MODELOS DINAMICOS PARA LA PLANIFICACION DE REDES DE TRANSPORTE

J. Enrique Fernández L. y Joaquín de Cea Ch.
Depto. Ingeniería de Transporte, U. Católica de Chile
Casilla 306, Santiago 22, CHILE.

RESUMEN

En este trabajo se analizan las características de la formulación dinámica de modelos de asignación a redes de transporte; primero se plantean las ecuaciones necesarias para describir la dinámica de los flujos en una red de transporte, se analizan las limitaciones de las formulaciones que se han propuesto hasta la fecha y se realizan proposiciones para superar las dificultades que éstas presentan; luego se estudian las características de las funciones de costo de operación en un contexto dinámico, se proponen nuevas formulaciones y se analizan sus relaciones con las existentes; a continuación, se analizan y discuten distintos principios posibles de comportamiento dinámico de los usuarios de una red de transporte urbano. Finalmente, se plantean recomendaciones para el desarrollo de nuevos modelos dinámicos de asignación de flujos a redes de transporte.

ACTAS DEL VI CONGRESO CHILENO DE INGENIERIA DE TRANSPORTE, 1993
SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA DE TRANSPORTE

1. INTRODUCCION

Durante los últimos años se ha manifestado un creciente interés por el estudio y formulación de modelos dinámicos de planificación de sistemas de transporte; en especial un número importante de investigadores se ha abocado al desarrollo de modelos dinámicos de redes de transporte. La primera contribución de importancia en esta materia fue realizado por Merchant y Nemhauser[1]. (1978a y 1978b) el que ha servido como base y motivación para varios autores, que posteriormente han planteado mejoras y extensiones al modelo básico propuesto por ellos (Carey, 1987; Drissi-Kaïtouni y Hameda-Benchekroun, 1989; Friesz, et al. 1989; Wie, Friesz y Tobin, 1990; Janson, 1991a y 1991b; Ran, Boyce y LeBlanc, 1991 y otros).

Sin embargo, se puede decir que los modelos dinámicos de redes de transporte presentan todavía un desarrollo embrionario y que falta un importante camino por recorrer para llegar a tener una comprensión cabal de todas las implicancias que el nuevo marco de modelación plantea. Tanto las formulaciones matemáticas desarrolladas hasta la fecha, como la interpretación de sus resultados, produce dificultades y requiere de sofisticaciones mucho mayores que las derivadas del análisis estático propio de los llamados "modelos de equilibrio en redes de transporte[2]" (ver Beckmann McGuire y Winstein, 1956, LeBlanc, Morlok y Pierskalla, 1975, Florian y Nguyen, 1978, Abdulaal y Leblanc, 1979, Aashtiani y Magnanty 1981, Dafermos, 1982, Fernández y Friesz, 1983, etc.). La introducción del tiempo como variable independiente, requiere un replanteamiento de las funciones y ecuaciones utilizadas para definir el comportamiento del sistema de transporte analizado.

Todos los modelos considerados en el presente trabajo suponen que las demandas por viajes (demandas O-D) son inelásticas a las condiciones de operación sobre la red, aunque varían con el tiempo de una forma predeterminada que se considera conocida. Por lo tanto, las condiciones de operación sobre la red y las decisiones que optimizan el objetivo de los usuarios individuales, o el sistema conjunto, dependerán del instante de partida del viaje. En consecuencia, nos concentramos en la modelación del comportamiento dinámico de los flujos y niveles de servicio sobre la red durante el período de análisis, dadas demandas O-D conocidas en función del tiempo.

En la sección 2, se introduce la notación y conceptos básicos, se analizan las características de las ecuaciones necesarias para describir la dinámica de los flujos en una red y se realizan proposiciones para superar las dificultades que presentan las formulaciones propuestas hasta la fecha; en la sección 3, se estudian las características de las funciones de costo de operación en un contexto dinámico, se plantean algunas nuevas formulaciones y se analizan sus relaciones con las existentes; en la sección 4, se plantea y discute la formulación de principios

[1] En adelante nos referiremos a ellos con la sigla **MyN**.

[2] En adelante denominaremos por la sigla **MEE** a este tipo de modelos.

de comportamiento para los usuarios individuales y el sistema en su conjunto; finalmente, en la sección 5 se resumen las principales conclusiones y se realizan recomendaciones para futuras investigaciones en el tema.

2. NOTACION, CONCEPTOS BASICOS Y DINAMICA

Supongamos una red de transporte representada por un grafo dirigido $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{N}$ es el conjunto de los nodos y $\mathcal{A}$ el conjunto de los arcos; los primeros representan intersecciones en la red y centroides donde se localiza el origen y destino de los viajes y los segundos las calles de la ciudad. Representaremos con un índice a a los arcos y con índices i, j, k, n a los nodos (reservando k, n para los centroides). Usaremos además la siguiente notación básica:

W	: conjunto de pares origen-destino (O-D).
w	: elemento del conjunto W, en que $w = (k, n)$ con k, n centroides.
P	: conjunto de rutas disponibles sobre la red G.
P_w	: conjunto de rutas asociado con un par w.
p	: un elemento del conjunto P.

2.1 Ecuaciones Dinámicas

El análisis se realizará para un lapso total de tiempo T correspondiente a un período típico de operación sobre la red (ej. punta mañana); usaremos la variable t para representar un instante (o intervalo, si la formulación es discreta en la variable tiempo) de tiempo en el período de análisis considerado, $t \in [0, T]$.

En los MEE se considera que los flujos y niveles de servicio son constantes durante el período de análisis y por lo tanto existe un solo valor de las variables correspondientes. En el caso dinámico sin embargo, es necesario describir como variarán los flujos a través del tiempo; para ello se deben introducir ecuaciones que cumplan dicha función en el modelo.

El modelo dinámico propuesto por MyN se basa en una representación discreta de la variable tiempo, en la que el período $[0, T]$ es subdividido en $\overline{T}$ intervalos; la principal diferencia con las formulaciones estáticas de los MEE, se deriva de la introducción de la siguiente ecuación dinámica como restricción que deben cumplir los flujos resultantes y que define las características tanto de la evolución temporal, como la progresión espacial de éstos a través de la red:

$$f_{a,t+1} = f_{a,t} + u_{a,t} - g_a(f_{a,t}), \qquad a \in \mathcal{A}, \quad t = 0, \ldots, \overline{T} - 1, \tag{1}$$

donde $f_{a,t}$ representa el número de vehículos que se encuentran en el arco a al comienzo del intervalo t y $u_{a,t}$ es el número de vehículos que son admitidos en el arco a durante el intervalo t; g_a que es denominada función de egreso", determina el número de vehículos que salen del arco durante el mismo intervalo y se plantea dependiente del número de vehículos que hay en el arco en ese intervalo. MyN definen las siguientes propiedades para esta función:

ACTAS DEL VI CONGRESO CHILENO DE INGENIERIA DE TRANSPORTE, 1993
SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA DE TRANSPORTE

- $g_a(f_a) \leq f_a$,
- $g_a(0) = 0$, y $g_a(f_a) \geq 0, \qquad \forall f_a \geq 0$.
- g_a es una función continua, no decreciente y cóncava de f_a.

