

# **OPTIMIZACION DE FRECUENCIAS EN REDES DE TRANSPORTE PUBLICO CONGESTIONADAS: FORMULACION MATEMATICA Y ALGORITMO DE SOLUCION**

**Joaquín de Cea, J. Enrique Fernández y Mariela Barquín**

Departamento de Ingeniería de Transporte  
Pontificia Universidad Católica de Chile  
Casilla 306, Santiago 22, Chile

## **RESUMEN**

En este trabajo se presenta un problema de programación binivel para determinar frecuencias óptimas en redes de transporte público. En el nivel inferior se supone que los usuarios de transporte público y transporte privado, sobre redes modales congestionadas, eligen sus rutas de forma de maximizar su utilidad individual. En el nivel superior se obtienen las frecuencias de los servicios de transporte público que minimizan una medida del costo social (o maximizan una medida del beneficio social). El problema planteado es resuelto mediante el algoritmo de Hooke-Jeeves.

## 1. INTRODUCCION

El problema de Diseño de Redes de Transporte Público consiste, en términos generales, en la determinación de las rutas y frecuencias óptimas de los servicios de transporte público que circulan sobre la red para satisfacer las demandas de viajes.

La optimalidad normalmente en este caso está relacionada con la maximización del beneficio social. Por una parte, los usuarios desean un mejor servicio sin aumento de los costos de transporte, y por otra, los operadores desean disminuir los costos de operación sin reducir el número de pasajeros transportados.

Distintas funciones objetivo, distintas hipótesis respecto a la demanda (fija o variable) y a la interacción entre transporte privado y transporte público, y diferentes alcances en la definición del problema (determinación de trazados y frecuencias óptimas o determinación de frecuencias óptimas para un conjunto predefinido de recorridos) dan origen a distintas formulaciones del problema de diseño de redes de transporte público.

El presente trabajo constituye la primera etapa de una investigación más larga y se centra en el problema de la determinación de las frecuencias óptimas de los servicios de transporte público, considerando que los trazados de dichos servicios son conocidos.

El problema a tratar pertenece al tipo de problemas de programación multinivel, en los que cada nivel está representado por agentes que toman decisiones en forma jerárquica. En este caso existen dos niveles: en el nivel inferior se sitúan los usuarios del sistema de transporte, que intentan maximizar sus utilidades individuales para cada valor del vector de frecuencias de los servicios que enfrentan; y el nivel superior es ocupado por una autoridad central, que determina el valor del vector de frecuencias que minimiza el costo social considerando el comportamiento de los usuarios del sistema. En el marco de un sistema con operadores privados, como es el caso de la ciudad de Santiago, la intervención de la autoridad central (Ministerio de Transportes, por ejemplo) debe ser entendida como la determinación de frecuencias óptimas, previo a un proceso de licitación de recorridos. Esto da al tema que se trata una gran relevancia desde el punto de vista de la investigación, en tanto se vislumbra, por otro lado, un potencial muy importante en términos de la aplicación práctica de los resultados que se obtengan.

En este trabajo se hace, en primer lugar, una descripción y planteamiento del problema a solucionar. A continuación, se formula matemáticamente dicho problema y luego se describe el método de solución que se ha implementado en este trabajo. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos para una red ejemplo y se entrega una serie de conclusiones del trabajo y comentarios referentes a investigaciones futuras.

## **2. DEFINICION DEL PROBLEMA**

El problema consiste en determinar las frecuencias óptimas de los servicios de transporte público que se ofrecen sobre una red, de tal manera de satisfacer las demandas origen-destino de viajes y minimizar alguna medida del costo social de operación del sistema.

La función objetivo considerará los costos totales de viaje de los usuarios y los costos totales de operación de los servicios de transporte público ofrecidos, es decir, los costos totales asociados a la operación del sistema, en función de los flujos de equilibrio y de las frecuencias (variables de decisión del problema). Por lo tanto, la función objetivo estará compuesta por dos tipos de funciones: crecientes con las variables de decisión (costos de operación, tiempos de viaje) y uno decreciente con dichas variables (tiempos de espera).

