

METODOLOGIA PARA LA DETERMINACION DE TRAYECTORIAS OPTIMAS PARA
SISTEMAS DE FERROCARRIOLES SUBTERRANEOS

Patricia X. Sotomayor y Manuel A. Duarte
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile
Av. Tupper 2007, Casilla 412-3
Santiago, CHILE

RESUMEN

En este trabajo se analiza el problema de la determinación óptima y simultánea del perfil de la vía por donde circula el tren, así como también la política de control que debe ser aplicada al tren, con el objeto de minimizar el consumo de energía entre cada par de estaciones. Como función criterio se escoge la energía consumida por el tren en un viaje de ida y vuelta y el problema se resuelve numéricamente sujeto a una serie de restricciones tales como velocidad máxima, pendiente máxima, aceleración máxima, fuerza eléctrica máxima etc. El método utilizado para resolver el problema así planteado es el método de Gradiente - Restauración desarrollado por Angelo Miele. El método se aplica al caso del material rodante del Metro de Santiago, comparando los resultados con el perfil correspondiente a la Línea No 1. De este estudio se desprende que es posible obtener ahorros de energía si la vía se diseña adecuadamente en la etapa previa a la construcción de ferrocarriles metropolitanos.

1. INTRODUCCION

En un sistema de ferrocarril metropolitano, el consumo de energía eléctrica es generalmente alto, la mayor parte de esta energía se usa en tracción eléctrica. La magnitud de este consumo puede ascender a varios millones de dólares anuales, lo cual justifica los esfuerzos por reducirlo. Por ejemplo, en el caso particular de la Línea 1 del Metro de Santiago, el consumo anual de energía en el año 1989 fue de 52.860 [MW-h]. Dentro de los estudios que analizan la optimización del uso del recurso energético están aquellos que optimizan la estrategia de tracción del ferrocarril y los que optimizan el diseño del trazado de la línea.

En el primer tipo de estudios la trayectoria es fija y sólo se hace una modificación en las estrategias de control aplicadas a la tracción del ferrocarril, obteniendo aquellas que minimizan la energía consumida. Al respecto existe abundante literatura dentro de la cual están, por ejemplo, los trabajos de Talukdar (1979), Duarte (1982, 1984), Ortiz (1982), etc. La aplicación de estos estudios no requiere modificaciones de infraestructura, pues sólo cambia una política de explotación de los recursos ya existentes, y por ello es posible llevarlos a la práctica fácilmente sobre sistemas en funcionamiento.

En el segundo tipo, la estrategia de tracción es conocida y lo que se busca es obtener el trazado de línea que haga mínimo el consumo de energía de tracción. Este es un problema menos estudiado que el anterior y, para efectos prácticos, la diferencia fundamental es que los resultados en este caso son aplicables a sistemas por construir, cuando la única característica de la trayectoria que se ha decidido es la posición geográfica de las estaciones. Se considera inconveniente una modificación sobre el trazado de una vía ya construida porque significaría un excesivo gasto de tiempo y dinero, principalmente debido a que el costo asociado a las obras civiles es de gran importancia, además de las molestias que implica el rehacer construcciones en zonas de gran circulación vehicular y peatonal. Dentro de este tipo de estudios realizados, se pueden citar los trabajos de Hoang (1975) el que enfrenta la solución de un modo aproximado y además contiene una aplicación de sus resultados al caso del material rodante del Metro de Montreal. Otros trabajos que se pueden citar en esta línea son los de Duarte (1982a) y Sotomayor (1990).

En el presente trabajo se enfoca el problema de un modo diferente y global. Los dos problemas de optimización son resueltos dentro de uno sólo (optimización parcial y global), generando simultáneamente la estrategia de tracción y el trazado de la vía, que minimizan la energía consumida por el tren cuando recorre la línea en ambos sentidos. Esta optimización se aplica considerando el conjunto de puntos geográficos que corresponden a las estaciones de la línea 1 del Ferrocarril Metropolitano de Santiago.

El mismo método de solución se aplica también en la resolución del problema planteado en los estudios del primer tipo, es decir aquellos que buscan solamente la estrategia óptima de control aplicado al ferrocarril para un trazado de vía existente. Los resultados numéricos fueron obtenidos utilizando el trazado de vía actual de la línea 1 del Metro de Santiago. Este problema es considerado como una optimización parcial.

Posteriormente se hace una comparación entre los resultados obtenidos a través de la optimización global y aquellos obtenidos en la optimización parcial. Esta comparación se efectúa sobre la base de que en ambos casos los resultados son obtenidos a través de la misma modelación y método de optimización. Así, los resultados generados son aplicables a líneas construidas y por construir, usando la optimización parcial y global respectivamente.

En este estudio se usa un modelo dinámico de segundo orden para el tren, con un conjunto de restricciones sobre las variables de estado y sobre las variables de control, tales como restricciones de velocidad, aceleración, pendiente a lo largo de la línea, etc. Además se debe considerar la situación geográfica de las estaciones, la cual es una restricción de operación que no puede ser modificada por el proceso de optimización. El funcional de costo se obtiene por balance de energía. Los valores de los parámetros considerados en el modelo utilizado corresponden al caso del material rodante del Ferrocarril Metropolitano de Santiago.

La técnica usada para resolver ambos problemas es el algoritmo secuencial Gradiente-Restauración, desarrollado por A. Miele, (González, 1978; Miele, 1968; 1970; 1975; 1980; 1983).