Usando una formulación en tiempo continuo, Friesz et al., (1989) reformulan la relación (1) expresándola como la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{df_a(t)}{dt} = u_a(t) - g_a[f_a(t)], \qquad a \in \mathcal{A}, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

en donde el término de la izquierda representa la tasa de cambio de la cantidad de vehículos en el arco a en el instante t y el resto de las variables tiene el mismo significado anterior, pero en términos instantáneos para t.

Tanto para el caso de la formulación discreta (1), como continua (2), se supone que los valores iniciales de la cantidad de vehículos en cada arco, $f_{a,0}$ (ó $f_a(0)$), $\forall a \in \mathcal{A}$, son conocidos. Por lo tanto, la cantidad de vehículos en cada arco $a \in \mathcal{A}$, en cualquier instante t estará dada por:

$$f_a(t) = \int_0^t \{u_a(t) - g_a[f_a(t)]\}dt + f_a(0), \qquad a \in \mathcal{A}, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

para la formulación continua y por la aplicación repetida de la ecuación (1) durante los períodos 0 a t, partiendo con los valores iniciales $f_{a,0}$, para la formulación discreta.

Conviene tener presente que en las ecuaciones anteriores, u y g representan flujos en el sentido normal de "vehículos por unidad de tiempo, que pasan por un punto determinado de la red" (en nuestro caso por los nodos de entrada y salida que definen los límites del arco considerado), sin embargo, f corresponde solamente a la cantidad de vehículos que se encuentran dentro del arco, en un instante o intervalo de tiempo; de acuerdo con (1) y (2), son las variaciones en el valor de la variable f, por unidad de tiempo, las que tienen unidades de flujo. Por lo tanto, la variable f no es el equivalente de la variable "flujo del arco a" utilizada en los MEE.

Dado que cada arco a de la red tiene una cierta longitud l_a, se puede definir una densidad (promedio) de tráfico en el arco, $d_a(t) = [f_a(t)/l_a]$.

2.2 Conservación de Flujos

A fin de que los flujos considerados sean factibles, en todo instante t se deben cumplir las mismas condiciones de conservación en los nodos de la red que para el caso del MEE. Para la formulación continua en t, con un solo destino n, tendremos[3]:

---

[3] Supondremos que en la codificación se definen los centroides (k,n) en forma separada de los nodos comunes de la red (ruteadores), y por lo tanto, entre ellos se definen arcos de acceso (o conectores de centroides).

$$T_w(t) = \sum_{a \in A(k)} u_a(t), \quad \forall k \in \mathcal{N}, \quad w = (k,n), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\sum_{a \in A(i)} u_a(t) = \sum_{a \in B(i)} g_a(t), \quad (i \in \mathcal{N}), \quad t \in [0,T] \tag{5}$$

donde k representa a los centroides origen, e i a los nodos ruteadores (intersecciones de la red que no generan ni atraen flujo); $T_w(t)$ es la tasa instantánea de flujo, que sale en t del centroide origen k con destino n y que suponemos es una función dada (dato), no negativa y continua en t; $A(k)$ y $B(k)$ son los conjuntos de arcos que salen (posterior) y entran (anterior) al nodo k respectivamente. Por lo tanto, en este caso, $A(k)$ de la ecuación (4) identifica al grupo de arcos conectores de acceso entre el centroide k y la red propiamente tal.

Cuando hay un solo destino n, es obvio que las restricciones (4) y (5) son suficientes para que los flujos provenientes de todos los orígenes terminen en el centroide n. Sin embargo, si bien existe un momento específico, expresado en $T_w(t)$ (con $w = (k,n)$), en el cual los flujos salen del nodo origen k, su llegada al destino n dependerá de los tiempos de viaje sobre la red, los que son parte de las variables del problema. Además, algunos flujos que salgan de su origen en momentos cercanos al final del período, T, no alcanzarán a llegar a su destino dentro del período de análisis $[0,T]$.

Lo anterior plantea un problema para la formulación de modelos dinámicos con múltiples destinos, ya que no es posible especificar a priori (como un dato externo), cual será la cantidad de viajes que arribarán a cada destino, en cada intervalo o instante t. Dicha cantidad es en el caso dinámico una variable del problema que debe ser determinada por el proceso de asignación.

Una solución propuesta por Carey (1987) para la formulación en tiempo discreto, consiste en definir demandas totales,

$$\overline{D}^m = \sum_{k \in \mathcal{N}} \sum_{t=0}^{\overline{T}} T_{w,t} \tag{6}$$

equivalentes al flujo total que debe arribar a un destino m, antes de que termine el último intervalo $\overline{T}$; a continuación se introducen restricciones del siguiente tipo para todos los destinos del conjunto $\{n\}$:

$$\sum_{t=0}^{\overline{T}} \sum_{a \in B(m)} g_{a,t} = \overline{D}^m, \quad \forall m \in \{n\}, \tag{7}$$

Alternativamente Carey propone cambiar el signo "igual" en la restricción por "menor o igual", en el caso que el resultado con igualdad resulte ser no factible,

ACTAS DEL VI CONGRESO CHILENO DE INGENIERIA DE TRANSPORTE, 1993
SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA DE TRANSPORTE

debido a que no sea posible que los flujos predefinidos, $\overline{D}^m$, alcancen el respectivo destino antes de que el intervalo final $\overline{T}$ termine; otra alternativa sería considerar períodos adicionales $t = T+1, T+2, ...$ a fin de permitir que los flujos que todavía se encuentran en arcos de la red en el período T, alcancen sus destinos. En el caso de una representación con variable tiempo continua, sería necesario reemplazar la sumatoria sobre los períodos t en (7) por una integral en dt.