Las restricciones del problema que se consideran son relaciones de continuidad y consistencia de flujos (transporte privado y transporte público), comportamiento espontáneo de los usuarios en la elección de rutas (primer principio de Wardrop) y la no-negatividad de las variables de decisión.

Las redes de transporte privado y público están sujetas al fenómeno de congestión, de tal forma que el costo de viaje de los usuarios del sistema y el costo de operación de las líneas de transporte público aumentan al crecer el número de vehículos que circulan sobre los arcos de la red. Las vías utilizadas por las líneas de transporte público son compartidas por los vehículos de transporte privado, considerándose explícitamente las interacciones entre ambos medios de transporte.

Por otra parte, se considera restricción de capacidad de los vehículos de transporte público, lo cual constituye la principal diferencia con respecto a lo que se ha hecho hasta ahora en el área de Diseño de Redes de Transporte Público. Se supondrá que el fenómeno de la congestión en esta red está concentrado en los paraderos. Ahí, los usuarios de transporte público experimentan tiempos de espera que dependen de la capacidad total del conjunto de líneas considerado para realizar su viaje y del número total de pasajeros que las utilizan.

## **3. FORMULACION DEL PROBLEMA**

### **3.1 Aspectos Generales**

La red de transporte (red vial) está representada por un grafo  $G = (N, A)$ , donde  $N$  es el conjunto de nodos y  $A$  el conjunto de arcos. El primero representa las intersecciones de calles y los centroides de las zonas (localización del origen y destino de los viajes), y el segundo conjunto representa las calles de la ciudad. La red  $G$  sirve como infraestructura para la operación del transporte privado y transporte público.

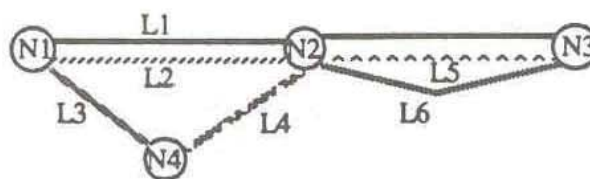


La red de transporte público,  $\bar{G} = (\bar{N}, L)$  consta de un conjunto de nodos  $\bar{N}$ , subconjunto de  $N$ , y un conjunto de líneas de transporte público  $L$ , cada una de las cuales está definida por una secuencia de nodos donde los pasajeros pueden subir o bajar de la línea.

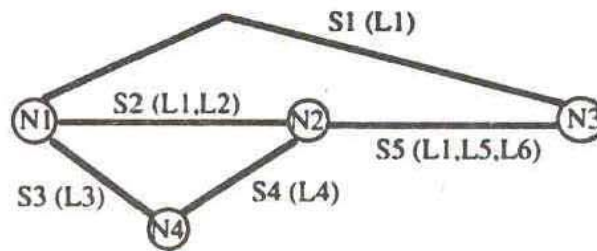
El modelo de asignación de equilibrio en redes de transporte público, utilizado en la formulación, requiere definir una red más compleja en términos de secciones de rutas. Una sección de ruta es una porción de una ruta entre dos nodos de transbordo consecutivos, y tiene asociado un conjunto de líneas igualmente atractivas para los usuarios (ver De Cea y Fernández, 1993).

Dicha red está representada por un grafo  $G' = (\bar{N}, S)$ , donde  $S$  es el conjunto de arcos de la red, compuesto por las secciones de ruta y los arcos de acceso. En esta red puede existir más de un arco (sección de ruta) uniendo un par de nodos dado. El primer arco contiene las líneas "más rápidas" del total de líneas que unen ese par de nodos, y corresponden al conjunto de líneas comunes determinadas mediante el algoritmo de Chriqui. Si existen líneas que no han sido incluidas en este conjunto, se aplica nuevamente el algoritmo y se crea un segundo arco, paralelo al anterior, que contiene el nuevo conjunto de líneas comunes. El proceso continúa hasta que todas las líneas que unen el par de nodos estén asociadas a alguna sección de ruta. A medida que las secciones de ruta que contienen las líneas "más rápidas" se congestionan, comienzan a ser atractivas para los usuarios aquellas secciones de ruta formadas por las líneas "más lentas". Esta suposición, si bien permite separar el problema de asignación del problema de selección de líneas comunes, simplificando el problema de equilibrio en el nivel de los usuarios, constituye una simplificación en términos de formulación del problema de optimización de frecuencias. En rigor, sólo al conocer las frecuencias de las líneas es posible determinar qué servicios exactamente pertenecen al conjunto de "líneas rápidas" y a los conjuntos de líneas "más lentas". En todo caso, el algoritmo de solución propuesto no considera totalmente definida dicha red y, cada vez que se obtiene un vector de frecuencias en el nivel superior, se determinan las líneas que conforman cada una de las secciones de ruta de la red de transporte público. Sólo después de realizado esto se procede a efectuar la asignación bi-modal correspondiente.

