

UN METODO PARA EL CALCULO DE TARIFAS Y FRECUENCIAS DE SERVICIOS
INTEGRADOS METRO-BUS INCLUYENDO INVERSION

Sergio R. Jara Díaz
Universidad de Chile, Casilla 228-3, Santiago

RESUMEN

Se considera el problema de encontrar tarifas comunes (integradas) y frecuencias de bus por periodos para maximizar el número total de usuarios de un servicio Bus-Metro. Considerando matrices origen-destino y modelos de partición modal por periodo, el planteamiento incluye restricciones de frecuencia (circulación), capacidad y ganancias del servicio de buses, incluyendo un costo equivalente de adquisición de la flota. Se obtiene analíticamente las condiciones de óptimo y se estudia las diferentes soluciones posibles, interpretadas también en forma gráfica. Se propone un algoritmo de solución general y se presenta un ejemplo numérico con tres periodos.

1. INTRODUCCION

Las ventajas operativas, financieras y a usuarios que presentaría la implementación de servicios integrados Metro-bus en Santiago, han sido mostradas desde varios ángulos metodológicos. Originalmente, Jara Díaz y Fernández (1988) establecieron un sistema de ecuaciones que asegura la posibilidad física de la operación y condiciones de rentabilidad adecuadas para los operadores, buscando combinaciones de frecuencia (buses) y tarifa integrada (Metro+bus) que las cumplieran. Este enfoque de tarificación paramétrica permitió mostrar que es posible establecer servicios de este tipo en ciertas estaciones, con tarifas integradas comparables a las actuales tarifas de bus, al mismo tiempo, con ventajas para usuarios y operadores. Las ventajas radican en la disminución de costos de los buses por recorridos más cortos, la consecuente baja de tarifa total, y el aumento de la frecuencia y de la demanda por ese servicio.

Posteriormente, Jara Díaz y Tudela (1991a) transformaron el enfoque paramétrico en una herramienta para la negociación tarifaria entre operadores, revelando analítica y empíricamente las diversas combinaciones de ganancias monetarias asociadas a una misma tarifa; el nuevo enfoque condujo al concepto de *envolvente de negociación*, que representa los límites de ganancia para los buses dado un criterio de ganancia para el Metro (y viceversa). Hasta aquí, los usuarios entran en la formulación sólo a nivel de ecuaciones de demanda (partición modal). En un trabajo reciente, Jara Díaz y Tudela (1991b) reportan un modelo con objetivos múltiples en el cual se incluye, en forma separada el beneficio a los usuarios y la utilidad de los operadores como funciones objetivo; se muestra allí que el compromiso entre usuarios y operadores corresponde a un compromiso entre frecuencia y tarifa del servicio combinado. El nivel de "substitución" depende de muchos factores, entre ellos el número potencial de usuarios en el corredor y su valor subjetivo del tiempo.

En este artículo presentamos un modelo que incorpora explícitamente el costo de inversión en vehículos, necesarios para servir el corredor. Esto significa que el tamaño de flota debe ser de alguna manera incorporado en forma especial, además de tratarlo para varios periodos. En la sección siguiente establecemos el modelo general, se obtiene las condiciones de óptimo, se realiza una interpretación gráfica del problema y se diseña un procedimiento de solución. En la tercera sección se presenta una aplicación a un corredor de Santiago, considerando tres periodos. Finalmente se extraen las principales conclusiones.

2. FORMULACION DEL MODELO Y ENFOQUE DE SOLUCION

2.1. Planteamiento general

Se considera un corredor previamente identificado asociado a una estación de Metro, con un recorrido alimentador de buses de trayectoria establecida por métodos heurísticos. Se trata de encontrar, para cada periodo, la frecuencia de servicio de los buses, la tarifa total y la distribución de ella entre ambos operadores, con el objetivo de maximizar el número de pasajeros transportados. Se debe cubrir los costos de operación e inversión de los buses, y se impuso una componente tarifaria Metro igual al costo marginal de

operación, lo que deja el problema reducido a dos variables por periodo. Se usa la siguiente notación

