

MODELACION DE LA VARIABILIDAD ESTOCASTICA DE LA DEMANDA
EN TRANSPORTE PUBLICO INTERURBANO DE PASAJEROS

Tristán E. Gálvez
Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile
Casilla 228/3, Santiago, Chile

RESUMEN

Normalmente los operadores de empresas de transporte público interurbano deben planear y publicar sus itinerarios con anticipación, asignándoles un periodo de validez predeterminado. Los itinerarios pueden ajustarse de modo de seguir las variaciones medias de la demanda obtenidas de la experiencia en la operación histórica de la empresa. Así, por ejemplo, pueden programarse servicios de mayor frecuencia durante las horas del día, o días de la semana, en los cuales se ha observado una mayor demanda. También es posible prever servicios diferenciados para días específicos, tales como aquellos en la proximidad de días festivos especiales. Sin embargo, una vez que todos estos factores han sido tomados en cuenta, persiste cierta incertidumbre en cuanto al número efectivo de pasajeros que intentarán abordar una salida o vuelo específico en un día determinado. En efecto, los valores de demanda utilizados en el diseño son valores medios, de modo que la demanda puede fluctuar por encima o debajo de ellos. Si la capacidad de transporte ofrecida es exactamente igual al valor medio, habrá sin duda numerosos servicios saturados, lo cual implicará ya sea una pérdida directa de ventas de pasajes, si los usuarios pueden elegir de inmediato un servicio alternativo, o un deterioro en el nivel de servicio ofrecido, si los usuarios deben esperar la siguiente salida o vuelo o si deben hacer el viaje de pie. Este deterioro se traducirá también, en el mediano plazo, en una pérdida de clientela.

Las empresas normalmente tratan de evitar estas consecuencias por la vía de proveer una capacidad de transporte en exceso del flujo medio esperado, lo que equivale a trabajar con un factor de carga medio inferior a la unidad. Ello tiende a incrementar los costos medios de operación, con el consiguiente incremento en las tarifas, lo cual también a su vez tiende a reducir la clientela. El factor de carga óptimo dependerá naturalmente de la magnitud de la variabilidad aleatoria de la demanda, por lo cual la modelación de esta componente estocástica resulta crucial para la optimización de la gestión de la empresa.

En este trabajo se presenta una hipótesis acerca de las fuentes de variabilidad de la demanda, la cual conduce a especificar una ley de distribución teórica para la componente aleatoria. A continuación esta ley se aplica al problema de predecir la proporción de pasajeros que viajarían de pie en un servicio ferroviario. La predicción del modelo es contrastada con información estadística generada por los Ferrocarriles Británicos, obteniéndose un buen ajuste.

1. INTRODUCCION.

Los operadores de empresas de transporte público interurbano que ofrecen servicios regulares deben generalmente planear y publicar sus itinerarios con anticipación, asignándoles un periodo de validez predeterminado denominado corrientemente una temporada. Dentro de cada temporada, los itinerarios pueden definirse de modo de seguir las variaciones medias de la demanda obtenidas de la experiencia en la operación histórica de la empresa. Así, por ejemplo, pueden programarse servicios de mayor frecuencia durante las horas del dia, o días de la semana, en los cuales se ha observado una mayor demanda. También es posible programar servicios especiales para días tales como aquellos en la proximidad de festivos.

Sin embargo, una vez que todos estos factores han sido tomados en cuenta, persiste cierta incertidumbre en cuanto al número efectivo de pasajeros que intentarán utilizar una salida o vuelo específico en un dia determinado. En efecto, los valores de afluencia histórica de pasajeros utilizados en el diseño son valores medios, de modo que la demanda por una salida dada puede fluctuar por encima o debajo de ellos. Si la capacidad de transporte ofrecida es exactamente igual al valor medio, habrá sin duda numerosos servicios saturados, lo cual implicará una pérdida directa de ventas de pasajes si los usuarios pueden elegir de inmediato un servicio alternativo ofrecido por una empresa competidora del mismo o diferente modo. Si dichas alternativas no están disponibles, la saturación se traducirá en un deterioro en la calidad del servicio ofrecido, si por ejemplo los usuarios deben esperar la siguiente salida o vuelo o deben hacer el viaje de pie o en condiciones de mayor hacinamiento. Este deterioro se traducirá también, en el mediano plazo, en una pérdida de clientela. Incluso en el caso de que exista un sistema obligatorio de reserva de pasajes, la existencia de salidas saturadas reduce la flexibilidad del servicio desde el punto de vista del usuario, traduciéndose también en pérdida de clientela.