En la Figura 3.1 se representa una red ejemplo en términos de las líneas de transporte público. La Figura 3.2 representa la misma red, pero codificada en términos de secciones de ruta.



**FIGURA 3.1 Representación de la red en términos de líneas de tpte. público**



**FIGURA 3.2 Representación de la red en términos de secciones de ruta**

### 3.2. Notación

La notación utilizada en la formulación del modelo es la siguiente:

$W$	:	Conjunto de pares origen-destino O-D.
$w$	:	Elemento del conjunto $W$ , en que $w = (i, j)$ , con $i, j$ centroides.
$P$	:	Conjunto de rutas disponibles para transporte privado en $G$ .
$P_w$	:	Conjunto de rutas disponibles para transporte privado en $G$ , asociado al par origen-destino $w$ .
$p$	:	Índice para designar una ruta de transporte privado.
$h_p$	:	Flujo de transporte privado sobre la ruta $p$ .
$\delta_{ap}$	:	Elemento de la matriz de incidencia arco-ruta para transporte privado: toma el valor 1 si el arco $a$ pertenece a la ruta $p$ y 0 en otros casos.
$f_a$	:	Flujo total de vehículos de transporte privado en el arco $a$ .
$c'_a$	:	Costo de operación promedio de viaje en el arco $a$ para transporte privado.
$c_a$	:	Tiempo de viaje en el arco $a$ para transporte privado.
$C_p$	:	Costo de viaje sobre la ruta $p$ para transporte privado.
$T_w$	:	Número total de viajes entre el par O-D $w$ para usuarios de transporte privado.
$\bar{A}$	:	Conjunto de arcos de la red $G$ utilizados por las líneas de transporte público.
$A'$	:	Conjunto de arcos de la red $G$ que no son usados por transporte público.
$l$	:	Índice para designar una línea de transporte público.
$R$	:	Conjunto de rutas disponibles para usuarios de transporte público.
$r$	:	Índice para designar una ruta en transporte público.
$R_w$	:	Conjunto de rutas en transporte público asociado al par O-D $w$ .
$\tilde{f}_a$	:	Flujo total de pasajeros de transporte público sobre el arco $a$ .
$\tilde{f}_a^l$	:	Flujo de pasajeros que utilizan la línea $l$ de transporte público sobre el arco $a$ .

- $\bar{h}_r$  : Flujo de pasajeros de transporte público sobre la ruta  $r$ .  
 $c_s$  : Costo de viaje para usuarios de transporte público sobre la sección de ruta  $s$ .  
 $C_r$  : Costo de viaje para usuarios de transporte público sobre la ruta  $r$ .  
 $\delta_{ar}$  : Elemento de la matriz de incidencia arco-ruta para transporte público: toma el valor 1 si el arco  $a$  pertenece a la ruta  $r$  y 0 en otros casos.  
 $\delta_{al}$  : Elemento de la matriz arco-línea para transporte público: toma el valor 1 si el arco  $a$  es usado por la línea  $l$  y 0 en otros casos.  
 $\delta_{rs}$  : Elemento de la matriz de incidencia sección de ruta-ruta: toma el valor 1 si la ruta  $r$  pasa por  $s$  y 0 en otros casos.  
 $V_s$  : Flujo de pasajeros en la sección de ruta  $s$ .  
 $v_s^l$  : Flujo de pasajeros en la sección de ruta  $s$  que utilizan la línea  $l$ .  
 $\bar{T}_w$  : Número total de viajes entre el par O-D  $w$  para usuarios de transporte público.  
 $d_l$  : Frecuencia de servicio de la línea  $l$ .  
 $d_a$  : Número total de vehículos de transporte público que usan el arco  $a$ , por unidad de tiempo.  
 $\mu$  : Factor de equivalencia de un vehículo de transporte público.  
 $d_s$  : Frecuencia total en la sección de ruta  $s$ .  
 $\bar{A}_s$  : Conjunto de líneas comunes en la sección de ruta  $s$ .