N_{ij}^t	número de viajeros entre zona i y zona j en periodo t
S_{cij}^t	proporción de viajeros que usa combinación en par i-j, periodo t
P_t	tarifa de combinación descontado el costo marginal del metro, periodo t (es decir, ingreso monetario por pasajero para los buses) (\$/pas.)
f_t	frecuencia del servicio de buses (buses/hora)
θ	tasa de ganancia de los buses
m_b	costo de operación por pasajero, bus (\$/pas.)
γ	costo de operación por kilómetro, bus (\$/km)
T_t	duración del periodo t (horas/periodo)
f_{Mt}	frecuencia máxima de operación de los buses, periodo t (buses/hora)
K	capacidad de un bus (pas/bus)
n	número de periodos a considerar
L	longitud del recorrido de los buses (km).

Las variables del problema son P_t y f_t , lo que hace un total de $2n$ incógnitas. Todo lo demás son datos, conocidos o parametrizables. El problema a resolver es

$$\text{Max } Y_c = \sum_i \sum_j \sum_t N_{ij}^t S_{cij}^t (P_t, f_t) \quad (1)$$

sujeto a

$$\sum_t \sum_i \sum_j N_{ij}^t S_{cij}^t (P_t, f_t) P_t \geq (1 + \theta) [m_b \sum_t \sum_i \sum_j N_{ij}^t S_{cij}^t (P_t, f_t) + \gamma L \sum_t f_t T_t + \text{CEA}] \quad (2)$$

$$f_t \leq f_{Mt} \quad t = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_i \sum_j N_{ij}^t S_{cij}^t < T_t f_t K \quad t = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$P_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, n \quad (5)$$

La restricción (2) asegura una tasa de ganancia pre-establecida para el servicio de buses en operación combinada con el Metro en el corredor; se incluye allí un costo diario equivalente por adquisición de buses (CEA), cuyo tratamiento discutiremos más adelante. Las restricciones (3) provienen del menor valor entre la capacidad de circulación de los buses en el corredor y la capacidad de atención a los buses en la estación de Metro. La siguiente familia de restricciones asegura que los pasajeros en cada periodo t, tengan cabida en los buses. Por último, las restricciones de no-negatividad de tarifas (componente bus) se hacen necesarias ya que la función objetivo

decrece con P_t y la restricción (2) no impide algún P_t negativo; como incluso esto puede generar un grado no despreciable de subsidio cruzado entre periodos, podría ser conveniente imponer $P_t > m_b$. Cabe hacer notar que la no-negatividad de frecuencias queda asegurada por las restricciones (4).

Esta formulación general exige tomar varias decisiones, tales como el número n de periodos a considerar, o el tratamiento del CEA, θ , K y f_{nt} . En el caso de n , la consideración fundamental es la de homogeneidad de la demanda, tanto en términos del uso de un mismo modelo de partición modal como del total de viajeros en cada par; además, se debe asegurar que las restricciones de capacidad tengan un real sentido físico, pues la frecuencia es considerada constante al interior de cada periodo. Tanto θ como K lucen como candidatos evidentes a un tratamiento paramétrico; debe recordarse que el análisis realizado por Jara Díaz y Fernández sugiere que $\theta = 0$ arrojaría tarifas totales comparables a las de bus y que $\theta = 1$ provoca tarifas comparables a la suma actual. Dado que ahora se incluye un CEA, parece sensato revisar sólo la vecindad superior de $\theta = 0$. En cuanto al CEA, las alternativas gruesas parecen ser el tratamiento como costo financiero (ligado al tiempo) o como un equivalente a la depreciación (ligado al uso). En ambos casos se trata de incorporar un costo asociado al tamaño de flota; analíticamente, el segundo enfoque es más sencillo, ya que se trata de "depreciar" por distancia recorrida. El primer enfoque puede ser transformado a un equivalente-día; el problema es que el tamaño de flota (B) está dado por el tiempo de ciclo (t_c) multiplicado por la frecuencia. Ambos dependen del periodo considerado y son, de hecho, un resultado. El tiempo de circulación podría introducirse en forma exógena y aproximada, pero los tiempos de subida y bajada dependen del volumen de pasajeros. Aún al aproximar un valor constante razonable para t_c , B resultaría en realidad B_t ; evidentemente el CEA está asociado al mayor de ellos solamente.