Otra alternativa consiste en adoptar una representación multicopia, en que se consideran distintas variables para representar los flujos con diferentes destinos. En este caso, se definen variables f_a^n, u_a^n y funciones g_a^n, con los mismos significados anteriores pero ligadas a un destino específico n. Entonces, si distinguimos entre centroides origen, identificados por el índice genérico k, centroides destino, identificados por el índice genérico n y nodos ruteadores i, para una formulación en tiempo continuo, podemos usar las siguientes ecuaciones de conservación como restricciones a ser cumplidas por los flujos dinámicos factibles:

$$T_w(t) = \sum_{a \in A(k)} u_a^n(t), \quad \forall k, n \in \mathcal{N}, \quad w = (k,n), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$\sum_{a \in A(i)} u_a^n(t) = \sum_{a \in B(i)} g_a^n(t), \quad i \in \mathcal{N}, \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$u_a^n(t) = 0, \quad \forall a \in B(m), \quad n \neq m, \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

en donde m representa un nodo destino específico, del grupo n. La condición (10) es necesaria a fin de que cada flujo termine en el destino que le corresponde y no en otro, pero no ha sido incluida anteriormente en las expresiones propuestas por los autores que han usado formulaciones multicopia para redes con múltiples destinos. La formulación multicopia permite definir las condiciones de conservación como si se tratara de n redes diferentes, cada una de ellas con un solo destino m, simultáneamente. Para ello, es sin embargo necesaria la inclusión de las restricciones (10), que reemplazan a las restricciones de destinos típicas de los modelos MEE, las que en este caso no pueden ser usadas, dado el desconocimiento que a priori existe respecto del tiempo de llegada de los flujos a su destino.

Una simplificación importante de los modelos dinámicos que estamos considerando es que no se distingue entre distintas posiciones dentro de un mismo arco, suponiendo que para cada instante t se experimentan las mismas condiciones de operación (densidad, velocidad, costo) a todo lo largo de él; los cambios que las condiciones experimentan con t se extienden por lo tanto en forma homogénea por todo el arco. Si se produce un cambio repentino en la magnitud del flujo que entra en un arco, ella será atenuada por esta propagación "promediada" a través del arco. Es obvio que mientras más largos sean los arcos, mayor será el impacto de esta simplificación y, por lo tanto, las diferencias que puedan observarse respecto del comportamiento de un sistema real. Una forma de aliviar el problema es planteada mas adelante.

2.3 Modelos con Variable Tiempo Discretizada

Supongamos una ruta $\widetilde{p} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $a_1 = (k, i)$, $a_m = (j, n)$, $\widetilde{p} = P_w, w = (k, n)$, como la única ruta que une w[4]. Entonces, dado el valor de las demandas $T_{w,t}$, entre el centroide origen k y el destino n, durante los intervalos de tiempo $t = 1, 2, \ldots, \overline{T} - 1$, y los valores de las cantidades iniciales de vehículos en cada arco, $f_{a,0}$, mediante la aplicación repetida de las ecuaciones (1), (8), (9) y (10), se pueden obtener los valores de todas las variables $u_{a,t}, f_{a,t}$ y $g_{a,t}, \forall a \in p, t = 1, 2, \ldots, \overline{T}$. Este procedimiento produce flujos dinámicos sobre la red cuya evolución y progresión presenta las siguientes características:

i) el flujo $u_{a,t}$, que entra en el arco a, durante el intervalo de tiempo t, es sólo agregado al número de vehículos que se encuentran dentro del arco ,f_a, al comienzo del intervalo $t+1$ (ver ecuación (1)).

ii) sin embargo, el flujo $g_{a,t}$, que sale del arco a durante el intervalo t, es función del número de vehículos $f_{a,t}$, que están dentro del arco durante el mismo intervalo t (ver definición de función g_a).

iii) Por lo tanto, de (i) y (ii) se deduce que, ninguno de los vehículos que ingresan en el intervalo t pueden salir del arco durante el mismo intervalo.

iv) dado que $f_{a,t} \geq 0$, (iii) implica que $g_{a,t}(f_{a,t}) \leq f_{a,t}$, porque de lo contrario, sería necesario que parte del flujo que entra al arco durante el intervalo t saliera durante el mismo intervalo.

v) dado que el flujo $u_{a,t}$, que entra al arco a durante el intervalo t se agrega al flujo $(f_{a,t} - g_{a,t})$, que se encuentra dentro del arco al comienzo del intervalo $t+1$, sin distinción de orden de entrada, siempre habrá alguna proporción del flujo $u_{a,t}$, dada por $(g_{a,t+1}/f_{a,t+1})$, que atravesará el arco en exactamente un intervalo, independientemente de cuál sea el valor de la duración de cada intervalo o del largo del arco.

vi) dado que el flujo que entra en un arco, es de inmediato distribuido homogeneamente a lo largo de él, se violará en general la regla FIFO en el tratamiento de los flujos dentro de los arcos.

vii) Existen dos casos particulares en los que se obtiene una velocidad de propagación de un arco por período: $f_{a,t} = 0$ y $g_{a,t}(f_{a,t}) = f_{a,t}$; en el segundo caso, todo el flujo que entra en el arco a durante el intervalo t sale del arco durante el intervalo $t+1$. Por lo tanto, el flujo se propaga por la red a la velocidad de un arco por intervalo, o en otras palabras, un vehículo que entra en la red en el intervalo $t = 0$, y que viaja entre los centroides k y n, a través de la ruta $\widetilde{p}$, llegará a su destino exactamente al comienzo del intervalo $t = m$, $(m \leq \overline{T})$.

viii) dado que el flujo se propaga avanzando un arco por intervalo, su velocidad (en km/hr) dependerá de la duración que se defina para los intervalos discretos de tiempo. A medida que ésta disminuya la velocidad aumentará y viceversa.

---

[4] Estamos interesados en analizar las características de la evolución y progresión de los flujos a través de la red y no en la modelación de la elección de ruta, por lo tanto, es suficiente para nuestro análisis con suponer una sola ruta para w.

De acuerdo con las carateristicas descritas, la ecuación (1) no es tan general como aparece a primera vista e implica una descripción bastante especial y poco realista de la propagación de los flujos a través de la red.

2.4 Modelos con Variable Tiempo Continua

Consideremos ahora las ecuaciones (2), (8), (9) y (10), que se aplican cuando se supone una representación en tiempo continuo. Esta representación puede considerarse como el límite de la representación en tiempo discreto, cuando la duración de los intervalos tiende a cero y el número de ellos tiende a infinito. En este caso, los flujos obtenidos presentan las siguientes características:

i) como consecuencia de la aplicación de la ecuación (3), los flujos $u_a(t)$, que entran en el instante t, son de inmediato agregados a los vehículos que se encuentran dentro del arco, $f_a(t)$.

ii) dado que la cantidad de vehículos que se encuentra en el arco afecta a la cantidad de vehículos $g_a[f_a(t)]$, que salen del arco en el mismo instante t, algunos de los vehículos experimentarán una velocidad de propagación infinita, alcanzando su destino n en el mismo instante en que entran al primer arco conectado al centroide k. Esta propagación instantánea sucede debido a que una vez que los flujos entran en un arco son inmediatamente distribuidos a largo de el.

iii) dadas las características planteadas en los puntos anteriores, no se cumple la regla FIFO en el procesamiento de los flujos dentro de los arcos.