Los operadores en ciertos casos tratan de evitar estas consecuencias por la vía de proveer una capacidad de transporte ajustable en forma dinámica. En el caso de servicios ferroviarios, ello equivale a agregar o quitar coches a las formaciones de los trenes, según la evolución observada de las reservas de pasajes. En el caso de servicios aéreos o de buses, equivale a proveer vehículos extra o de refuerzo o, en su caso, cancelar salidas. Sin embargo, todas estas opciones requieren disponer de equipo en reserva en forma permanente, dado que se desconoce el dia y momento exacto en que la sobredemanda se producirá, incurriendo en el costo de oportunidad correspondiente. Por otra parte, en algunos casos se tropieza con problemas de indivisibilidad. Es el caso, en transporte ferroviario, de ciertos trenes especiales o automotores que operan como una unidad, siendo lento y costoso el proceso de cambio de formación. Es también el caso de buses y aviones en el cual existen tamaños mínimos de vehículo bajo los cuales no es conveniente operar.

Una segunda posibilidad consiste en adoptar una capacidad de transporte en exceso del flujo medio esperado, lo que equivale a trabajar con un factor de carga medio inferior a la unidad. Ello tiende a incrementar los costos medios de operación, con el consiguiente incremento en las tarifas, lo cual también a su vez tiende a reducir la clientela. En este caso, el factor de carga óptimo dependerá naturalmente de la magnitud de la variabilidad aleatoria de

la demanda, por lo cual la modelación de esta componente estocástica resulta crucial para la optimización de la gestión de la empresa.

El presente trabajo se enfoca a modelar esta segunda posibilidad, para lo cual en las secciones 2, 3 y 4 se plantea un modelo matemático de la variabilidad de las cargas. La sección 5 presenta un método para su calibración, en tanto la sección 6 incluye una aplicación para una modalidad de operación específica. Las principales conclusiones del trabajo se presentan en la sección 7.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Los itinerarios publicados por un operador de transporte interurbano normalmente contienen un patrón de servicios que se repite periódicamente (diaria o semanalmente, por ejemplo) durante un período de validez de varios meses que llamaremos una "temporada". Este patrón de servicios está compuesto por un cierto número de "salidas" o "vuelos", identificados por un número de código o simplemente por su origen (a veces implícito), día(s) y hora de salida, y su destino final. En el caso de una línea aérea, se tendrá por ejemplo el vuelo 330 a Antofagasta, Lunes, Jueves y Sábado a las 10:25 horas. Eventualmente el servicio se identifica además con un nombre de fantasía (por ejemplo, un "Rápido de los Lagos", en transporte ferroviario) orientado a la publicidad del producto.

Durante el proceso de confección de los itinerarios, se diseñan en forma conjunta diagramas de operación de los vehículos a utilizar, y se asigna a cada diagrama un tipo y tamaño de vehículo. Pese a existir diversas variantes en los procedimientos utilizados, dependiendo por ejemplo del modo de transporte de que se trate y las particularidades de los servicios a ofrecer, en términos generales puede afirmarse que una "salida" determinada contenida en el patrón de salidas será servida durante toda la temporada por un vehículo de características fijas en cuanto a tipo y tamaño. De este modo, desde el punto de vista de la oferta, esta "salida" se repite en condiciones aproximadamente idénticas tantas veces como la periodicidad del patrón de salidas esté contenida en la duración de la temporada. Llamaremos "N" a este número de repeticiones.

El concepto de "salida" es central en el análisis que sigue, por lo cual lo ilustraremos mediante un ejemplo. Supongamos que un operador ferroviario ha publicado sus itinerarios de verano, válidos por 17 semanas, en el cual se incluye un servicio entre dos estaciones principales, de Lunes a Viernes, partiendo a las 18:00 horas. Sin embargo, la experiencia de veranos anteriores indica que este tren tiende a captar una mayor carga los días Viernes, por lo cual para este día se ha programado un tren con tres coches adicionales y una locomotora de mayor potencia. En este caso, el día Viernes debe ser considerado como una "salida" diferente, que se repetirá $N = 17$ veces en la temporada. En cambio, los servicios de Lunes a Jueves pueden ser considerados como una "salida" única, que se repetirá $N = 17 \cdot 4 = 68$ veces en la temporada.