La restricción presupuestaria es la única que vincula periodos y, por lo tanto, es la fuente de eventuales subsidios cruzados. Dado que θ es tratado paramétricamente, es el CEA el elemento que impide la separación del problema en n sub-problemas independientes, ya que depende del tamaño de flota. Este es un aspecto abordable desde varias perspectivas, como se verá más adelante, permitiendo enfocar el problema por periodos, lo que presenta varias ventajas; entre ellas, la de facilitar el análisis y la búsqueda de soluciones, la posibilidad de interpretación gráfica, y la garantía de precios razonables en términos de subsidios cruzados.

2.2. Solución en el caso de un periodo

En forma standard, el problema es

$$\text{Min} - Y_c(P, f) \quad (6)$$

sujeto a

$$R_1 (1+\theta) [m_b y_c + \gamma L f T + \text{CEA}] - Y_c P \leq 0 \quad (7)$$

$$R_2 \quad f - f_M \leq 0 \quad (8)$$

$$R_3 \quad Y_c - TfK \leq 0 \quad (9)$$

No es necesario imponer $P > m_b$, ya que ello está garantizado por la restricción presupuestaria para todo $\theta > 0$.

Si λ , μ , y σ son los multiplicadores de las restricciones (7), (8) y (9) respectivamente, las condiciones de primer orden (C.P.O.) del problema son

$$\begin{aligned} \nabla [-Y_c(P, f) + \lambda \{ (1+\theta) [m_b Y_c + \gamma LfT + CEA] - Y_c P \} + \mu (f - f_M) \\ + \sigma (Y_c - TfK) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\lambda \{ (1+\theta) [m_b Y_c + \gamma LfT + CEA] - Y_c P \} = 0 \quad (11)$$

$$\mu (f - f_M) = 0 \quad (12)$$

$$\sigma (Y_c - TfK) = 0 \quad (13)$$

Considerando modelos de partición modal tipo Logit con especificación de la utilidad lineal en costo y tiempo de espera (aproximado por $30/f$ [minutos]), donde β_1 y α_1 son los coeficientes respectivos, la ecuación (10) genera

$$\sum_i \sum_j |\beta_1| N_{ij} S_{cij} (1 - S_{cij}) E - \lambda Y_c = 0 \quad (14)$$

al derivar con respecto a P , y

$$- \frac{30}{f^2} \sum_i \sum_j |\alpha_1| N_{ij} S_{cij} (1 - S_{cij}) E + \lambda (1+\theta) D + \mu - \sigma TK = 0 \quad (15)$$

al hacerlo con respecto a f ; E y D se definen como

$$E = 1 - \lambda \{ (1 + \theta) m_b - P \} - \sigma \quad (16)$$

$$D = \gamma LT + \frac{\partial CEA}{\partial f} \quad (17)$$

Las ecuaciones (11) a (15) conforman el sistema a resolver en P , f , λ , μ y σ (todos no-negativos).

Proposición: si la restricción de ganancias no es activa ($R < 0$), entonces deben serlo las de frecuencia y capacidad ($R_2 = R_3 = 0$).

Dem: Si $R_1 < 0$, $\lambda = 0$ por ec. (11). $\therefore E = 0$ (ec. 14) y $\sigma = 1$ (ec. 16).

Además, $\lambda = E = 0$ y $\sigma = 1$, $\Rightarrow \mu = TK$ (ec. 15).

∴ $\sigma > 0$ y $\mu > 0$, luego $f = f_H$ (ec. 12) y $Y_c = TfK$ (ec. 13).

∴ $R_2 = R_3 = 0$.Q.E.D.