2.4 Formulaciones Alternativas de la Dinámica de Flujos

En esta sección se proponen modificaciones a la formulación de las ecuaciones dinámicas analizadas en las secciones anteriores, a fin de obtener representaciones más realistas de las características de propagación de flujos a través de la red.

Las ecuaciones (1) y (2) presentan la ventaja de mantener el arco como el elemento básico operacional, sin embargo, su formulación debe ser modificada para eliminar las inconsistencias y limitaciones de la representación de flujos dinámicos que generan. Un problema importante que ellas presentan es que no incluyen una consideración explícita de la velocidad de propagación de los flujos al interior de cada arco (o equivalentemente, del tiempo de viaje a través de ste), la que sin embargo, se encuentra implícita en la formulación de la función de egreso $g_a[f_a(t)]$.

Un problema básico de la formulación de la ecuación (2) se deriva de la definición de la función de egreso g_a, dependiente del número de vehículos que se encuentran dentro del arco en ese mismo instante t. Ello es equivalente a suponer que la congestión que efecta a un vehículo y por lo tanto sus condiciones de operación sobre el arco (velocidad y tiempo de viaje) dependen del número de vehículos que se encuentran detrás (y no delante) de él.

A fin de evitar el problema descrito, supondremos que el tiempo de viaje para atravesar un arco y por lo tanto la velocidad de operación promedio de un vehículo sobre el arco, depende, o es función, del número de vehículos que se encuentran dentro del arco en el instante t^0 en que el vehículo ingresa a éste (por lo tanto, delante de él). Por lo tanto, en el instante t^0 es posible conocer el tiempo de viaje sobre el arco, $\tau_a(t^0)$, correspondiente al flujo $u_a(t^0)$, que ingresa al arco en ese instante; éste es determinado por la velocidad promedio correspondiente que será función de la densidad de tráfico, $d_a(t^0)$, que el arco a presenta en el instante de entrada t_0. Por lo tanto, en el instante que el flujo $u_a(t)$ ingresa al arco, podemos calcular el instante en que saldrá de él, $t^0 + \tau_a(t^0)$.

Es importante recordar que una limitación del enfoque de modelación adoptado, usando el arco como elemento básico operacional, es que no es posible hacer diferencias entre las condiciones de operación en distintos puntos al interior de un arco; en consecuencia, debemos adoptar los valores promedios correspondientes a la velocidad, densidad, etc. Sin embargo tales valores variarán continuamente en el tiempo.

La definición de los arcos de una red deberá ser, por lo tanto, realizada cuidadosamente, teniendo presente la limitación señalada; una manera de reducir sus efectos es definir arcos tan cortos como sea posible (usando nodos auxiliares intermedios donde sea necesario), con el fin de representar características de operación homogéneas al interior de cada arco. Ello puede producir un incremento importante en el número de variables a considerar, sin embargo, las decisiones de ruteo y las condiciones de conservación serán triviales para tales nodos auxiliares, reduciendo el impacto computacional de su introducción.

Usaremos por lo tanto, la misma expresión de la ecuación (2), cambiando sin embargo la definición de la función de egreso, g_a, de la siguiente forma:

$$\frac{df_a(t)}{dt} = u_a(t) - g_a(t, t^0), \qquad a \in \mathcal{A}, \quad t \in [0, T], \tag{11}$$

$$g_a(t, t^0) = g_a[f_a(t - \tau_a(t^0))] \tag{12}$$

Es importante notar que si $f_a(0) = 0$, entonces $g_a(t) = 0, \forall t \leq \tau_a(t^0)$; con a definición de g_a dada en (12), $u_a(t^0)$ no tendrá ninguna influencia sobre la tasa de egreso, g_a, hasta el instante $t^0 + \tau_a(t^0)$. Nótese que esta formulación es consistente con el supuesto de que las condiciones de operación de cada vehículo dependen de la cantidad de vehículos que se enuentran delante y no detrás de él. En una formulación más completa, que no abordaremos por el momento, se podría suponer que g_a es función de los flujos que en el instante t^0 se encuentran en el interior de cada uno de los arcos que convergen al nodo final (o de egreso) del arco a; con ello se podría considerar la congestión producida en el nodo de salida debido a la interacción entre flujos que comparten una intersección común. Usando las ecuaciones (11) y (12) y la definición de la función g_a obtenemos:

$$\forall t \leq 0: \quad u_a(t) = 0, \quad f_a(t) = f_a(0), \quad g_a(t) = g_a[0], \tag{13}$$

$$\forall 0 < t \leq \tau_a(t^0): \quad f_a(t) = \int_0^t \dot{f}_a(t)dt + f_a(0)$$

$$= \int_0^t u_a(t) - g_a(t)dt + f_a(0), \tag{14}$$

$$g_a(t) = g_a[f_a(0)], \tag{15}$$

$$\forall \tau_a(t^0) < t \leq T: \quad f_a(t) = f_a[\tau_a(t^0)] + \int_{\tau_a(t^0)}^t [u_a(t) - g_a(t)]dt, \tag{16}$$

$$g_a(t) = g_a[f_a(t - \tau_a(t^0))], \tag{17}$$

además, supondremos que $\tau_a(t) = \tau_a[d_a(t)]$, donde $d_a(t)$ es la densidad de tráfico promedio en el arco a en el instante t. Por lo tanto, en el instante t es posible conocer la velocidad promedio de operación, $v_a(t) = l_a/\tau_a(t)$, que experimentará un vehículo que ingresa al arco en ese instante.

Para obtener el tiempo de viaje sobre un arco se puede usar una función de la forma:

$$\tau_a(t) = t_a^0 \left[1 + b\left(\frac{d_a(t)}{\overline{d}_a}\right)^n\right] \tag{18}$$

donde t_a^0 es el tiempo de viaje bajo condiciones de flujo libre, $\overline{d}_a$ es la densidad de tráfico a capacidad y b, n son parámetros de calibración.