Es importante destacar aquí, que la solución del problema planteado se realiza desde un punto de vista técnico, sin considerar los costos adicionales en que puede incurrirse al construir el perfil de línea óptimo propuesto como resultado del proceso de optimización global, en relación con el perfil de

línea seleccionado por algún otro criterio. La decisión de construir o no un determinado perfil de línea ciertamente deberá considerar un análisis económico riguroso. En ese sentido, la metodología propuesta ayuda de manera importante a la toma de decisiones de cuál perfil vertical construir.

2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

En este capítulo se hace un análisis de las características más importantes del problema, que conducen a la modelación y planteamiento matemático posterior.

En el proceso de optimización está involucrada la búsqueda de aquellas variables que hacen mínimo el consumo de energía. Dentro de estas variables está el perfil de línea (o trazado de vía) por donde debe circular el tren.

Al minimizar la energía consumida por el tren en su viaje de ida, no necesariamente se minimiza el consumo en el viaje de regreso, ya que el gasto de energía es diferente porque el tren se enfrenta a trazados de vía diferentes. Por este motivo se minimiza la suma de las energías consumidas por el tren cuando recorre la línea en ambos sentidos.

Debido a que la ubicación geográfica de cada estación se determina considerando factores ajenos a este trabajo (no se puede cambiar la posición de las estaciones pero sí se puede optimizar el trayecto entre estaciones) y a que el tren se detiene en cada estación, es posible obtener la optimización del circuito completo optimizado por separado el trayecto entre cada par de estaciones.

2.1 Análisis del problema con recorrido en una dirección

El perfil de línea se determina calculando la altura de cada punto de la línea con respecto a una referencia dada. Este perfil corresponde a la proyección vertical del camino, sobre el plano que une ambas estaciones. Se considera que el trazado real de la vía es aproximadamente igual a la proyección de éste sobre el plano vertical, debido a que la curvatura de la línea en el plano de planta, definida por consideraciones tales como instalaciones y edificaciones existentes, es pequeña. En la Figura 1 se ilustra un trazado de línea en los planos de planta y proyección vertical, para un par de estaciones vecinas A y B. La ubicación de las estaciones determina valores fijos para la distancia horizontal y la diferencia de altura entre éstas, estos valores se traducen en restricciones sobre el perfil de línea a optimizar. Además es necesario considerar las restricciones de tipo operacional sobre la pendiente máxima admitida en cada punto de la línea, que se encuentran detalladas en el Capítulo 3.

Por otra parte, la velocidad que puede adquirir el tren está restringida por un valor máximo, que depende de la calidad de la línea y de su curvatura; la aceleración está acotada por un valor máximo, por razones de comodidad para los pasajeros. También por razones de comodidad es conveniente que la variación en la aceleración sea lo más pequeña posible (Gardner, 1971).

La estrategia de tracción se determina mediante la fuerza eléctrica necesaria para mover el tren a lo largo de su viaje. Esta fuerza está restringida en su valor máximo, debido a las restricciones de corriente eléctrica máxima.

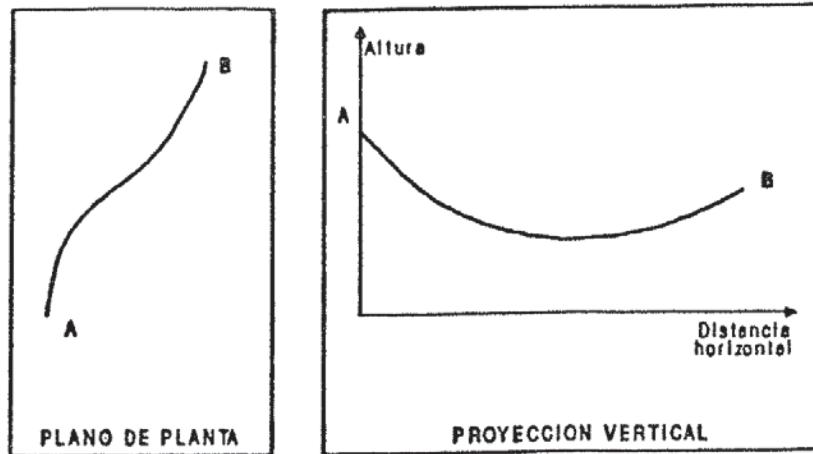


Figura 1: Trazado de línea en planos de planta y proyección vertical, para un par de estaciones vecinas A y B.

Como se ha supuesto que no existe regeneración de energía, se debe considerar el movimiento del tren mientras la fuerza de tracción no sea negativa, lo que implica dejar fuera toda la etapa de frenado. Por lo tanto, la distancia horizontal recorrida corresponde, para efectos de la optimización, a la distancia entre el punto de partida y el punto en que comienza el frenado. Esta distancia es conocida para cada par de estaciones. Las variables espaciales mencionadas están señaladas en la Figura 2.

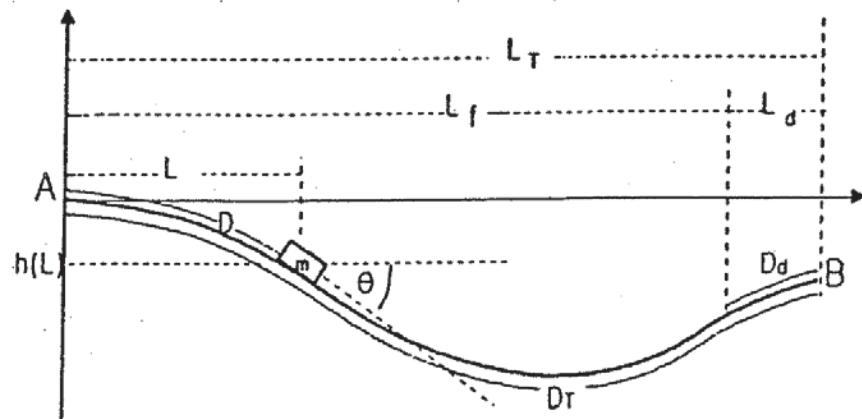


Figura 2: Variables espaciales consideradas en el problema.