La Proposición hace del caso $\lambda = 0$ uno que genera una solución analítica sencilla, cual es

$$f = f_H \text{ y } Y_c(P^*, f_H) = Tf_H K. \quad (18)$$

En el caso de $\lambda = 0$, el sistema a resolver queda conformado por

$$(1 + \theta)(\gamma LfT + CEA) = Y_c [P - m_b(1 + \theta)] \quad (19)$$

$$E \sum_1 A_1 - \lambda Y_c = 0 \quad (20)$$

$$-\frac{30}{f^2} E \sum_1 VST_1 A_1 + \lambda(1 + \theta) D + \mu - \sigma TK = 0 \quad (21)$$

más las ecuaciones (12) y (13). Aunque es obvio,

$$A_1 = \sum_j |\beta_1| N_{1j} S_{c1j} (1 - S_{c1j}) \text{ y} \quad (22)$$

$$VST_1 = |\alpha_1| / |\beta_1| \text{ (valor subjetivo del tiempo de espera, viajeros de la zona 1).} \quad (23)$$

El sistema generado no impone condiciones sobre μ y σ . Si ambos fuesen positivos, la solución es idéntica a la del caso $\lambda = 0$, y está determinada por el sistema (18). El caso más complejo es el de $\mu = \sigma = 0$, es decir, aquel en que ni la restricción de frecuencia ni la de capacidad son activas; en cualquier otro caso, es decir $\mu = 0$ o $\sigma = 0$, el problema se reduce a uno de dos ecuaciones y dos incógnitas (f y P) usando las ecuaciones (19) y (12) o (13).

Veamos el caso $\lambda = 0$, $\sigma = \mu = 0$, considerando el CEA en su versión proporcional a la frecuencia (lo que equivale a considerar el tiempo de ciclo independiente del flujo). Entonces la ecuación (19) toma la forma (ver ec. 17)

$$(1 + \theta) f D = Y_c [P - m_b(1 + \theta)] \quad (24)$$

Considerando $\sigma = 0$, manipulando adecuadamente las ecuaciones (16), (20) y (21) se llega a

$$-\frac{30}{f^2} Y_c \sum_1 VST_1 A_1 + (1 + \theta) D \sum_1 A_1 = 0 \quad (25)$$

que, en conjunto con la ecuación (24) forma el sistema general a resolver en P y f . Cabe observar que de ambas ecuaciones se puede obtener

$$\sum_1 A_1 [P - (1 + \theta) m_b - \frac{30}{f} VST_1] = 0 \quad (26)$$

que permite visualizar un interesante caso particular si los usuarios en las

diversas zonas origen presentan VST_1 aproximadamente iguales (VST). En este caso

$$P^* = (1 + \theta) m_b + \frac{30}{f} VST \quad y \quad (27)$$

$$f = \sqrt{30 VST Y_c [P^*(f), f] / (1 + \theta) D}, \quad (28)$$

que constituye la ecuación a resolver.

Como se dijera, los casos en que μ o σ son distintos de 0 son más sencillos de visualizar analíticamente. Si $\sigma = 0$ y $\mu = 0$, entonces $f = f_M$ y, reemplazando en ec. (19) se obtiene

$$P = (1 + \theta) \left[\frac{\lambda L f_M T + CEA}{Y_c(P, f_M)} + m_b \right] = G(P) \quad (29)$$

que es la ecuación en P a resolver numéricamente.

Si $\sigma = 0$ y $\mu = 0$, entonces $Y_c = TfK$, que reemplazado en la ec. (19) genera

$$P = (1 + \theta) \left[\frac{\lambda L f T + CEA}{TfK} + m_b \right] = P(f); \quad (30)$$

reemplazando en (13) y despejando, se tiene

$$f = \frac{Y_c [P(f), f]}{TK} = M(f) \quad (31)$$

a resolver numéricamente. Este caso agota todas las combinaciones de valores de λ , σ y μ .

2.3. Interpretación gráfica y algoritmo de solución (un periodo)

Dado que cada periodo involucra sólo dos variables de decisión, es posible representar el problema gráficamente. El desarrollo analítico demuestra que hay dos categorías de casos: $\lambda = 0$ y $\lambda = 0$, o restricción presupuestaria inactiva o activa. La figura 1, en la que presentamos el primer caso, ilustra el fenómeno. Allí se observa la forma de las trazas de las restricciones y la importancia de la posición relativa de $R_1 = 0$, dado que la función objetivo crece hacia tarifas nulas y frecuencias altas; en este caso, la tarifa óptima es la menor de todas las posibles y compatibles con f_M (recordar la Proposición demostrada anteriormente). Cabe hacer notar que, por construcción, la tasa de ganancia asociada a (P, f_M) es mayor que el valor de θ impuesto en la restricción presupuestaria. Además, si (P, f_M) cumpliera con

$R_1 = 0$, seguiría siendo el óptimo. En ambos casos, la solución está dada por el sistema de ecuaciones (18), que refleja R_1 y R_3 activas.