En principio, es posible usar diferentes especificaciones de la función de egreso dependiendo de las características de progresión de flujos que se deseen obtener; algunos ejemplos son los siguientes:

$$g_a(t) \propto v_a[d_a(t - \tau_a(t^0))]d_a(t - \tau_a(t^0)), \qquad t^0 = t - \tau_a(t^0), \tag{19}$$

$$g_a(t) \propto \min\{f_a(t - \tau_a(t^0)), f_a(t)\}, \qquad t^0 = t - \tau_a(t^0), \tag{20}$$

$$g_a(t) \propto u_a(t - \tau_a(t^0)), \qquad t^0 = t - \tau_a(t^0), \tag{21}$$

La primera ecuación (19), se basa en la relación fundamental de tránsito (Drew, 1965). Dadas las expresiones (19) a (21) para g_a, si $u_a(t^0)$ es el flujo que ingresa al arco a en t^0, en ese mismo instante es posible calcular la velocidad promedio $v_a(t^0)$, el tiempo de viaje sobre el arco $\tau_a(t^0)$, relevante para dicho flujo y la tasa de salida en el instante $t^0 + \tau_a(t^0)$[5]. Es importante hacer notar, que la expresión específica de las funciones de egreso debe definirse de tal forma, que se satisfagan condiciones adecuadas de conservación de flujos, al interior de cada arco, entre los flujos que entran y salen de él. En tal sentido, bajo ciertas condiciones de monotonicidad en el comportamiento de los flujos (ver condiciones FIFO en los proximos párrafos) debiera cumplirse una condición general del tipo:

$$\int_{t_i^0}^{t_f^0} u_a(t)dt = \int_{t_i^0+\tau_a(t_i^0)}^{t_f^0+\tau_a(t_f^0)} g_a(t)dt, \tag{22}$$

[5] En estos momentos estamos realizando experimentos con los tres tipos de formulaciones planteadas a fin de estudiar las características de propagación de flujos que producen.

para valores arbitrarios de t_i^0 y t_f^0 con $t_i^0 < t_f^0$.

Sobre la base de las ecuaciones dinámicas y de conservación de flujos, analizadas en las secciones anteriores, es posible plantear un conjunto de restricciones que establecen las condiciones que debe cumplir cualquier solución factible de un modelo de asignación dinámica. Sin embargo, algunos autores (Carey, 1992) han planteado que, en su progresión a través de la red, los flujos debieran ser procesados de acuerdo con una disciplina FIFO; es decir un vehículo que entra a un arco primero que otro, debiera salir de él también en primer lugar. Esto es equivalente a decir que no se permiten adelantamientos, lo que parece razonable como regla general si los niveles de congestión son elevados, ya que en tal caso las maniobras de adelantamiento se tornan prácticamente imposibles; de hecho, mientras mayor sea el nivel de congestión más ajustado a la realidad es un tratamiento FIFO de los flujos.

Para que la condición FIFO en el procesamiento de los flujos se cumpla, es necesario que los tiempos de viaje sobre el arco a cumplan la condición:

$$\forall t_i^0 < t_i^f, \quad t_i^0, t_i^f \in [0,T] \quad , t_i^0 + \tau_a(t_i^0) < t_f^0 + \tau_a(t_f^0), \tag{23}$$

que se puede escribir como:

$$(t_f^0 - t_i^0) > (\tau_a(t_i^0) - \tau_a(t_f^0)), \tag{24}$$

dado que estamos usando una formulación en tiempo contínuo, podemos derivar la misma condición cuando t_f^0 tiende a t_i^0. Si definimos $\widetilde{D} = (t_f^0 - t_i^0)$, dividimos ambos miembros de (24) por $\widetilde{D}$ y multiplicamos todo por -1, obtenemos:

$$-\frac{(\tau_a(t_i^0 + \widetilde{D}) - \tau_a(t_i^0))}{\widetilde{D}} > -1, \tag{25}$$

que, cuando $\widetilde{D}$ tiende a cero, se transforma en la condición: $d\tau_a(t)/dt > -1$. Es importante notar que la condición (22) es estrictamente válida solo si se cumple esta última condición para la derivada de τ_a, es decir, si se respeta el comportamiento FIFO en todo momento. De lo contrario, (22) puede no cumplirse para ciertos valores de t_i^0 y t_f^0[6].

Sin embargo, es discutible que la condición FIFO sea razonable para condiciones de baja congestión y obviamente no lo es en condiciones de flujo libre. Por lo

[6] Por ejemplo, si en un intervalo $[t_i^0, t_f^0]$ entran tres vehículos a un arco, el primero en t_i^0, el segundo en $t_m^0(> t_i^0)$ y el tercero en $t_f^0(> t_m^0)$, pero el segundo de ellos sobrepasa al primero en su viaje sobre el arco analizado, tendremos que en el intervalo $[t_i^0, t_f^0]$ entran tres vehículos al arco, pero en el intervalo $[t_i^0 + \tau(t_i^0), t_f^0 + \tau(t_f^0)]$ saldrán solo dos vehículos del arco, lo que viola la condición (22).

ACTAS DEL VI CONGRESO CHILENO DE INGENIERIA DE TRANSPORTE, 1993
SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA DE TRANSPORTE

tanto una correcta representación del fenómeno requeriría una formulación de la función de egreso que pudiera adaptarse a las distintas condiciones que se dan en la práctica dependiendo del nivel de congestión.

3. COSTOS DE OPERACION EN EL TIEMPO

3.1 Costos Instantáneos de Operación por Unidad de Tiempo

Dado que en un modelo dinámico todas las variables de operación dependen del tiempo, la forma mas natural de considerar los costos de los vehículos sobre la red, sería mediante la definición de un costo promedio instantáneo de operación, por unidad de tiempo sobre cada arco, $c_a(t)$, que representa el valor económico de los factores consumidos, por unidad de tiempo, por un vehículo que viaja sobre dicho arco. Podríamos entonces suponer que c_a es una función no-negativa, continua, convexa y diferenciable, dependiente del número de vehículos que se encuentren en el arco en ese instante y podemos escribir: $C_a[f_a(t)] = c_a[f_a(t)]f_a(t)$. Entonces, la tasa de costo total sobre la red en el instante t será igual a $\sum_a C_a(t)$. Por lo tanto, el costo total de operación sobre la red durante el período de tiempo $[0, T]$ puede expresarse como:

$$Z = \sum_a \int_0^T C_a[f_a(t)]dt, \tag{26}$$

$C_a[f_a(t)]$ es el costo total, experimentado por el conjunto de los vehículos que se encuentran en el arco a en el instante t y por lo tanto, corresponde al consumo total de recursos sobre el arco en ese instante. Es importante hacer notar que, a diferencia de la definición usada por otros autores (Ran, Boyce y LeBlanc, 1993), el costo unitario instantáneo sobre un arco a, $c_a[f_a(t)]$, representa una "tasa" instantánea de costo, que corresponde a los recursos gastados por un usuario del arco en el instante t y no al costo de recorrer el arco completo en dicho instante.

En los casos en que el único recurso relevante es el tiempo gastado por los usuarios de los vehículos, tendremos que el costo total sobre un arco a, en el instante t, puede expresarse como $kf_a(t)dt$, con k igual al valor unitario del tiempo. El costo total sobre la red durante el período $[0, T]$ será en tal caso igual a:

$$Z = \sum_a k \int_0^T f_a(t)dt, \tag{27}$$

El costo marginal sobre el arco a, en el instante t, será igual a la variación experimentada en el costo total correspondiente, cuando la cantidad de vehículos que se encuentran en el arco, en el instante t, cambia en una unidad y puede por lo tanto expresarse como:

$$C'_a(t) = \frac{dC_a(t)}{df_a(t)}, \qquad \forall a \in \mathcal{A}, \quad t \in [0, T], \tag{28}$$

ACTAS DEL VI CONGRESO CHILENO DE INGENIERIA DE TRANSPORTE, 1993
SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA DE TRANSPORTE

y en el caso en que el único costo relevante sea el tiempo valdrá: $C'_a(t) = kdt$.