En la Figura 2, L es la distancia horizontal a la que se encuentra el tren desde la estación de partida; θ es la pendiente de la línea en el punto considerado; L_T es la distancia horizontal entre las estaciones A y B; D_T es la distancia recorrida por el tren entre las estaciones A y B; D_f es la distancia recorrida por el tren mientras está frenando y L_f es la distancia horizontal recorrida por el tren mientras está frenando.

Otra restricción en este problema es el tiempo total de viaje entre dos estaciones consecutivas, que es un valor determinado por la demanda de pasajeros y que depende de factores ajenos a este trabajo. En horas de punta se disminuye el tiempo de la vuelta para aumentar la capacidad de transporte, ya que, haciendo circular los trenes más rápido se economiza material rodante a razón de diez millones de dólares el tren. Dado que el parque es fijo, en horas de valle los trenes circulan a menos velocidad para ahorrar energía; el tiempo de viaje se recalcula considerando el mayor tiempo de viaje de la vuelta y la menor demanda de pasajeros.

En este trabajo no se considera estas variables, el tiempo de viaje se determina para cada tramo con un criterio que se explica en Sotomayor (1990). El tiempo de viaje asociado a la etapa de optimización corresponde al tiempo total de viaje entre una estación y la siguiente, menos el tiempo que tarda en frenar.

La solución óptima encontrada debe ser compatible con alguna estrategia de frenado, lo cual implica definir un valor para la velocidad final en este problema, que debe corresponder a la velocidad con la que el tren inicia su frenado (Sotomayor, 1990).

La distancia D_f , que el tren recorre durante la optimización, se obtiene conociendo la distancia entre estaciones D_T y considerando la distancia D_a que el tren recorre deteniéndose en la actual estrategia de frenado es decir

$$D_f = D_T - D_a. \quad (1)$$

En resumen, para compatibilidad la estrategia de tracción óptima con la estrategia de frenado, es necesario considerar las siguientes restricciones:

- i) Un valor fijo para la distancia D_a de donde se deduce D_f , a partir de D_T (dato para cada par de estaciones).
- ii) Un valor dado para la velocidad final V_f .

2.2 Problema general de optimización

Para encontrar el perfil de línea que hace mínima la energía consumida, es necesario considerar el movimiento de ida y regreso. En efecto, si se define $J_1(A \rightarrow B)$ como la energía mínima consumida por el tren entre el par de estaciones A y B, que está asociada a un perfil de línea óptimo σ_1 y análogamente $J_2(B \rightarrow A)$ asociada al perfil de línea óptimo σ_2 , es dable esperar que los perfiles σ_1 y σ_2 no representen un mismo trazado de línea, por lo tanto, para obtener la solución óptima es necesario minimizar la energía $J_3(A \rightarrow B \rightarrow A)$ que se obtiene evaluando la energía requerida para el viaje en ambos sentidos de la línea.

Así, si $J(y, u, \sigma)$ es la función criterio que entrega una medida de la energía consumida por el sistema de tracción del tren, asociada a un perfil de línea σ , a un control u y a un estado y , que representan la dinámica del tren en un

modelo dado, siendo σ , u e y variables, la expresión que se debe buscar es

$$J(y, u, \sigma) = \min_{y, u, \sigma} (J(y_a, u_a, \sigma) + J(y_b, u_b, \sigma)) \quad (2)$$

en que:

y_a, y_b : representan el vector de estado del modelo, cuando el tren viaja de ida y regreso respectivamente.

u_a, u_b : representan el vector de control del modelo, cuando el tren viaja de ida y regreso respectivamente.

σ : representa la vía por donde circula el tren tanto en su viaje de ida como en el de regreso. En el Capítulo 3 se concluye que σ es una variable de control.

En la ecuación (2), el estado debe contener la información de y_a e y_b . Análogamente, el control contendrá la información de u_a y u_b . Entonces definimos los vectores $y=[y_a, y_b]^T$ y $u=[u_a, u_b]^T$. Así, el recorrido del tren para ida y regreso será planteado como uno sólo.

La reformulación del problema para abarcar ida y reagreso debe considerar dos aspectos, uno de ellos es la duplicación de las variables, y el otro es que el perfil de línea encontrado para el viaje de la estación A a la estación B sea el mismo que el encontrado para el viaje desde la estación B a la estación A.

El problema de expresar matemáticamente que el tren viaje en ambas direcciones por el mismo trazado de vía no es simple, como lo dice Hoang (1975), porque el perfil de línea se determina simultáneamente con el resto de las variables en el problema de la optimización. Esto se analiza en detalle en el capítulo siguiente, por el momento se considera que debe existir una restricción de unicidad de recorridos, que en la Figura 3 se ve como una simetría entre los recorridos de ida y regreso.

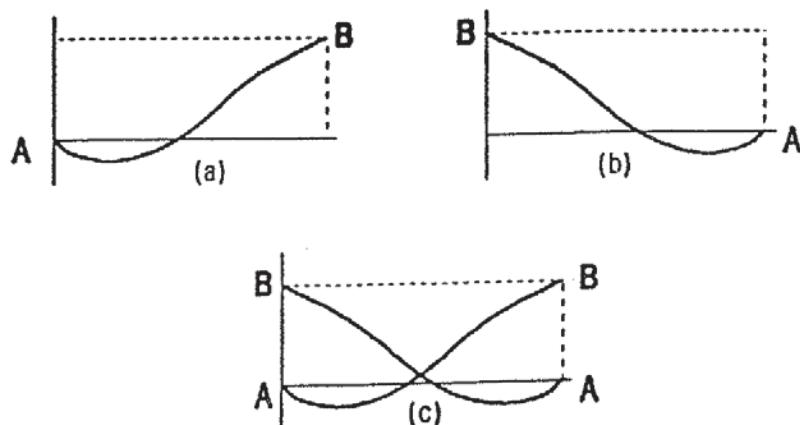


Figura 3: Recorrido entre un par de estaciones dado, tomando la estación A como referencia de altura.