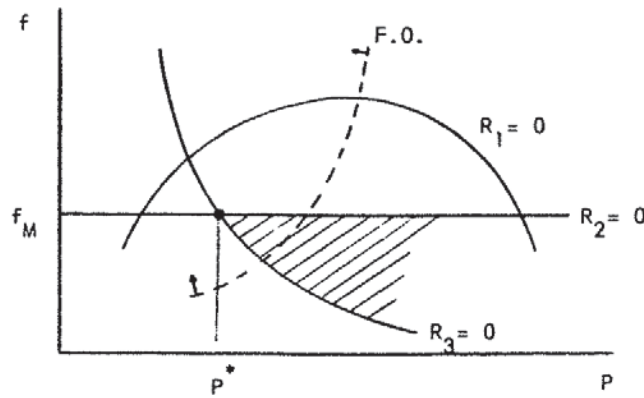


Figura 1. Solución con restricción presupuestaria inactiva.

Distinto es el caso de la figura 2, que representa R_1 activa con tres sub-casos: sólo R_2 inactiva (operación bajo f_M con los buses operando a capacidad), representado por el punto A; sólo R_3 inactiva (operación a frecuencia máxima y bajo la capacidad), punto B; R_2 y R_3 inactivas (punto C).

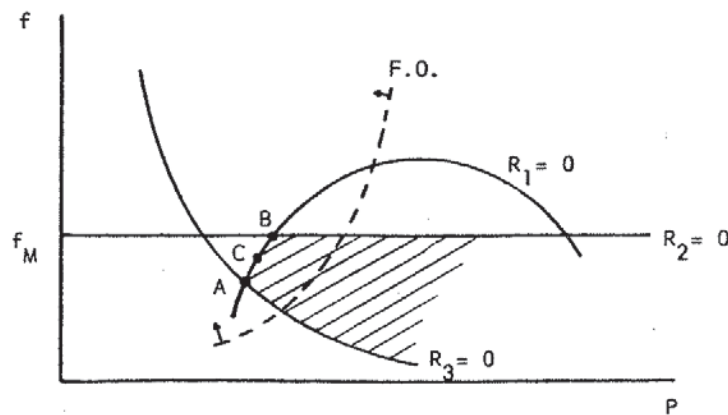


Figura 2. Soluciones con restricción presupuestaria activa.

El desarrollo analítico y la representación gráfica sugieren un procedimiento para resolver el problema de un periodo. La idea central es la de identificar un proceso ordenado de análisis de los posibles puntos óptimos, es decir, (P, f_M) , A, B o C, resolviendo secuencialmente los correspondientes sistemas de ecuaciones. El procedimiento es el siguiente:

- i) resolver el sistema de ecuaciones (18), encontrando P^* ;
- ii) calcular el valor de θ que haría activa la restricción presupuestaria para f_M y P , llamado θ_L (límite) a ese valor;
- iii) comparar el valor deseado de θ con θ_L ; si $\theta < \theta_L$, entonces efectivamente R_1 es inactiva y (P^*, f_M) es la solución. Si $\theta > \theta_L$ estamos en el caso $R_1 = 0$ y al menos un $R_i < 0$ ($i=2,3$).
- iv) Resolver la ecuación (29) como punto fijo en P : solución (P_B, f_M) .
- v) Resolver la ecuación (31) como punto fijo en f y encontrar P con ecuación (30): solución (P_A, f_A) .
- vi) Comparar los VST_i , V_i , y, si son iguales, resolver el sistema (27) (28); si no lo son, resolver (24) y (25): solución (P_C, f_C) .
- vii) Evaluar Y_C para los tres puntos y elegir el que genere el mayor valor.

