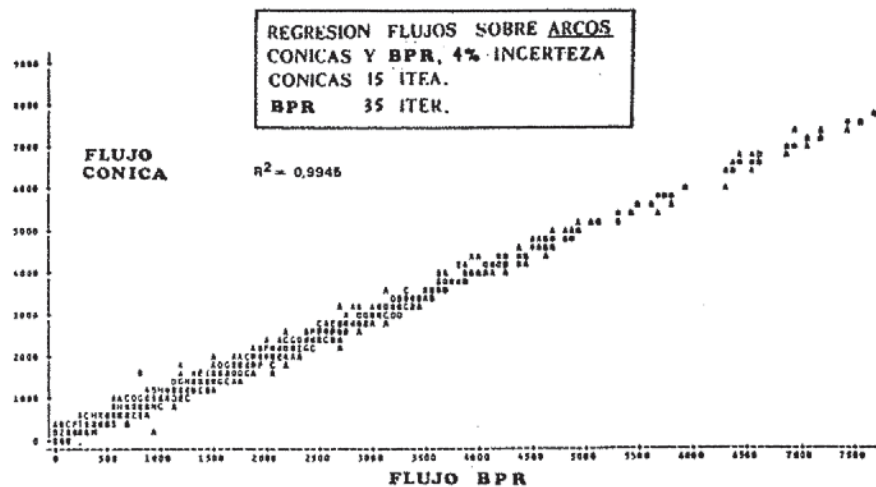


Figura 4

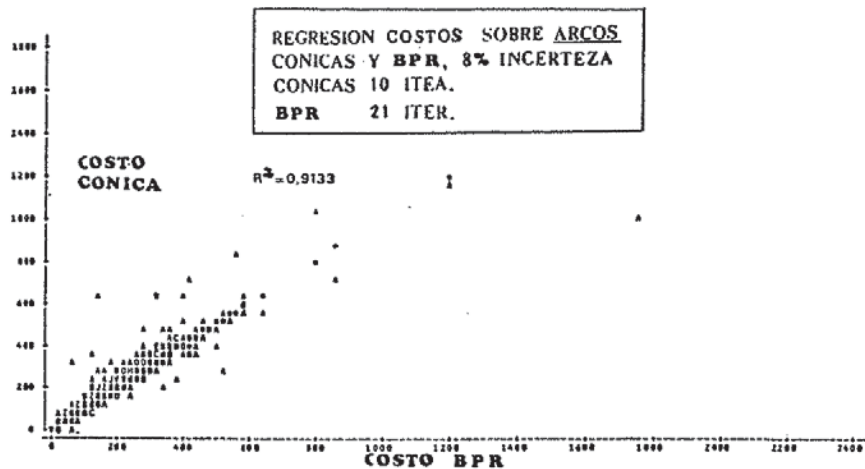
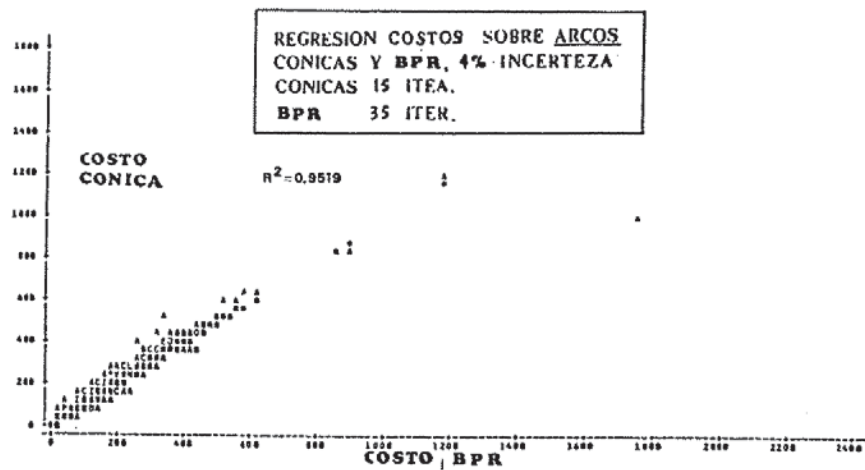


Figura 5



#### 4. CONCLUSIONES

Los resultados del análisis realizado permiten recomendar el uso de funciones cónicas flujo-tiempo para representar las curvas de oferta de los arcos de una red vial. Se confirman los resultados reportados por Spiess (1989) en el sentido de que para niveles equivalentes de exactitud, dichas funciones permiten reducciones significativas en los tiempos de ejecución del algoritmo de Frank-Wolfe en relación a los tiempos requeridos por el algoritmo cuando se usan las clásicas funciones BPR.

En el caso de la red de Santiago utilizada en esta experiencia la reducción obtenida fue del orden de 60% para niveles de incerteza de 4 a 5%. Dicha reducción podría ser mucho mayor para niveles menores de incerteza. Dicho de otra forma, para el mismo número de iteraciones (del orden de las 50 realizadas actualmente en Santiago con funciones BPR) se pueden esperar mejores resultados (más próximos al óptimo) usando funciones cónicas.

Otro aspecto interesante de comentar es que si se desea pasar de funciones BPR previamente calibradas (como sucede en el caso de las redes de Santiago, Valparaíso y Concepción) a funciones cónicas, resulta más adecuado traspasar el parámetro  $\hat{n}$  modificado ( $\hat{n} = 1, 2n+0,6$ ) manteniendo inalterados los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

#### REFERENCIAS

- BRANSTON, D. (1976) "Link Capacity Functions: A Review", *Transportation Research*. Vol. 10, 223-236.
- BUREAU OF PUBLIC ROADS (1950) "Highway Capacity Manual", Washington D.C.
- BUREAU OF PUBLIC ROADS (1964) "Traffic Assignment Manual", U.S. Department of Commerce, Urban Planning Division, Washington D.C.
- SECTU (1989) "Estudio de Evaluación y Desarrollo del Sistema de Transporte Urbano de la Ciudad de Santiago", Comisión de Transporte Urbano, Santiago, Chile.
- SPIESS, H. (1990) "Conical Volume-Delay Functions", *Transportation Science*, Vol 24, 153-158.
- STEENBRINK, P.A. (1974) "Optimization of Transport Networks", Wiley, New York.