Sin embargo, si bien desde el punto de vista de la oferta todas las repeticiones de una "salida" dada son aproximadamente iguales, no ocurrirá así con las cargas, en términos de número de pasajeros, que cada repetición

captará. Existen aquí tres fuentes principales de variabilidad. En primer lugar, si bien el operador intentará adaptar la capacidad ofrecida a los valores históricos observados, no siempre será posible o razonable un calce exacto. En el ejemplo anterior puede suceder que las cargas medias de los servicios de Lunes a Jueves difieran ligeramente, pero no lo suficiente para hacer aconsejable un cambio en el tamaño de los trenes, generándose así una variabilidad residual sistemática. En segundo lugar, siempre existirá cierta variabilidad regular al interior de la temporada, pero no de la magnitud suficiente para aconsejar su subdivisión en dos temporadas de menor duración. En tercer lugar, existen factores aleatorios, en el sentido de que no resulta posible predecir cuándo se producirán días de alta o de baja demanda, que se superponen a la variabilidad anterior. Esta tercera fuente de variabilidad será especialmente importante en aquellos sistemas en los cuales no existe un sistema formal de reserva de pasajes, siendo éstos válidos para cualquier salida.

El problema que nos preocupa puede definirse como el análisis conjunto de estas diferentes fuentes de variabilidad de las cargas. Esta variabilidad puede analizarse mediante un enfoque descriptivo, para la información histórica, lo cual se presenta en la Sección 3. Sin embargo, para efectos de predicción, se hace necesario un enfoque probabilístico, presentado en la Sección 4.

3. EL ENFOQUE DESCRIPTIVO.

Supongamos que tenemos conocimiento total de las cargas observadas de una "salida" particular durante una temporada, ordenadas de menor a mayor:

$$L_1 \leq L_2 \leq L_3 \leq \dots \leq L_i \leq \dots \leq L_N \quad (1)$$

De entre ellas, habrá N_k salidas con cargas menores o iguales que un número dado K. La siguiente condición debe cumplirse:

$$L_{N_k} \leq K < L_{N_k+1} \quad (2)$$

El número total de pasajeros en salidas con cargas menores o iguales que K será

$$B_k = \sum_{i=1}^{N_k} L_i \quad (3)$$

El número total de pasajeros en la temporada será

$$P = \sum_{i=1}^N L_i \quad (4)$$

y la carga media evaluada sobre todas las repeticiones de la salida será

$$L = P / N \quad (5)$$

Ahora, si K representa el número de asientos y las reglas de operación aceptan pasajeros de pie, el número de pasajeros sentados en vehículos que llevan pasajeros de pie es

$$F_K = K (N - N_K) \quad (6)$$

y el número de pasajeros que viaja de pie está dado por

$$S_K = \sum_{i=N_K+1}^N (L_i - K) \quad (7)$$

En este caso B_K representa el número de pasajeros que viaja en vehículos que aún tienen asientos disponibles. Las proporciones de pasajeros en cada grupo serán

$$g_B = B_K / P \quad g_F = F_K / P \quad y \quad g_S = S_K / P \quad (8)$$

A partir de estas proporciones resulta posible estimar indicadores de la calidad del servicio ofrecido. Si los pasajeros de pie no son permitidos, tanto S_K como g_S debieran ser nulos y la información contenida en las cargas observadas L_i correspondería a valores observados de una distribución truncada. Sin embargo, si la serie representa la cantidad de personas que intentaron viajar, estos parámetros miden la cantidad o proporción de pasajeros rechazados. Dependiendo de la naturaleza del sistema que se esté modelando, estos pasajeros podrían tomar la salida o vuelo siguiente, elegir otro operador u otro modo de transporte o, eventualmente, no viajar.