En la Figura 3(a) se muestra un perfil de línea o recorrido entre un par de estaciones vecinas A y B, la Figura 3(b) muestra el mismo perfil de línea pero a partir de la estación B y la Figura 3(c) muestra la superposición de estos dos gráficos. Este último es sólo una abstracción necesaria para la formulación matemática posterior, en que el problema se modela como dos recorridos de ida, que están relacionados entre sí por la simetría que se observa al comparar las Figuras 3(a) y 3(b).

3. METODO DE SOLUCION PARA EL PROBLEMA

En este capítulo se presenta las ecuaciones correspondiente al problema de optimización, con las transformaciones necesarias para aplicar el algoritmo Gradiente-Restauración y una breve descripción del software desarrollado para su solución. En primer lugar se efectúa la transformación señalada en Miele (1975) sobre las restricciones, luego se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales, las restricciones transformadas, las condiciones de borde y el funcional de costo, en variables de estado, para el problema de optimización global.

3.1 Tratamiento de las restricciones

Las restricciones de desigualdad planteadas en el Capítulo 2 deben ser transformadas en restricciones de igualdad de acuerdo al tipo y orden de la restricción, como se señala en Miele (1975). Las restricciones consideradas en este trabajo son las siguientes:

a) Restricción de pendientes: La restricción sobre la pendiente en la línea está dada por $|\theta| \leq \theta_{\max}$. El valor de θ_{\max} se determina dependiendo de la posición dentro de la línea (pendiente máxima en zona de estaciones y fuera de ellas). Esta restricción se formula matemáticamente como

$$(\theta_{\max} + \theta)(\theta_{\max} - \theta) \geq 0, \quad (3.1)$$

la cual es una restricción de control. Entonces se agrega una variable auxiliar de control u_θ , por cada restricción, tal que

$$(\theta_{\max} + \theta)(\theta_{\max} - \theta) - u_\theta^2 = 0. \quad (3.2)$$

b) Restricción de velocidad: La restricción sobre la velocidad es del tipo $v \leq V_{\max}$ y su reformulación es

$$V_{\max} - v^2 > 0, \quad (3.3)$$

la cual es una restricción de variable de estado de orden 1. Entonces se agrega una variable auxiliar de estado y_v y una variable auxiliar de control u_v , por cada restricción, tales que

$$y'_v = u_v, \quad (3.4)$$

$$(V_{\max} - 2v)v' - 2y_v u_v = 0. \quad (3.5)$$

c) Restricción de aceleración: La restricción sobre la aceleración es en general del tipo $|a| \leq A_{\max}$, pero como aquí no se considera la estrategia de frenado ella toma la forma $a \leq A_{\max}$. Como la expresión de la aceleración en

función de las variables del modelo es $a = vv'$, entonces la restricción queda

$$A_{máx} - vv' \geq 0, \quad (3.6)$$

que es una restricción de control, entonces se agrega una variable auxiliar de control u_a , por cada restricción, tal que

$$A_{máx} - vv' - u_a^2 = 0. \quad (3.7)$$

d) Restricción de fuerza de tracción: En el modelo se considera la variable τ , que es la fuerza eléctrica de tracción por unidad de masa efectiva. La restricción sobre ella es

$$\tau \geq 0, \quad (3.8)$$

que es una restricción de control, entonces se agrega la variable auxiliar de control u_τ , tal que

$$\tau - u_\tau^2 = 0, \quad (3.9)$$

e) Restricción sobre unicidad del perfil de línea: La restricción de unicidad del perfil de línea es una restricción de control y de igualdad, razón por la cual no requiere de una transformación. Por lo tanto la restricción queda como

$$\theta_a(L) - \theta_b(L_t - L) = 0, \quad \text{para } L_0 \leq L \leq L_t. \quad (3.10)$$

3.2 Planteamiento de las ecuaciones

A continuación se entrega los conjuntos de ecuaciones, en variables de estado, que definen el problema de optimización. Para simplificar los cálculos numéricos, se hace una normalización de la variable independiente, reemplazando la distancia real L por la distancia normalizada $x = L/L_t$, de manera que $x=0$ en el punto inicial y $x=1$ en el punto final.

El modelo usado para representar el viaje en ambos sentidos, está dado por las siguientes ecuaciones (Sotomayor 1990).

$$dv_a/dL = (\tau_a - K_1 - K_2 v_a^2 - K_3 \sin(\theta_a))/v_a \quad (4.1)$$

$$dv_b/dL = (\tau_b - K_1 - K_2 v_b^2 - K_3 \sin(\theta_b))/v_b \quad (4.2)$$

$$dt_a/dL = 1/v_a, \quad dt_b/dL = 1/v_b \quad (4.3)$$

$$h_a(L) = \int_0^L \theta_a(l) dl, \quad h_b(L) = h_{BA} + \int_0^L \theta_b(l) dl \quad (4.4)$$

donde

- L : distancia horizontal recorrida,
- τ_a, τ_b : fuerza motriz por unidad de masa efectiva,
- v_a, v_b : velocidad del tren,
- t_a, t_b : tiempo de viaje,
- θ_a, θ_b : pendiente de la línea,
- h_a, h_b : altura de la línea medida desde la estación A,
- K_1, K_2 : constantes que toman en cuenta fuerzas de roce,
- K_3 : constante que considera la proyección del peso en al dirección del movimiento.