Por lo tanto, el concepto de costo usado en el caso dinámico se diferencia en forma importante del usado en los MEE. En estos últimos, el costo no depende del tiempo, dado que sólo se consideran condiciones estacionarias, con valores constantes de flujo para cada arco, válidos para todo el período de análisis; en tales condiciones, los costos de operación unitarios (ya sean medios o marginales), sobre un arco a determinado, son también constantes durante el período y se expresan como costo de atravesar completamente el arco a o la ruta p en condiciones de operación estacionarias para cada arco.

Sin embargo, en el caso dinámico las condiciones de operación (densidades de tráfico en el arco, velocidades y costos) varían para cada instante t y por lo tanto, el costo que un vehículo experimenta al atravesar un arco a, $\widetilde{c}_a$, será igual a la integral de los costos instantáneos, $c_a[f_a(t)]$, experimentados durante el lapso de tiempo t_a que dura el viaje sobre dicho arco (igual a la diferencia entre el momento t^s_a, en que el vehículo atraviesa el nodo de salida, menos el momento t^e_a, en que atravesó el nodo de entrada):

$$\widetilde{c}_a(t^e_a) = \int_{t^e_a}^{t^s_a} c_a[f_a(t)]dt, \qquad \forall a \in \mathcal{A}. \tag{29}$$

Por lo tanto, el costo total percibido por un vehículo, como consecuencia de atravesar totalmente una ruta $p = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_1 = (k, i)$, $a_n = (j, n)$, que une el par $w = (k, n)$, partiendo desde el origen en el instante t^*, vendrá dado por:

$$\overline{c}_p(t^*) = \sum_{a_1}^{a_n} \int_{t^e_a}^{t^s_a} c_a[f_a(t)]dt, \qquad p \in P_w, \tag{30}$$

en que $t^* = t^e_{a_1}$ y $t^s_{a_i} = t^e_{a_{(i+1)}}$, $\forall i \in [1, n-1]$. Nótese que el valor de $\overline{c}_p$ depende del momento de partida desde el nodo origen del arco a_1, $t^e_{a_1}$, que se supone determina el instante t en que se pasará por cada nodo de la ruta p. En el caso estacionario, el momento de partida es irrelevante, dado que las condiciones de operación sobre la red son constantes durante todo el período de análisis. En forma similar, se puede definir el costo marginal que provoca un vehículo adicional que recorre la ruta $p = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_1 = (k, i)$, $a_n = (j, n)$, que une el par $w = (k, n)$, partiendo desde el origen en el instante t^*:

$$w_p(t^*) = \sum_{a_1}^{a_n} \int_{t^e_a}^{t^s_a} [C'_a(t)]dt, \qquad p \in P_w. \tag{31}$$

También es posible definir un **costo instantáneo** sobre la ruta p, que considere la suma de los costos que **en ese instante** t se estén experimentando a través de todos los arcos de la ruta; para ello debemos definir el costo por unidad de distancia, sobre cada arco de la ruta p, en el instante t, que será igual al costo por unidad de tiempo dividido por la velocidad del flujo en el arco, $c_a(t)/v_a(t)$; por lo tanto, el costo instantáneo de atravesar el arco a en t, será igual a $c_a^i(t) = [c_a(t)/v_a(t)]l_a$ en que l_a es el largo del arco a. Entonces, el costo instantáneo de atravesar la ruta p en t, vendrá dado por:

$$\widehat{c}_p(t) = \sum_{a_1}^{a_n} [c_a(t)/v_a(t)]l_a, \tag{32}$$

El concepto de costo instantáneo sobre un arco o una ruta, ha sido usado por varios autores (Friesz, et al. 1989; Wie, Friesz y Tobin, 1990; Ran, Boyce y LeBlanc, 1993), sin embargo, su definición ha adolecido de la falta de una descripción analítica precisa, como la dada en (32) para $\widehat{c}_p(t)$ en función de $c_a^i(t)$ y $c_a(t)$, que relacione las dimensiones espaciales y temporales involucradas.

Los autores citados en el párrafo anterior, definen un costo instantáneo de viaje (en t) sobre cada arco a, $c_a^i(t)$, que representa "el costo de atravesar el arco si las condiciones de operación permanecen constantes, iguales a las del instante t". La diferencia entre este concepto de costo unitario de operación sobre un arco y el representado por $c_a(t)$, debiera quedar clara comparando (30) y (32). La definición de $c_a^i(t)$ permite expresar fácilmente el costo instantáneo sobre una ruta p, como:

$$\widehat{c}_p(t) = \sum_{a_1}^{a_n} c_a^i[f_a(t), u_a(t), g_a(t)], \tag{33}$$

Si usamos el concepto de costo instantáneo, la expresión de los costos totales de operación del sistema, en el intervalo $[0, T]$, toma la siguiente forma:

$$Z^i = \int_0^T \sum_a c_a^i(t) g_a(t) dt, \tag{34}$$

que tiene un valor distinto que el expresado por la ecuación (26) usando la **tasa instantánea de costo** $C_a(t)$. En (34), el costo total Z^i se calcula asignándole a cada vehículo el costo instantáneo de atravesar el arco en el instante de salida y no el costo real, de acuerdo con las condiciones continuamente cambiantes que éste experimentó durante el viaje a través del arco; esto último es lo que se hace en (26) para calcular Z. Obviamente la diferencia entre Z y Z^i será mayor mientras más largos sean los arcos considerados.

El costo real percibido por un usuario que transita a través de una ruta p será $\overline{c}_p(t^*)$ y no $\widehat{c}_p(t)$, dado que el viaje por la ruta transcurrirá a través del tiempo y no instantáneamente en t; este último corresponde a las condiciones de operación, que serían transmitidas a los usuarios por un sistema que estuviera permanentemente informando el estado de la ruta, observado en un momento determinado. Nótese que, si las condiciones de operación fueran estacionarias, constantes $\forall t \in [0, T]$, entonces se cumpliría que $\bar{c}_p(t^*) = \hat{c}_p(t)$ e iguales al costo correspondiente en un MEE.