Podemos definir ahora la carga normalizada de cada repetición como

$$l_i = L_i / L \quad (9)$$

de modo que las proporciones definidas en la ecuación (8) pueden escribirse como

$$g_B = B_K / P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_K} l_i \quad (10)$$

$$g_F = F_K / P = \frac{1}{N} (K/L) (N - N_K) \quad (11)$$

$$g_s = S_k / P = \frac{1}{N} \sum_{i=N_k+1}^N (l_i - K/L) \quad (12)$$

4. EL ENFOQUE PROBABILISTICO.

Supondremos ahora que nuestra preocupación es la predicción de las proporciones g_p , g_f y g_s para una situación futura dada, para la cual no conocemos las cargas de cada repetición de una salida en forma individual, pero sí algunos parámetros que las definen en términos probabilísticos, a través de la siguiente función de distribución:

$$\text{Prob } (\kappa \leq x) = F(x) \quad (13)$$

donde κ es una variable aleatoria que representa la carga normalizada (dividida por la carga media) de una repetición de una salida dada. Si el número total de repeticiones N es suficientemente grande, podemos tratar κ como una variable continua y definir una función de densidad

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \quad (14)$$

Dado que las cargas han sido normalizadas, el valor esperado de κ será por lo tanto

$$E(\kappa) = 1 = \int_0^\infty x f(x) dx \quad (15)$$

Sin embargo, lo que interesa para efectos de computar la calidad del servicio ofrecido no es el número o proporción de vehículos en una situación dada (que es lo que entrega la función $F(x)$), sino el número o proporción de pasajeros que debe enfrentarse a una situación dada. Lamentablemente para el operador, una repetición de la salida que lleva poca carga es disfrutada por pocos pasajeros, en tanto una con alta carga es sufrida por muchos. Para cuantificar esto último definiremos una nueva función

$$G(x) = \int_0^x x f(x) dx \quad (16)$$

que representa la función de distribución acumulativa de las cargas normalizadas evaluadas en términos de número de pasajeros que enfrentan cada nivel de carga, esto es, $G(x)$ es la probabilidad de que un pasajero elegido al azar viaje en un vehículo cuya carga normalizada es menor o igual que x . La función de densidad de esta segunda distribución será

$$g(x) = \frac{d}{dx} G(x) = x f(x) \quad (17)$$

Usando la notación definida en la sección anterior, se tiene:

$$g_B = \int_0^{K/L} x f(x) dx = \int_0^{K/L} g(x) dx = G(K/L) \quad (18)$$

$$g_F = \int_{K/L}^{\infty} (K/L) f(x) dx = (K/L) (1 - F(K/L)) \quad (19)$$

$$g_S = \int_{K/L}^{\infty} (x - K/L) f(x) dx \quad (20)$$

Para continuar avanzando necesitamos hacer un supuesto acerca de las leyes de distribución $F(x)$ y $G(x)$. Otros estudios sobre el tema (Powell, 1982; Inzerilli, 1989) han adoptado el supuesto de que las cargas siguen una distribución normal.

En este trabajo partiremos del supuesto alternativo de que las cargas son el resultado de un proceso de elección entre el servicio analizado y otras alternativas disponibles, el cual puede ser modelado usando un modelo LOGIT (Domencich y McFadden, 1975; Ortúzar, 1982). En dicho modelo, la heterogeneidad de los usuarios es resumida por el término de error que se supone sigue una distribución Tipo I de Gumbel (1958). Esto sugiere la hipótesis de que la variabilidad del logaritmo de las cargas, que es proporcional a dicho término de error, podría seguir la misma distribución. Por supuesto, esto no es más que una conjetura que debe ser contrastada con los datos disponibles, y es equivalente a decir que $G(x)$ es una distribución Tipo II de Gumbel (1958), esto es

$$g(x) = \frac{n \omega^n}{x^{n+1}} \exp(-(\omega/x)^n) \quad (21)$$

$$G(x) = \exp(-(\omega/x)^n) \quad (22)$$

De las ecuaciones (18) y (22) se deduce que

$$g_B = G(K/L) = \exp(-(\omega L/K)^n) \quad (23)$$

Ahora, para computar g_F , necesitamos una expresión explícita para $F(K)$. Sabemos que

$$F(z) = \int_0^z f(x) dx = \int_0^z \frac{n \omega^n}{x^{n+2}} \exp(-(\omega/x)^n) dx \quad (24)$$

para evaluar esta integral, podemos hacer la sustitución

$$v = (\omega/x)^n \quad x = \omega v^{-1/n} \quad (25)$$

$$y \quad dx = -\frac{\omega}{n} v^{(1/n)-1} dv \quad (26)$$

y se obtiene

$$F(z) = \int_y^{\infty} \frac{v^{1/n}}{\omega} \exp(-v) dv \quad \text{con } y = (\omega/z)^n \quad (27)$$