### 3.3. Supuestos Básicos

La elección de ruta por parte de los usuarios de transporte privado se realiza de acuerdo al primer principio de Wardrop, buscando maximizar sus utilidades individuales (minimizar el costo total de viaje).

Para los usuarios de transporte público, se asume también que eligen aquella ruta que minimiza su costo total de viaje (tiempo de caminata + tarifa + tiempo de espera + tiempo de viaje). Además, se considera que el sistema de transporte público tiene capacidad limitada y, por lo tanto, el costo de viaje aumenta al aumentar el flujo de pasajeros. Así, a medida que algunas rutas se congestionan, los pasajeros considerarán el uso de rutas alternativas que comenzarán a ser atractivas.

La factibilidad de los flujos, tanto de transporte privado como transporte público, está dada por el cumplimiento de ciertas restricciones, a saber:

Restricciones de Demanda:

$$\text{Transporte Privado: } T_w = \sum_{p \in P_w} h_p, \quad \forall w \in W \quad (1)$$



Transporte Público: 
$$\bar{T}_w = \sum_{r \in R_w} \bar{h}_r, \quad \forall w \in W \quad (2)$$

Conservación de flujos:

$$f_a = \sum_{p \in P} \delta_{ap} h_p, \quad \forall a \in A \quad (3)$$

$$V_s = \sum_{r \in R} \delta_{sr} \bar{h}_r, \quad \forall s \in S \quad (4)$$

$$\bar{f}_a = \sum_{r \in R} \bar{\delta}_{ar} \bar{h}_r, \quad \forall a \in \bar{A} \quad (5)$$

$$d_a = \sum_{l \in L} \delta_{al} d_l, \quad \forall a \in \bar{A} \quad (6)$$

$$d_s = \sum_{l \in L_s} d_l, \quad \forall s \in S \quad (7)$$

No-negatividad:

$$f_a \geq 0, \quad \forall a \in A \quad (8)$$

$$V_s \geq 0, \quad \forall s \in S \quad (9)$$

Las funciones de costo para transporte privado en aquellos arcos por los cuales circulan vehículos de transporte público, deben considerar el flujo total de vehículos sobre el arco de tal forma de modelar las interacciones entre transporte privado y transporte público. Las funciones flujo-tiempo asociadas a los arcos viales pueden ser modeladas como funciones tipo BPR de la siguiente forma:

$$c_a(f_a, d_a) = \alpha_a + \beta_a (f_a + \mu d_a)^n, \quad \forall a \in \bar{A} \quad (10)$$

$$c_a(f_a) = \alpha_a + \beta_a f_a^n, \quad \forall a \in A' \quad (11)$$

donde  $\alpha_a$ ,  $\beta_a$  y  $n$  son parámetros a calibrar.

Las funciones de costo para las secciones de ruta que forman la red de transporte público tienen la siguiente forma:

$$c_s = \bar{t}_s + \left( \frac{\alpha}{d_s} \right) + \beta \cdot \varphi_s \left( \frac{V_s + \bar{V}_s}{K_s} \right) \quad (12)$$

donde  $\bar{t}_s$  es el tiempo de viaje en vehículo más la tarifa,  $f_s$  es la frecuencia total en la sección de ruta  $s$ ,  $\alpha, \beta$  son parámetros de calibración,  $K_s$  es la capacidad de la sección de ruta  $s$ ,  $V_s$  es el número total de pasajeros en la sección de ruta  $s$  y  $\bar{V}_s$  es el flujo que compite por la misma capacidad. La función  $\varphi_s$  debe ser tal que  $c_s$  sea estrictamente monótona en  $V_s$ , normalmente se usan funciones tipo BFK:

$$\varphi_s = \left( \frac{V_s + \bar{V}_s}{K_s} \right)^n \quad (13)$$

En De Cea y Fernández (1993) se puede encontrar detalles de estas funciones de costo y del significado del flujo compitente  $\bar{V}_s$ .