Como el número de periodos debería ser visto caso a caso, sólo queda por determinar el tratamiento del CEA, costo que está asociado al tamaño de flota, B . El siguiente procedimiento permite aplicar el algoritmo recién descrito, garantizando la cobertura total del costo de inversión y asignaciones razonables por periodo, e incorporando la determinación del tamaño de flota al interior del problema:

- i) Calcular el costo de inversión en un bus, en pesos/día;
- ii) prorratearlo usando la demanda observada (por hora) en cada periodo;
- iii) añadirlo a la componente fija de los costos de operación por bus en cada periodo, definiendo como m_t el total.
- iv) imputar un tiempo de ciclo t_c estimado para los buses en el corredor, considerar que el CEA en el periodo más cargado es $m_t B = m_t t_c f_t$ y resolver ese periodo en P_t y f_t ;
- vi) calcular B e imputar $m_t B$ como costo fijo en los restantes periodos para encontrar tarifas y frecuencias.

El procedimiento completo de búsqueda de P_t y f_t está implementado en el programa JUSTO.

3. APLICACION

Dado un recorrido y una zonificación, la aplicación del método descrito en el punto anterior requiere de varios elementos: matriz origen-destino (N_{ij}^t), modelos de partición modal S_{cij}^t , parámetros de costo de la operación de buses (γ, m_b) y costo marginal del Metro. El ejemplo que se mostrará es el de un recorrido de acceso a la estación Las Rejas, distinguiendo tres periodos (punta mañana, de 1,5 horas; punta tarde, 2 horas; fuera de punta, de 13,5 horas) y once centroides. De los varios modelos disponibles, se prefirió trabajar con los de especificación con tasa de gasto estimados para corredores en Santiago (Jara Díaz y Ortúzar, 1989), particularmente por entregar

compromisos más razonables entre costo y tiempo de viaje, reflejados por los valores subjetivos del tiempo y la utilidad marginal del ingreso, que otros modelos disponibles. Las matrices origen-destino fueron obtenidas a partir de las propias encuestas de Metro. Las variables de nivel de servicio e ingreso fueron obtenidas del estudio ESTRAUS y de mediciones en terreno. La frecuencia máxima corresponde a la capacidad de atención de buses sin crear conflictos viales en el entorno de la estación, y fue estimada por personal del Metro. Los costos marginales resultaron ser de \$ 61/km y \$ 1,2/pas. para buses, y de \$ 22/pas. para el Metro (pesos de Junio de 1990). Los costos de inversión por bus fueron calculados en forma tal que al modelar para un nivel nulo de utilidades ($\theta = 0$), se obtenga un plazo máximo de recuperación del capital financiero de ocho años.

En la Figura 3 se muestra un esquema del recorrido y en la Tabla 1 se incluyen los resultados de la aplicación de los algoritmos descritos.

Se observa que es posible aumentar la demanda observada en porcentajes variables entre el 31% (punta mañana) y el 73% (punta tarde), con una flota de 16 buses de 35 asientos de capacidad. Es interesante notar que el efecto tarifario es menos notable en la punta mañana, sugiriendo una importante diferenciación por períodos. Se ha analizado otros corredores y otras estaciones, cuyos resultados están disponibles en el Departamento de Planificación del Metro; la experiencia de uso del método muestra que no es siempre factible establecer recorridos rentables de combinación, que la modelación previa es necesaria, y que, en general, la diferenciación tarifaria por período es conveniente.

4. CONCLUSIONES

Hemos presentado un modelo para obtener tarifas y frecuencias por períodos, en un servicio de bus que opera en combinación con el Metro, considerando el costo de inversión por máquina. El problema general de maximización del número de usuarios fue reducido a una serie de problemas por período mediante un tratamiento razonable del "costo equivalente de adquisición" de vehículos, tratado como variable y asociado a la frecuencia (tamaño de flota) en el período más cargado, y como costo fijo en el resto. Las propiedades analíticas de las condiciones de primer orden (un período), permitieron diseñar un procedimiento de búsqueda del óptimo sobre la base de una serie de problemas de punto fijo, de atractiva interpretación gráfica. La homogeneidad interzonal (usuarios) facilita la obtención de soluciones.

Las aplicaciones arrojan resultados sensatos que sugieren diferenciación tarifaria por período. Es importante señalar que, por la naturaleza del método diseñado, el procedimiento implementado requiere de un usuario "ilustrado" que tenga clara noción del tipo de solución encontrada y del tratamiento por períodos.