Esta distribución está relacionada con la bien conocida distribución Gamma (ver Johnson and Kotz, 1969). Podemos fácilmente comprobar que $F(0) = 0$ y

$$F(\infty) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} v^{1/n} \exp(-v) dv = \frac{1}{\omega} \Gamma(1 + \frac{1}{n}) = 1 \quad (28)$$

de modo que una condición necesaria es

$$\omega = \Gamma(1 + \frac{1}{n}) \quad (29)$$

De las ecuaciones (27) y (29) obtenemos

$$F(K/L) = \int_y^{\infty} \frac{v^{1/n}}{\Gamma(1 + \frac{1}{n})} \exp(-v) dv \quad (30)$$

$$\text{con } y = \left\{ \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{n})}{K/L} \right\}^n \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \text{ahora } & \int_y^{\infty} v^{1/n} \exp(-v) dv = \\ & = \int_0^{\infty} v^{1/n} \exp(-v) dv - \int_0^y v^{1/n} \exp(-v) dv \\ & = \Gamma(1 + \frac{1}{n}) - \Gamma(1 + \frac{1}{n}) \cdot \Gamma_y(1 + \frac{1}{n}) \end{aligned} \quad (32)$$

donde Γ_y es la función Gamma incompleta. Reemplazando la ecuación (32) en la (30) se obtiene

$$F(K/L) = 1 - \Gamma_y \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (33)$$

y obtenemos finalmente, reemplazando la ecuación (33) en la (19)

$$g_F = (K/L) \Gamma_y \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (34)$$

En resumen, las expresiones finales son:

$$y = \left\{ \frac{\Gamma_y \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{K/L} \right\}^n \quad (35)$$

$$g_B = \exp(-y) \quad (36)$$

$$g_F = (K/L) \Gamma_y \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (37)$$

$$g_S = 1 - g_B - g_F \quad (38)$$

Por lo tanto, podemos obtener todas las proporciones a partir de los dos parámetros K/L y n . Como K/L es conocido, la única incógnita que debe ser calibrada es n .

5. CALIBRACION.

Para la calibración del modelo se debe utilizar una serie estadística de cargas de las repeticiones de una salida dada, que esté libre de problemas de truncamiento. Estos problemas aparecen, por ejemplo, cuando los vehículos tienen una capacidad rígida que no puede ser excedida y la serie de cargas se refiere a la ocupación real de los vehículos. En este caso, bastaría mantener registros estadísticos del número de pasajeros rechazados en cada repetición de la salida, pero estos datos normalmente no son recogidos. Cuando las distribuciones de cargas están truncadas, la variabilidad observada será menor que la variabilidad real y el valor medio de las cargas estará también subestimado. Un procedimiento de corrección puede encontrarse en Powell (1982), pero aplicado al caso en que se supone que la variabilidad puede modelarse mediante una distribución normal.

En lo que sigue supondremos que disponemos de datos no truncados, provenientes de las cargas en un sistema que opera siempre bajo capacidad. Usando la notación de las secciones anteriores, la proporción acumulada de pasajeros que viaja en vehículos con una carga normalizada menor o igual que x será

$$H(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N_x} l_i}{\sum_{i=1}^N l_i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_x} l_i \quad \text{con } l_{N_x} \leq x < l_{N_x+1} \quad (39)$$

y podemos suponer que esta distribución debiera ser similar a la teórica, dada por

$$G(x) = \exp(-(\omega/x)^n) \quad (40)$$

para todos los valores posibles de x . En realidad, podemos usar tantos valores como conteos existan en una temporada. Si tomamos logaritmo dos veces en ambas expresiones obtenemos

$$\begin{aligned} \ln(-\ln(H(x))) &= n(\ln(\omega) - \ln(x)) \\ &= a + b \ln(x) \end{aligned} \quad (41)$$