Se puede observar que mientras las funciones de costo de operación en los arcos de la red de transporte privado son separables, no sucede lo mismo en el caso del transporte público. La función de costo de una sección de ruta  $c_s$  depende del flujo en otras secciones de ruta y no sólo de su propio flujo. Por lo tanto, el Jacobiano de las funciones de costo no será diagonal y, en general, no será simétrico. Como consecuencia de esto último el problema de asignación a redes congestionadas de transporte público es asimétrico y no tiene un problema de optimización equivalente.

Un método de solución comúnmente utilizado en estos casos es el algoritmo de diagonalización (Florian, 1977; Abdulaal y LeBlanc, 1979), que permite obtener en cada iteración funciones de costo separables y, por lo tanto, el planteamiento de un problema de optimización equivalente. Alternativamente, se puede utilizar un método que resuelve directamente el problema de asignación de equilibrio como es el algoritmo de planos cortantes (Nguyen y Dupuis, 1984).

### 3.4. Formulación Matemática del Problema

El problema de Diseño de Redes de Transporte Público puede formularse analíticamente como un problema de optimización cuya función objetivo está compuesta por los costos totales sociales provenientes de la operación del sistema de transporte analizado. Estos costos corresponden, en general, a costos o tiempos de viaje de los usuarios del sistema y costos de operación de los servicios de transporte público.



Las variables de decisión del problema son las frecuencias de las líneas, representadas por el vector  $\{d_l\}$ , y los flujos de equilibrio  $\{f_s^*\}$  y  $\{V_s^*\}$ .

De acuerdo a la notación establecida anteriormente, la formulación matemática del problema es la siguiente:

$$\begin{aligned} \{d\} \quad & \text{MIN} \quad \sum_{a \in A} (c_a(f_s^*, d_a) + c'_a(f_s^*, d_a)) \cdot f_s^* + \sum_{a \in A} (c_a(f_s^*) + c'_a(f_s^*)) \cdot f_s^* + \sum_{s \in S} c_s(V_s^*, d_s) \cdot V_s^* \\ & + TTA(V^*) + \lambda \left( \sum_{a \in A} \sum_{l \in L_a} G_a^l(f_s^*, \bar{f}_s^*, d_a, d_l) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

s.a

$$d_l \geq 0, \forall l \in L$$

$$\{f_s^*\}, \{V_s^*\} \quad \text{flujos de equilibrio}$$

El conjunto de restricciones incluirá, además, todas las relaciones de continuidad y consistencia, que deben cumplir tanto los flujos de transporte privado como los de transporte público, y las condiciones de no-negatividad de estas variables.

La función  $G_a^l$  representa los costos de operación de la línea  $l$  sobre el arco  $a$ , por unidad de tiempo. Depende del número total de vehículos (transporte privado y transporte público) que circulan por el arco, del número de pasajeros que utilizan la línea en el arco y del número de vehículos de la línea  $l$  que operan sobre el arco. El parámetro  $\lambda$  corresponde al inverso del valor del tiempo de viaje.

Los flujos  $\{f_s^*\}$  y  $\{V_s^*\}$  provienen de un equilibrio bi-modal sobre las redes de transporte privado y transporte público, para un conjunto dado de frecuencias  $\{d_l\}$  de las líneas. Este problema se trata como un problema de asignación de equilibrio bi-modal (ver Fernández, 1986), en el cual las matrices de viajes en transporte privado y transporte público son fijas. Posteriormente, el problema se enfocará como un problema de partición modal y asignación conjunta, en que las matrices de viajes son variables (LeBlanc, 1988). Sin embargo, la evidencia empírica indica que el efecto de partición modal entre redes de buses y autos no es importante. Este efecto se presenta con mayor relevancia cuando la red de transporte público incluye líneas de buses y de metro. La distribución de viajes se considera fija.