El subíndice "a" en las variables significa que el tren se está moviendo desde la estación A a la estación B. Similarmente, el subíndice "b" indica que el tren se mueve desde B hacia A.

La funcional de costo que se plantea para minimizar la energía consumida por el tren en un viaje de ida y vuelta (sin considerar los términos constantes) tiene la forma

$$I = \int_0^{L_f} (K_1(v_a^2 + v_b^2) + K_3(\theta_a(L) + \theta_b(L))) dL. \quad (5)$$

Las condiciones de borde del problema son las siguientes:

$$t(0)=0, \quad t(L_f)=T_f, \quad v(0)=V_0, \quad v(L_f)=V_f.$$

Para el planteamiento en variables de estado de estas ecuaciones, se define las variables de estado y_1, y_2, y_3, y_4 y las variables de control u_1, u_2, u_3, u_4 , tales que:

$$y_1 = t_a; \quad y_2 = t_b; \quad y_3 = v_a; \quad y_4 = v_b; \quad u_1 = \tau_a; \quad u_2 = \tau_b; \quad u_3 = \theta_a; \quad u_4 = \theta_b.$$

Para el planteamiento de las restricciones en variables de estado, se define las siguientes variables auxiliares:

u_5, u_6 : Variables auxiliares asociadas a las ecuaciones (3.1) y (3.2),
 y_5, y_6, u_7, u_8 : Variables auxiliares asociadas a las ecuaciones (3.3) a (3.5),
 u_9, u_{10} : Variables auxiliares asociadas a las ecuaciones (3.6) y (3.7),
 u_{11}, u_{12} : Variables auxiliares asociadas a las ecuaciones (3.8) y (3.9).

Las ecuaciones diferenciales que representan el problema de optimización son entonces las siguientes:

$$y_1' - L_f/y_3 = 0, \quad (6.1)$$

$$y_2' - L_f/y_4 = 0, \quad (6.2)$$

$$y_3' - L_f(u_1 - K_1 - K_2 y_3^2 - K_3 u_3)/y_3 = 0, \quad (6.3)$$

$$y_4' - L_f(u_2 - K_1 - K_2 y_4^2 - K_3 u_4)/y_4 = 0, \quad (6.4)$$

$$y_5' - u_7 = 0, \quad (6.5)$$

$$y_6' - u_8 = 0. \quad (6.6)$$

Las restricciones a considerar a lo largo del intervalo de integración son

$$(\theta_{\max} + u_3)(\theta_{\max} - u_3) - u_5^2 = 0, \quad (7.1)$$

$$(\theta_{\max} + u_4)(\theta_{\max} - u_4) - u_6^2 = 0, \quad (7.2)$$

$$(V_{\max} - 2y_3)(u_1 - K_1 - K_2 y_3^2 - K_3 u_3) - u_7^2 = 0, \quad (7.3)$$

$$(V_{\max} - 2y_4)(u_2 - K_1 - K_2 y_4^2 - K_3 u_4) - u_8^2 = 0, \quad (7.4)$$

$$A_{\max} - (u_1 - K_1 - K_2 y_3^2 - K_3 u_3) - u_9^2 = 0, \quad (7.5)$$

$$A_{máx} = (u_2 - K_1 - K_2 y_4^2 - K_3 u_4) + u_{10}^2 = 0, \quad (7.6)$$

$$u_1 - u_{11}^2 = 0, \quad (7.7)$$

$$u_2 - u_{12}^2 = 0. \quad (7.8)$$

Para escribir la ecuación (3.4) en función de la variable normalizada x , se define $x_d = L_d / L_f$. Así la restricción se convierte en

$$u_3(x) + u_4(1+x_d-x) = 0, \quad x_d \leq x \leq 1. \quad (7.9)$$

Las condiciones iniciales están dadas por

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = V_0, \quad y_4(0) = V_0. \quad (8.1)$$

Las condiciones finales tienen la forma

$$y_1(1) = T_f, \quad y_2(1) = T_f, \quad y_3(1) = V_f, \quad y_4(1) = V_f. \quad (8.2)$$

Finalmente, el funcional de costo queda definido por

$$I = \int_0^1 (K_2(y_3^2(x)+y_4^2(x)) + K_3(u_3(x) + u_4(x))) dx. \quad (9)$$

3.3 Descripción del software

El algoritmo secuencial Gradiente-Restauración fue programado en lenguaje FORTRAN para el computador IBM 4361 de la Universidad de Chile. Los cálculos fueron realizados en doble precisión, discretizando el intervalo de integración en 50 divisiones. El siguiente diagrama muestra el nombre y la relación jerárquica entre las subrutinas elaboradas.