Por lo tanto, los valores a y b pueden ser obtenidos por regresión, calculando a partir de ellos los parámetros del modelo como

$$n = -b \quad y \quad \omega = \exp(-a/b) \quad (42)$$

La adecuación del modelo puede ser comprobada parcialmente verificando el cumplimiento de la condición

$$\omega = \Gamma(1 + \frac{1}{n}) \quad (43)$$

Este método de calibración fue utilizado sobre datos de conteos del número de pasajeros a bordo de cada repetición de una salida de un tren, en puntos seleccionados de su recorrido, realizados por los ferrocarriles Británicos en su línea principal de la Costa Este desde Septiembre de 1985 a Septiembre de 1986. Estos datos contenían alrededor de 200 repeticiones de conteos para unas 50 combinaciones de salidas y puntos de control. Ello habría permitido en principio calibrar 50 modelos diferentes. Sin embargo, se detectó que todas las series de repeticiones de cargas tenían un coeficiente de variación similar, por lo cual al normalizarlas (dividirlas por la carga media), todas ellas quedaban con aproximadamente la misma desviación típica, siendo por lo tanto posible mezclarlas para calibrar un modelo único. La desviación típica común se computó haciendo regresión entre la desviación típica y la media de cada serie de conteos, obteniendo una recta de ajuste con intersección nula y una pendiente de aproximadamente 0.36.

El análisis de estas series estadísticas reveló además que las varianzas eran sistemáticamente mucho mayores que las medias, lo cual tiende a indicar que la variabilidad del proceso es mayor que la de un proceso de Poisson, en el cual la media debiera ser igual a la varianza.

La regresión se computó usando el paquete SAS (1985). Los resultados obtenidos en la primera corrida fueron

$$a = -0.54733 \quad b = -3.81304$$

$$\text{de modo que } n = 3.81304 \quad w = 0.86628$$

$$y \quad \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.904$$

con un error de menos de un 5%. Esto sugiere que el modelo está reflejando adecuadamente el proceso real. En una segunda corrida se impuso la condición (43), obteniendo

$$n = 3.76544$$

$$w = \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.9033$$

$$R^2 = 0.497$$

6. APLICACION.

El modelo presentado requiere análisis adicional para ser aplicado a cada situación concreta. Lo que hace diferente cada aplicación específica son las consecuencias de la saturación de un servicio. En este trabajo elegiremos una de estas situaciones, que corresponde a las reglas de operación adoptadas por los ferrocarriles británicos. Según éstas, los pasajeros que no encuentran asiento disponible pueden viajar de pie si así lo desean, de modo que las cargas observadas pueden considerarse no truncadas. En teoría, sin embargo, podría existir cierto grado de truncamiento relacionado con la elasticidad de la demanda al deterioro del nivel de servicio causado por el tener que viajar de pie. La cuantificación de este fenómeno excede el ámbito del presente trabajo, por lo cual supondremos que las series de cargas observadas no están truncadas. Naturalmente, este supuesto será tanto más válido cuanto menores sean los niveles de congestión. Al respecto, los datos disponibles indican que sólo el uno o dos por ciento de los pasajeros viajan de pie, lo cual contribuye a sustentar el supuesto adoptado.

En estos servicios cada salida tiene normalmente varias paradas intermedias, en las cuales suben y bajan pasajeros. De este modo, la carga es variable a lo largo de la ruta. En la Figura 1 se muestra en forma esquemática niveles hipotéticos de carga para un servicio de este tipo. Las paradas intermedias han sido expandidas para mostrar la carga que queda en el tren después de que los viajeros que bajan en una parada intermedia dada han descendido, pero antes de que quienes abordan el tren en dicho punto lo hayan hecho.

El modelo presentado en la sección 4 entrega la probabilidad de que en un tramo dado de la ruta la carga exceda la capacidad. En este caso la diferencia entre carga y capacidad corresponde al número de pasajeros de pie. Sin embargo, para trenes que tienen paradas intermedias, la probabilidad de que un pasajero vaya de pie depende obviamente de cuál es su estación de origen, dado que quienes abordaron primero el tren tienen una mayor probabilidad de haber conseguido un asiento.