3.2 Costos Dinámicos Sintéticos de Operación

Una alternativa a la formulación de costos "instantáneos", analizados en la sección anterior, es la definición de lo que en adelante denominaremos costos "sintéticos" de operación sobre un arco. Podemos por ejemplo suponer, que el costo de viajar a través del arco a, es función del número de vehículos que se encuentran sobre el arco en el instante t^0, en que el vehículo entra en el arco, lo que es consistente con la definición propuesta para g_a y τ_a en la sección 2.4. Entonces, podemos definir una función $\widehat{c}_a[f_a(t^0)]$, que define el costo de operación promedio que será experimentado por un vehículo que recorre el arco a, partiendo del nodo entrada en el instante t^0, y que recibe el nombre de costo sintético del arco.

En aquellos casos en que el único costo económico relevante es el tiempo de viaje, entonces tendremos $\widehat{c}_a[f_a(t^0)] = \tau_a(t^0)$, que puede obtenerse usando una ecuación como la definida en (18). En la práctica será necesario realizar un estudio econométrico adecuado para calibrar los parámetros de funciones de dicho tipo, que permitan definir costos sintéticos para todos los arcos de la red. Ahora podemos expresar el costo total de operación que experimentarán sobre el arco a, los vehículos que ingresan a él en el instante t^0 como, $\hat{C}_a(t^0) = \widehat{c}_a[f_a(t^0)]u_a(t^0)$, y por lo tanto, el costo total de operación sobre la red para el período $[0, T]$ puede ser escrito como:

$$Z = \sum_a \int_0^T \widehat{c}_a(t^0)u_a(t^0)dt^0, \tag{35}$$

y cuando el único factor relevante es el tiempo de viaje:

$$Z = \sum_a \int_0^T \tau_a(t^0)u_a(t^0)dt^0, \tag{36}$$

Usando el concepto de "costo sintético", $\widehat{c}_a[f_a(t^0)]$, se puede expresar el costo experimentado por un vehículo que viaja a través de la ruta p que une los nodos k y n (correspondiente al costo promedio sobre el arco) como:

$$\widehat{cs}_p(t^*) = \sum_{i=1}^{m} \widehat{c}_{a_i}(t_i^0), \quad a_i \in p, \quad p \in P_w, w = (k, n). \tag{37}$$

con $t_1^0 = t^*$, y $t_j^0 = \sum_1^{j-1} \tau_{a_i}(t_i^0)$. El tiempo total gastado por un vehículo en viajar sobre la ruta será:

$$\tau_p(t^*) = (t^{**} - t^*) = \sum_1^m \tau_{a_i}(t_i^0), \tag{38}$$

donde t^{**} representa el instante en el cual el vehículo alcanza el destino n.

ACTAS DEL VI CONGRESO CHILENO DE INGENIERIA DE TRANSPORTE, 1993
SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA DE TRANSPORTE

Es posible también expresar el costo total de operación sobre el arco a en t, como la suma de los costos sintéticos experimentados por los vehículos que abandonan el arco en el instante t, $\hat{C}_a(t^0) = \widehat{c}_a[f_a(t^0)]g_a[t^0 + \tau_a(t^0)]$; el costo total de operación sobre la red se puede expresar entonces como:

$$Z = \sum_a \int_0^T \widehat{c}_a(t^0) g_a[t^0 + \tau_a(t^0)] dt^0, \tag{39}$$

En donde, de acuerdo con la definición de la función $g_a(t)$ dada en (12):

$$g_a[t^0 + \tau_a(t^0)] = g_a[f_a(t^0))], \tag{40}$$

4. PRINCIPIOS DINAMICOS DE ASIGNACION DE FLUJOS

Tal como en el caso de los MEE, es lógico suponer también en el caso dinámico, que un usuario racional de la red de transporte tratará de minimizar el costo total de viajar entre el par w correspondiente. Por lo tanto, sus decisiones de elección de ruta estarán guiadas por dicho objetivo.

Si suponemos un sistema de transporte representado por la red $G(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, que no se encuentre excesivamente congestionado y cuyo uso sea repetitivo (ej. viajes al trabajo en el período punta mañana, que se repiten diariamente con las mismas características), podemos asumir que es posible para los usuarios obtener, a través del uso diario, información del costo de viaje relevante $\overline{c}_p(t^*)$, en que t^* corresponde a la hora de partida del viaje, que se supone es todos los días la misma.

El viajero pasará todos los días a la misma hora por los distintos puntos de su recorrido, encontrando más o menos las mismas condiciones de operación, las que variarán antes y después de su pasada, como podrá constatarlo aquellos días que modifique su hora de partida desde el origen. En tales condiciones, podrá elegir la ruta que minimiza el costo de viaje $\overline{c}_p(t^*)$, dada una hora fija de partida t^*. En este caso podemos decir que el sistema se encontrará en "equilibrio dinámico", cuando:

> "para todos los usuarios que salen a la misma hora t, desde un centroide origen dado y se dirigen al mismo centroide destino, el costo de viaje $\overline{c}_p(t)$, experimentado al atravesar todas las rutas con flujo positivo, es el mismo e inferior al que se experimentaría utilizando una ruta que no posee flujo"

El principio recién enunciado, que en adelante identificaremos como EDU, extiende al caso dinámico el concepto de equilibrio estático, denominado óptimo de usuarios, formulado por Wardrop, (1952).

Sin embargo, la situación es diferente si el usuario no puede adquirir información confiable del costo relevante de viaje sobre la red, ya sea debido a su desconocimiento del sistema, o a que las condiciones de operación sobre ésta son inestables, como consecuencia del elevado grado de congestión. En tales casos, el usuario no podrá tomar decisiones racionales por si solo y una solución al problema de elección de ruta podría basarse en el uso ya sea de sistemas de información o de guía centralizada de viaje.

El uso de sistemas de información para mejorar las decisiones de elección de rutas sobre una red, bajo condiciones dinámicas de operación, ha comenzado a ser estudiado durante el último tiempo (Mahmassani y Jayakrishnan, 1991; Caplice y Mahmassani, 1992); sin embargo, todavía no se posee un conocimiento cabal del resultado de tales sistemas, ni de las posibles estrategias óptimas de información.

Un problema de los sistemas estudiados, es que entregan información de los costos instantáneos de operación sobre la red en un momento del tiempo, $\widehat{c}_p(t)$, y no del costo real de operación que se experimentará como consecuencia de las decisiones tomadas por todos los usuarios de la red, sobre la base de la información recibida. Una de las consecuencias lógicas del uso de tales sistemas de información es que, el resultado obtenido depende del número de usuarios que tienen acceso a él y de su sensibilidad de respuesta; así, se obtiene un mejor resultado para el conjunto si sólo un porcentaje de los usuarios de la red recibe información del estado del sistema, que si ésta es entregada a todos.