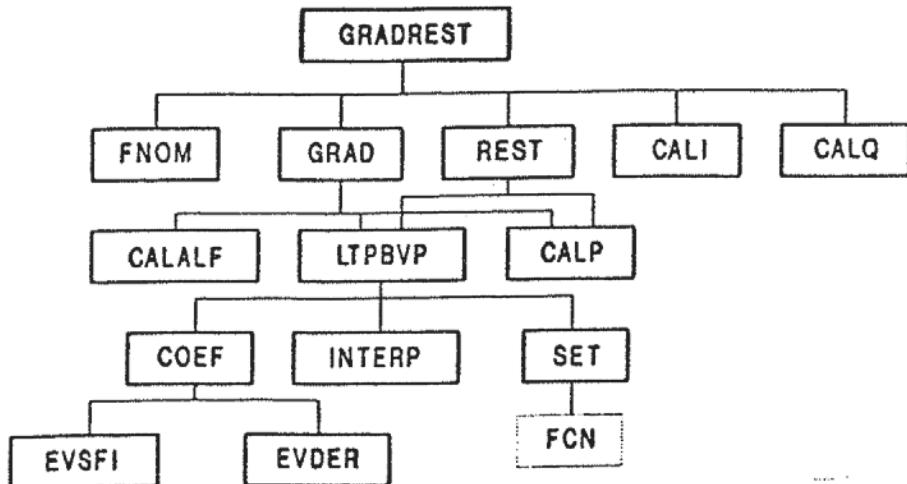


Figura 4. Diagrama jerárquico de las subrutinas.

A continuación se entrega un listado de las subrutinas, indicando su función en términos generales.

- FNOM : Genera las funciones nominales iniciales.
- REST : Realiza la etapa de Restauración, que conduce al cumplimiento de las restricciones.
- GRAD : Realiza la etapa de Gradiente, que produce una disminución en la funcional de costo.
- CALI : Calcula el índice I, que corresponde al valor de la funcional.
- CALQ : Calcula el índice Q, que es una medida del error en las condiciones de optimalidad.
- CALP : Calcula el índice P, que es una medida del error en las restricciones.
- LTPBVP: Resuelve el problema lineal con condiciones de borde en dos puntos, mediante el método de las soluciones particulares.
- CALALF: Calcula el valor a^* , que hace mínimo el funcional.
- COEF : Realiza la etapa 2 de la subrutina LTPBVP.
- INTERP: Realiza la etapa 3 de la subrutina LTPBVP.
- SET : Calcula la solución particular para una condición inicial asignada y se usa en la etapa 4 de la subrutina LTPBVP.
- EVSFI : Evalúa los vectores utilizados en la subrutina COEF.
- EVDER : Evalúa las matrices utilizadas en la subrutina COEF.
- FCN : Es usada como parámetro en la subrutina SET. Se encarga de evaluar los coeficientes de las ecuaciones del método de las soluciones particulares para cada valor de x , con el objeto de usarlos en la subrutina DVERK, perteneciente a la librería IMSL, que resuelve esta ecuación diferencial.

4. RESULTADOS OBTENIDOS

En este capítulo se presentan las tablas que resultan de aplicar el control óptimo al circuito formado por todas las estaciones de la línea 1 del Metro de Santiago. Estos resultados son presentados en la Tabla No 1. Esta tabla contiene la energía mecánica necesaria para efectuar el movimiento de acuerdo a la estrategia de tracción óptima, tanto para el caso de la optimización global como parcial y el ahorro de energía real y porcentual, que se obtiene al considerar el perfil de linea óptimo.

De la Tabla N° 1, se identifica los casos extremos, desde el punto de vista de la energía consumida y del ahorro de energía.

TABLA N°1: ENERGIA MECANICA REQUERIDA

RESULTADOS DE LA OPTIMIZACION PARCIAL Y GLOBAL

TRAMO	TRAYECTORIA ACTUAL			TRAYECTORIA OPTIMA			AHORRO [KW-h]	AHORRO %
	IDA	REGRESO	E total	IDA	REGRESO	E total		
TR1	6.83E+00	1.01E+01	1.69E+01	5.53E+00	8.62E+00	1.42E+01	2.76E+00	16.31
TR2	1.21E+01	1.06E+01	2.26E+01	1.06E+01	8.78E+00	1.93E+01	3.29E+00	14.54
TR3	1.16E+01	1.04E+01	2.20E+01	1.01E+01	8.69E+00	1.88E+01	3.24E+00	14.71
TR4	9.96E+00	7.19E+00	1.71E+01	8.35E+00	5.67E+00	1.40E+01	3.12E+00	18.22
TR5	1.06E+01	6.71E+00	1.73E+01	8.87E+00	5.22E+00	1.41E+01	3.18E+00	18.39
TR6	8.66E+00	5.67E+00	1.43E+01	7.32E+00	4.45E+00	1.18E+01	2.56E+00	17.87
TR7	9.52E+00	7.44E+00	1.70E+01	8.24E+00	5.86E+00	1.41E+01	2.87E+00	16.91
TR8	9.33E+00	3.93E+00	1.33E+01	7.73E+00	3.05E+00	1.08E+01	2.47E+00	18.66
TR9	1.07E+01	5.09E+00	1.58E+01	9.08E+00	3.80E+00	1.29E+01	2.94E+00	18.60
TR10	8.49E+00	5.49E+00	1.40E+01	7.03E+00	4.23E+00	1.13E+01	2.72E+00	19.48
TR11	9.70E+00	4.13E+00	1.38E+01	8.16E+00	3.04E+00	1.12E+01	2.64E+00	19.07
TR12	4.29E+00	5.51E+00	9.80E+00	2.85E+00	3.91E+00	6.77E+00	3.04E+00	30.97
TR13	1.12E+01	2.43E+00	1.36E+01	9.31E+00	1.94E+00	1.12E+01	2.34E+00	17.24
TR14	9.18E+00	4.97E+00	1.41E+01	7.87E+00	3.89E+00	1.18E+01	2.39E+00	16.89
TR15	9.41E+00	4.72E+00	1.41E+01	8.04E+00	3.66E+00	1.17E+01	2.43E+00	17.22
TR16	1.65E+01	5.27E+00	2.17E+01	1.40E+01	4.22E+00	1.82E+01	3.52E+00	16.21
TR17	1.11E+01	6.39E+00	1.75E+01	9.29E+00	4.91E+00	1.42E+01	3.27E+00	18.73
TR18	1.16E+01	5.54E+00	1.71E+01	9.66E+00	4.26E+00	1.39E+01	3.20E+00	18.67
TR19	1.09E+01	4.48E+00	1.54E+01	9.21E+00	3.47E+00	1.27E+01	2.69E+00	17.51
TR20	1.20E+01	3.86E+00	1.58E+01	9.98E+00	2.79E+00	1.28E+01	3.08E+00	19.43
TR21	1.15E+01	3.71E+00	1.52E+01	9.72E+00	2.91E+00	1.26E+01	2.56E+00	16.84
TR22	1.08E+01	4.64E+00	1.55E+01	9.16E+00	3.47E+00	1.26E+01	2.86E+00	18.45
TR23	1.23E+01	3.43E+00	1.57E+01	1.01E+01	2.54E+00	1.26E+01	3.11E+00	19.79
CIRCUITO COMPLETO	3.70E+02			3.03E+02			6.63E+01	17.93