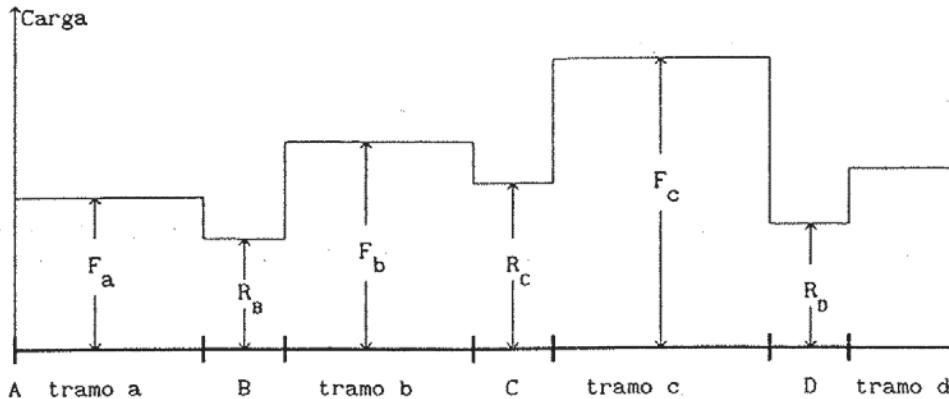


Figura 1. Esquema de un viaje ilustrando cargas por tramo.

Usaremos la notación definida previamente, añadiendo un subíndice que representa el tramo en el cual estamos computando las probabilidades. De este modo, la probabilidad de tener que viajar de pie en el tramo L será

$$g_{SL} = 1 - g_{BL} - g_{FL} \quad (44)$$

donde

$$g_{BL} = \exp(-y) \quad (45)$$

es la probabilidad de viajar sentado en un tren sin pasajeros de pie, en tanto que la probabilidad de hacerlo en uno con viajeros de pie es

$$g_{FL} = K_L \Gamma_y \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (46)$$

$$\text{con } y = \left\{ \frac{\Gamma \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{K_L} \right\}^n \quad (47)$$

donde K_L representa el número de asientos dividido por la carga media en el tramo L. Ahora, si llamamos F a la carga normalizada total, la probabilidad de viajar de pie queda dada por la función

$$s(F) = g_{SL} \quad (48)$$

Podemos definir una matriz S_{LO} que contiene la probabilidad de viajar de pie en el tramo L para un viajero que abordó el tren en la estación O, y una segunda matriz F_{LO} que contiene el número total de pasajeros con origen en O y a bordo en el tramo L. Supondremos que F_{LO} es conocido.

Para el primer tramo 'a' que parte de la estación A, se tiene

$$S_{AA} = s(F_{AA}) \quad \text{y} \quad S_{AO} = 0.0 \text{ para } O \neq A \quad (49)$$

Computaremos ahora la probabilidad de viajar de pie para los pasajeros con origen en A, luego que aquellos con destino en B han descendido. El número de pasajeros que permanece en el tren será

$$R_B = \sum_{O \neq B} F_{BO} \quad (50)$$

lugo, la probabilidad buscada es

$$S_{BA} = s(R_B) \quad (51)$$

El paso siguiente es el cómputo de la probabilidad de viajar de pie para los pasajeros con origen en B. Usando cálculo elemental de probabilidades se tiene

$$R_B S_{BA} + F_{BB} S_{BB} = F_B s(F_B) \quad (52)$$

donde $F_B = R_B + F_{BB}$ es la carga total en tramo b. Obtenemos finalmente

$$S_{BB} = \{ F_B s(F_B) - R_B S_{BA} \} / F_{BB} \quad (53)$$

Podemos ir ahora a la tercera estación C. Se puede computar una probabilidad media de viajar de pie para el flujo de paso. Sin embargo, existen dos subpoblaciones de viajeros, los con origen en A y aquellos con origen en B. Resulta necesario modelar la forma en la cual estas dos subpoblaciones competirán por los asientos que quedarán vacantes. Supondremos que una cierta proporción q de los viajeros de pie obtendrán un asiento. En otras palabras, ello equivale a suponer que la probabilidad de conseguir un asiento es q, independientemente del origen del viajero. Por lo tanto, la probabilidad de permanecer de pie estará dada por