Friesz, et al. (1989), y Wie, Friesz y Tobin, (1990), definen un principio de comportamiento que denominan "óptimo dinámico de usuarios" (DUO), que tiene la siguiente expresión:

> Se dice que un conjunto factible de flujos dinámicos, $\{f(t)\}$, es "óptimo dinámico de usuarios" (DUO), si para cada par $O-D$ en cada instante de tiempo $t \in [0,T]$, el **costo instantáneo** de viaje, $\widehat{c}_p(t)$, sobre todas las rutas p que son usadas es idéntico, e igual al mínimo costo instantáneo de viaje, entre todas las rutas alternativas que sirven para viajar entre el mismo par $O-D$.

Es importante observar, que el principio de asignación de tráfico descrito, no requiere que sean iguales los costos "realmente experimentados" por los usuarios que viajan entre cada par $O-D$, partiendo en el mismo instante t^*, $\overline{c}_p(t^*)$, definido en (13). DUO sólo requiere que sean iguales los valores de $\widehat{c}_p(t)$, definidos en (15).

Por su parte, Ran, Boyce y LeBlanc, (1993), dan la siguiente definición alternativa que denominaremos DUO':

> Se dice que un conjunto factible de flujos dinámicos, $\{f(t)\}$, es "óptimo dinámico de usuarios" (DUO'), si para cada par $O-D$ en cada instante de tiempo $t \in [0,T]$, **para cada nodo de la red**, el **costo instantáneo** de viaje, $\widehat{c}_p(t)$, sobre todas las rutas p usadas que parten de dicho nodo, es idéntico e igual al mínimo costo instantáneo de viaje, entre todas las rutas alternativas que sirven para viajar entre el mismo par $O-D$.

A pesar de lo que argumentan Ran, Boyce y LeBlanc, (1991), en nuestra opinión ambos principios son equivalentes y debieran conducir a la misma solución de flujo; las diferencias en las expresiones por ellos obtenidas, para el costo instantáneo sobre las rutas, se deben a errores de interpretación en los resultados entregados por los modelos.

Si el objetivo es minimizar el costo total de operación del sistema durante el período de análisis $[0, T]$, lo que interesa es que los costos marginales de operación entre cada par w, y para cada instante de partida t^*, $w_p(t^*)$, sean iguales sobre todas las rutas $p \in P_w$ usadas y mayores a los que se experimentarían sobre las no usadas. Sin embargo, para obtener esto sería necesario utilizar un sistema de guía centralizada que dirigiera a cada vehículo en su paso a través de la red, desde que ingresa a ella en el instante t^*. Esto plantea una serie de problemas prácticos de transmisión de la información pertinente.

7.CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente trabajo hemos analizado los elementos fundamentales de un modelo de asignación dinámica a redes de transporte. El desarrollo de tales modelos está empezando a experimentar un fuerte auge, similar al que se observó durante los setenta y ochenta, respecto del desarrollo de modelos de asignación de equilibrio estático. Sin embargo, queda aún mucho que avanzar en la formulación de modelos más completos y realistas respecto del comportamiento de la realidad que se intenta describir.

Hemos visto que las ecuaciones dinámicas que han sido usadas para explicar la evolución en el tiempo de las variables de estado, y su relación con las variables de control, son todavía demasiado simples y no reconocen características básicas de la dinámica de los flujos en términos de sus relaciones espacio-temporales. Algunas de estas relaciones, que fueron propuestas en la sección 2, incluyen explícitamente variables como la velocidad del flujo y la densidad espacial del tráfico, que no han sido usadas en los modelos existentes. Estas relaciones pueden introducirse para mejorar la formulación de las ecuaciones dinámicas utilizadas.

La formulación consistente de las funciones de costos a utilizar tampoco ha recibido suficiente atención. Ha existido más bien la tendencia a extrapolar el concepto de costo de operación sobre un arco, usado en los MEE, definiendo para el caso dinámico un costo instantáneo de recorrer el arco en t, que se asigna a los viajeros en el momento que ingresan o abandonan el arco. Este "costo instantáneo", no resulta muy natural para el caso dinámico y hemos mostrado como pueden usarse otros conceptos más adecuados, relacionados con el costo experimentado por los usuarios en el instante t. Es necesario también avanzar en el estudio de las formas específicas y propiedades matemáticas que las funciones de costo presentan.

También es necesario desarrollar más la formulación de principios de comportamiento para los usuarios individuales y el sistema en su conjunto; en especial, es importante relacionar estos principios con distintas estrategias de información a los usuarios y con la posible operación de sistemas centralizados de guía.

AGRADECIMIENTOS El desarrollo del proyecto de investigación en el tema de: Asignación dinámica de flujos a redes de transsporte, al cual corresponden los resultados presentados en ésta publicación, fué financiado por FONDECYT y la Pontificia Universidad Católica de Chile.

BIBLIOGRAFIA

ABADULAAL, M. y LEBLANC, L.J. (1979) Methods for combining modal split and equilibrium assignment models. **Transportation Science 13**, 292–214.

AASHTIANY, H.Z. y MAGNANTY, T.L.. (1981) Equilibrium on a congested transportation network. **SIAM Journal, Algebraic and Discrete Methods 2**, 213–216.

BECKMANN, M.J., MCGUIRE, C.B. y WINSTEIN, C.B. (1956) **Studies in the economics of transportation**. Yale University Press, New Haven.

CAPLICE, Ch., y MAHMAMSSANI, H.S., (1992) Aspects of commuting behaviour: preferred arrival time, use of information and switching propensity. **Transp. Res., 26A**, No. 5, 409-418.

CAREY, M. (1992) Nonconvexity of the dynamic traffic assignment problem. **Transp. Res., 26B**, No. 2, 127-133.

CAREY, M. (1987) Optimal time-varying flows on congested networks. **Op. Res. 35**, No. 1, 58-69.

CAREY, M. (1986) A constraint qualification for a dynamic traffic assignment model. (technical note) **Transp. Sc. 20**, No.1, 55-58

DAFERMOS, S.C. (1982) The general multimodal network equilibrium model with elastic demand. **Networks 12**, 57–72.

D'ANS, G.C. y GAZIS, D.C., (1976) Optimal control of oversatuarted store and forward transportation networks. **Transp. Sc. 10**, pp. 1-19.

DREW, D.R., Deterministic aspects of freeway operation and control. **Freeway characteristics operation and accidents**. Highway Research Record, 99, 48–58, Washington D.C., 1965.

DRISSI-KAÏTOUNI, O. y HAMEDA-BENCHEKROUN, A. (1989) Ab dynamic traffic assignment model and solution algorithm. Centre de recherche sur les transports, Publicación # 649, Montreal, Canada.

FERNANDEZ, J.E. y FRIESZ, T.L. (1983) Equilibrium predictions in transportation markets: the state of the art. **Transp. Res. 17B**, No. 2, 155-172.

FLORIAN, M. y NGUYEN, S. (1978) A combined trip distribution modal split and assignment model. **Transp. Res. 12**, 241–246.