MAYOR CONSUMO DE ENERGIA: Este valor se produce en el tramo 2, donde la energía requerida es de $E = 22.6$ [KW-h], para la optimización parcial y $E = 19,3$ [KW-h], para la optimización global.

MENOR CONSUMO DE ENERGIA: Este valor se produce en el tramo 12, donde la energía requerida es de $E = 9.80$ [KW-h], para la optimización parcial y $E = 6.77$ [KW-h], para la optimización global.

MAYOR AHORRO DE ENERGIA: Este valor se produce en el tramo 16, obteniéndose un ahorro de $E = 3.52$ [KW-h].

MENOR AHORRO DE ENERGIA: Este valor se produce en el tramo 13, obteniéndose un ahorro $E = 2.34$ [kW-h].

MAYOR AHORRO PORCENTUAL DE ENERGIA: Este valor se produce en el tramo 12, obteniéndose un ahorro $E = 30,9\%$.

MENOR AHORRO PORCENTUAL DE ENERGIA: Este valor se produce en el tramo 2, obteniéndose un ahorro $E = 14,54\%$.

Por razones de espacio, no es posible mostrar todos los perfiles de líneas resultantes de aplicar la metodología desarrollada en este trabajo, para las situaciones analizadas anteriormente. A modo de ilustración en la Figura 5 se muestra el caso correspondiente al de mayor consumo de energía (Tramo 2). En ella se muestran el perfil de línea actual y el propuesto en función de la distancia. Es interesante observar que en las porciones iniciales ambos trayectos son muy similares. En el caso mostrado aquí la trayectoria óptima está aproximadamente tres metros por debajo de la trayectoria actual.

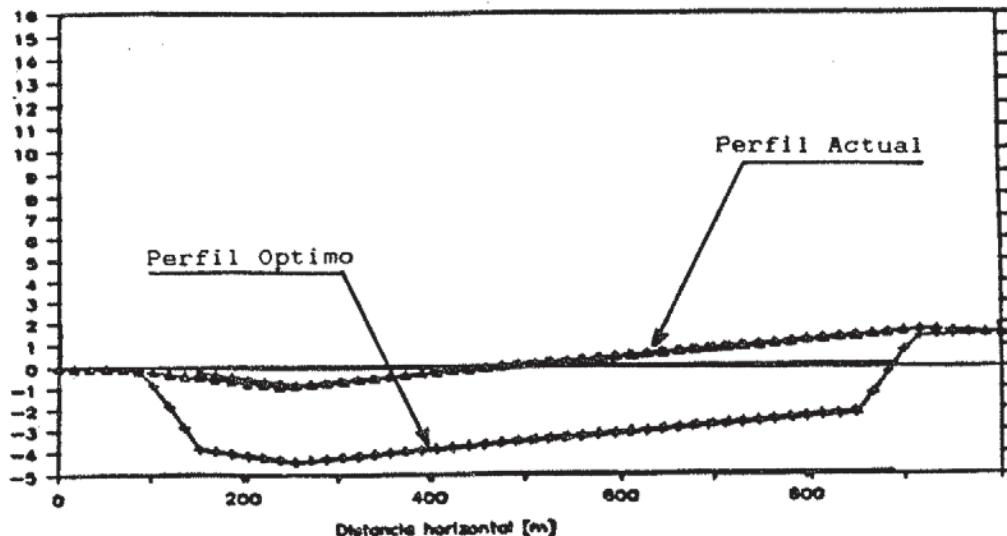


Figura 5. Perfil vertical de la vía para el Tramo 2.

En la Tabla No 1 se incluye los porcentajes de ahorro para cada tramo y para el circuito completo correspondiente a la línea del Metro de Santiago. En ella se compara los resultados de la trayectoria óptima y estrategia de tracción óptima con los de la trayectoria actual y estrategia de tracción óptima, obteniéndose un ahorro del 17.93%.