Posibles extensiones incluyen el encadenamiento del modelo con otros de tipo agregado, los que incluyen normalmente como variable el número de zonas a servir, tanto en la demanda (agregada) como en el costo de operación del recorrido alimentador (e.g. Chang y Schonfeld, 1989).

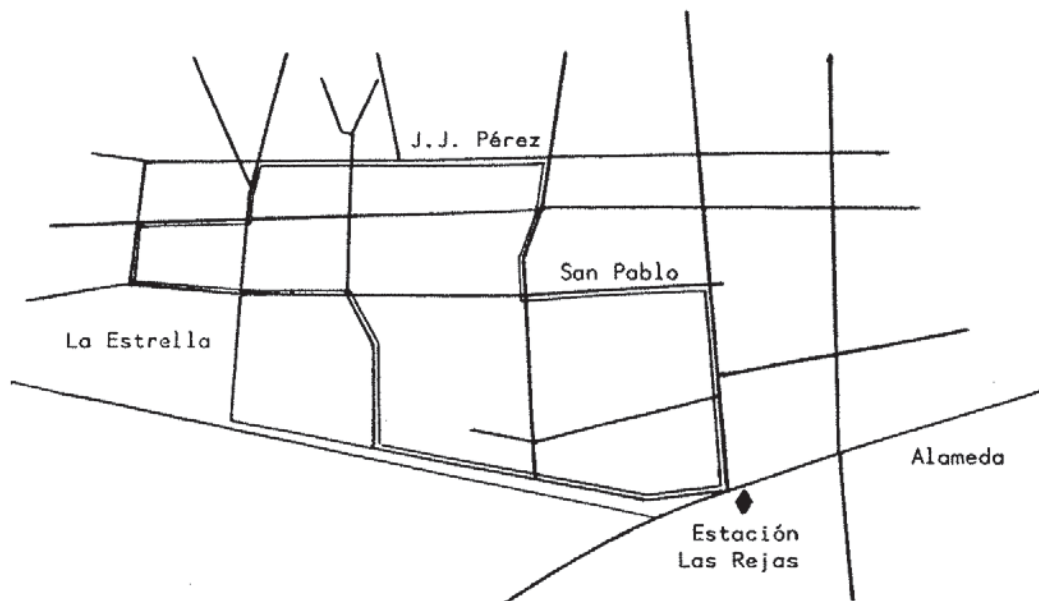


Figura 3. Circuito de acceso en bus a la estación Las Rejas.

	P. Mañana	P. Tarde	F. Punta
Demanda actual	960	961	2814
Demanda estimada	1260	1680	4618
Tarifa bus-metro	125	101	94
Componente bus	105	81	74
Componente metro	20	20	20
Frecuencia (b/hr)	24	24	16
Ocupación bus	35	35	22
Tamaño flota	16	16	10

Tabla 1. Tarifas y frecuencias óptimas en el corredor Las Rejas.

Agradecimientos

Esta investigación fue parcialmente financiada por el proyecto 1217-91 de Fondecyt, proyecto DTI I-3092/9011 de la universidad de Chile y Metro S.A.

Referencias

Chang, S.K. y P.M. Schonfeld (1989) Optimization of feeder bus systems with unsteady and elastic demand. Presentado al 69th. Annual Meeting of the Transportation Research Board, Washington D.C., Enero.

Jara Díaz, S.R. y D. Fernández (1988) Identificación y tarificación de servicios combinados Bus-Metro: metodología y aplicaciones, Ingeniería de Sistemas, Vol. 5 N 2,

Jara Díaz, S.R. y J. de D. Ortúzar (1989) Introducing the expenditure rate in the estimation of mode choice models. Journal of Transport Economics and Policy. Vol. 23, pp. 293-308.

Jara Díaz, S.R. y A. Tudela (1991a) Un modelo para la negociación en la tarificación de servicios Metro-Bus, Cuadernos de Economía 28, N 84, pp. 329-346.

Jara Díaz, S.R. y A. Tudela (1991b) Multiobjective pricing of integrated bus-subway services in Santiago, Chile", Journal of Advanced Transportation (por aparecer).