$$S_{CA} = S_{BA} (1 - q) \quad \text{y} \quad S_{CB} = S_{BB} (1 - q) \quad (54)$$

pero como conocemos la probabilidad total de viajar de pie, se tiene

$$S_{CA} F_{CA} + S_{CB} F_{CB} = s(R_C) (F_{CA} + F_{CB}) \quad (55)$$

y combinando ambas expresiones obtenemos

$$1 - q = \frac{s(R_C) (F_{CA} + F_{CB})}{S_{BA} F_{CA} + S_{BB} F_{CB}} \quad (56)$$

La probabilidad de viajar de pie para pasajeros que suben en C puede ser calculada por medio de una expresión análoga a la obtenida para pasajeros que suben en B

$$S_{cc} = \{ F_c s(F_c) - R_c s(R_c) \} / F_{cc} \quad (57)$$

la cual será válida para todas las paradas siguientes. El procedimiento para computar las probabilidades de viajar de pie para pasajeros de paso puede también ser generalizada a cualquier número de orígenes, por el simple procedimiento de incluir todos ellos en el cálculo de $1 - q$, que pasa a ser un factor de escala para obtener probabilidades de viajar de pie en un tramo a partir de aquellas del tramo anterior.

La probabilidad de viajar en un tren sin pasajeros de pie es mucho más simple pues no depende de la estación de origen, por lo cual podemos usar la ecuación (45) directamente. La probabilidad de viajar sentado en un tren con pasajeros de pie puede ser obtenida como residuo, y será dependiente de la estación de origen.

7. CONCLUSION.

El principal resultado de este trabajo es la formulación de una ley de distribución para la variabilidad aleatoria de las cargas en servicios interurbanos de transporte público de pasajeros. Se ha mostrado, además, cómo este modelo puede ser calibrado utilizando datos que normalmente se encuentran disponibles por parte de las empresas operadoras.

Sin embargo, las consecuencias de la variabilidad de los flujos en términos de nivel de servicio ofrecido a los usuarios dependen de las políticas y reglas de operación de cada sistema específico. Se ha desarrollado, como ilustración, la aplicación del modelo al caso en que se acepta pasajeros de pie, esto es, ningún pasajero es rechazado por el sistema.

A partir de estos resultados es posible evaluar políticas de operación alternativas en lo que se refiere a capacidad ofrecida para una salida dada. Para ello se requiere naturalmente construir una función de utilidad que contenga el nivel de aglomeración entre sus atributos, de modo que sea posible computar, mediante un modelo de demanda elástico al nivel de servicio, los efectos de cada política sobre el número de pasajeros captado por el servicio y los ingresos operacionales correspondientes. Estos resultados deben ser finalmente contrastados con los costos de proveer diversos niveles de capacidad. El resultado es un modelo integral de evaluación de políticas de operación (Gálvez, 1989).

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue parcialmente financiada por The Science and Engineering Research Council del Reino Unido, el proyecto DTI I-3092/9011 de la Universidad de Chile, y por el proyecto 1217-91 de FONDECYT.

REFERENCIAS

- Domencich, T. y D. McFadden (1975) Urban travel demand - a behavioural analysis. North Holland, Amsterdam.
- Gálvez, T.E. (1989) Assessment of operating policies in public transport: A comprehensive model applied to a rail service. Tesis de doctorado, Universidad de Leeds.
- Gumbel, E.J. (1958) Statistics of extremes. Columbia University Press.
- Inzerilli, F. (1989) Welfare-maximizing price differentiation and capacity adjustements in air transportation. Tesis de Master of Science, M.I.T.
- Johnson, N.I. y S. Kotz (1969) Discrete distributions. Houghton Mifflin, Boston.
- Ortuzar, J.D. (1982) Fundamentals of discrete multimodal choice modelling. Transport Reviews, Vol. 2, No. 1, pp. 47-78.
- Powell W.B. (1982) Analysis of airline operating strategies under stochastic demand. Transportation Research Vol. 16B, No.1, pp. 31-43.
- SAS Institute Inc. (1985) SAS[®] User's Guide. Version 5 Edition. SAS Institute Inc., Cary, NC.