A continuación se realiza una estimación del ahorro de energía anual, considerando que se realizan 78782 viajes de ida y regreso al año, esta cifra es utilizada en la estimación de gastos por consumo de energía eléctrica correspondiente al año 1989. También se incluye una estimación del ahorro monetario, considerando que el costo real de [KW-h] para el Metro de Santiago es de \$ 10.7336 + IVA (Octubre/1990). De la Tabla No 1, el ahorro de energía mecánica es 66.3 [KW-h] para un viaje de ida y regreso. Entonces, el ahorro anual de energía eléctrica sin considerar regeneración de energía es:

$$E = 78782 \times 66.3 / 0.88 = 5.94 \times 10^6 \text{ [KW-h]},$$

si se considera regeneración de energía, el ahorro estimado es:

$$E_r = E \times 0.75 = 4.45 \times 10^6 \text{ [KW-h]}.$$

Por lo tanto el correspondiente ahorro monetario, considerando el costo del KW-h a Octubre de 1990, es:

$$C = E_r \times 12.66 = \$ 56.38 \times 10^6.$$

Es importante destacar que este ahorro no considera el costo de obras civiles, que son bastante significativos. Para determinar la aplicabilidad de estos resultados es necesario realizar una evaluación económica completa.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha resuelto el problema de determinar simultáneamente la estrategia de control óptimo y perfil óptimo de línea, desde el punto de vista de la energía consumida. Se ha obtenido además, como caso particular, la estrategia de tracción que minimiza la energía para un perfil de línea dado. El estudio desarrollado no pretende dejar completamente resuelto este importante problema, por el contrario, debe considerarse como un primer intento de resolverlo analíticamente.

Se ha desarrollado una metodología que permite estudiar en forma confiable el problema antes mencionado, la cual permite incorporar fácilmente modificaciones tanto en el modelo utilizado como en el método de solución elegido. Desde el punto de vista de confiabilidad, se considera que los resultados obtenidos son buenos debido a que fueron contrastados con un criterio independiente y resultaron similares (Sotomayor, 1990).

El perfil de línea óptimo encontrado se puede caracterizar de modo tal que tiene la pendiente máxima permitida en la porción de trayectoria donde la optimización se realiza en un sólo sentido, y en el resto de la trayectoria la pendiente puede elegirse de acuerdo a otros criterios, dado que no se modifica en el proceso de optimización.

Con respecto a la estrategia de tracción óptima, se puede concluir que en la

primera etapa el tren se mueve con aceleración máxima y posteriormente la estrategia depende del tramo considerado. En esta segunda etapa se observa deformaciones en las curvas graficadas, debido a que la fuerza de tracción no puede ser negativa.

Desde el punto de vista de ahorro de energía, sólo se considera la comparación entre la optimización global y la parcial, obteniéndose un ahorro promedio del 17,93%. La estimación del ahorro anual resulta ser la 4.45×10^6 [KW-h], que se traduce en \$ 56.38×10^6 para la línea 1. Sin embargo este ahorro no considera los gastos adicionales involucrados en construir el perfil de línea óptima.

Para llevar a la práctica los resultados tanto de la optimización global como parcial, es necesario complementarlos con un estudio económico. Para el caso de la optimización parcial el estudio debe estar orientado a determinar el tiempo de viaje óptimo, en cambio, para el caso de la optimización global este estudio debe considerar además el costo de las obras civiles, que son altos, asociado al perfil de linea.

6. REFERENCIAS

Duarte, M.A. (1984), "Consideraciones generales sobre minimización de la energía consumida por trenes de ferrocarriles metropolitanos". S. Jara D., ed., Actas del I Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte. 7-9 Mayo 1984. Santiago, Chile: Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile, pp. 308-320.

Duarte, M.A. y G. Ortiz V. (1982), "Control adaptivo indirecto aplicado a trenes de ferrocarril metropolitano". C. Pascoli B., ed., Anales del IV Congreso Brasileiro de Automática. 14-17 Septiembre 1982, Campinas, Brasil: Faculdade de Engenharia de Campinas, Universidade Estadual de Campinas, v. 1, pp. 137-142.

Duarte, M.A. y N Haddad S. (1982a), "Determinación de trayectorias que reducen el consumo de energía de un ferrocarril metropolitano". J. Hernández, ed., Anales del V Congreso Asociación Chilena de Control Automático. 22-27 Noviembre 1982, Valparaíso, Chile: Departamento de Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María, v. I, pp. 280-299.

Gardner, A., H.Hennel and I.Lichtenfels (1971), Propulsion and automation equipment for Patco's Rapid Transit Cars. IEEE Transactions Ind. Gen. Appl., Vol. 7, pp. 760-768.

González, S. and A. Miele (1978), Sequential Gradient-Restoration algorithm for optimal control problems with general boundary conditions, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 26, Nº 3, pp. 395-425.

Hoang, H.H., M.P.Polis and A. Haurie (1975), Reducing energy consumption through trajectory optimization for a metro network, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-20, Nº 5, pp. 590-595.

Miele, A. and T.Wang (1983), Supplementary optimality properties of the restoration phase of sequential Gradient-Restoration algorithms for optimal control problems", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 41, Nº 1, pp. 169-184.

Miele, A. (1980), Gradient algorithms for the optimization of dynamic systems, in *Control and Dynamic Systems*, ed. C. Leondes, Academic Press, N.Y., pp. 1-52.

Miele, A. (1975), Recent Advances in Gradient Algorithms for Optimal Control Problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 17, Nº 5-6, pp. 361-430.

Miele, A. and R.R. Iyer (1970), "General technique for solving nonlinear, two-point boundary-value problems, via the method of Particular Solutions, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 5, Nº 5, pp. 382-399.

Miele, A. (1968), Method of Particular Solutions for linear, two-point boundary-value problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 2, Nº 4, pp. 260-273.

Ortiz G. (1982), "Control Optimo Aplicado a Ferrocarriles Metropolitanos", Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Electricista. Santiago: Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile.

Sotomayor, P.X. (1990), "Determinación de trazados óptimos para líneas de ferrocarriles metropolitanos". Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Electricista. Santiago: Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Chile.

Talukdar, S.N. and R.L. Koo (1979), Multiobjective trajectory optimization for electric trains. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 24, pp. 888-893.