La expresión  $TTA(V^*)$  corresponde al tiempo total de acceso para los usuarios de transporte público, cuyo valor depende del conjunto de flujos de equilibrio sobre la red correspondiente.

La función objetivo del problema de diseño de redes (ecuación 14) es continua, pero en general no es convexa y ni siquiera diferenciable como función de las variables  $\{d_i\}$ . Por este motivo, los métodos de solución utilizados en la resolución del problema no deben requerir cálculo de derivadas o hessianos de la función objetivo, y deben aprovechar las características que presenta ésta como son la continuidad y la convexidad en cada una de las variables  $\{d_i\}$  para un conjunto de flujos dado.

#### 4. ALGORITMO DE SOLUCION

En el presente trabajo se ha implementado el algoritmo de Hooke-Jeeves (1961) para resolver el problema de diseño de redes de transporte público recién planteado.

La ventaja principal de este algoritmo es que no requiere convexidad de la función objetivo ni una expresión analítica explícita de las derivadas de dicha función con respecto a las variables de decisión del problema. Sí requiere que la función sea continua y evaluable para cualquier valor factible de las variables.

El algoritmo consiste básicamente en la repetición de dos etapas, que son:

- 1) "búsqueda exploratoria", a través de cada una de las coordenadas del espacio de soluciones, con el objeto de encontrar una buena dirección local de descenso (reducción del valor de la función objetivo). La búsqueda se efectúa variando el valor de cada coordenada en una cantidad pre-establecida (parámetro "delta") y evaluando la función objetivo en cada punto así determinado. Si la búsqueda desde un cierto punto no tiene éxito, se reduce el valor de "delta" en una cantidad pre-definida.
- 2) "patrón de movimiento", consistente en un avance según la dirección determinada en la primera etapa. La longitud del avance se define por la distancia entre los puntos que definieron la dirección, multiplicada por un parámetro "alpha".

La convergencia global del algoritmo no está asegurada a menos que la función objetivo sea estrictamente convexa, lo que no ocurre en el problema de diseño de redes de transporte público. El algoritmo puede caer en un óptimo local. Sin embargo, puede trabajar con cualquier función continua por extraña que sea su forma, dada la manera en que opera el algoritmo.

Para mejorar las posibilidades de obtener el óptimo puede repetirse su aplicación a partir de distintos puntos escogidos aleatoriamente.



## 5. IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL

La implementación del algoritmo de Hooke-Jeeves ha consistido en una adaptación de una versión anterior. En este caso, los flujos de equilibrio se obtienen como resultado de una asignación bimodal sobre las redes de transporte privado y transporte público, en la cual se realiza una asignación de equilibrio de los pasajeros de transporte público considerando restricción de capacidad de los vehículos.

El modelo de asignación de equilibrio en redes de transporte público fue implementado computacionalmente en el Departamento de Ingeniería de Transporte. En la actualidad se cuenta con tres algoritmos de solución. El primero de ellos es el algoritmo de Diagonalización (Crovetto, 1989). El segundo es el de Planos Cortantes (Mery, 1993). Estos dos algoritmos resuelven el problema de asignación mencionado con la siguiente simplificación: el flujo de una sección de ruta (un arco de la red  $G' = (\bar{N}, S)$ ) es repartido entre las secciones de línea que la conforman proporcionalmente a sus frecuencias nominales.

En De Cea, Fernández y Mery (1992) se hace un análisis comparativo de la implementación de ambos algoritmos desde el punto de vista de su eficiencia computacional, aspecto crucial dado que los algoritmos deben ser insertados en la resolución del problema de optimización de frecuencias.

Existe un tercer algoritmo (Hudson, 1993) que difiere de los anteriores en que la repartición de los flujos de las secciones de ruta, entre las secciones de línea correspondientes, se realiza proporcionalmente a las frecuencias efectivas de las líneas. Esto es, la restricción de capacidad de los vehículos se considera en la asignación sobre la red  $G' = (\bar{N}, S)$  y en la repartición posterior de los flujos obtenidos entre las secciones de línea.

## 6. PROBLEMA EJEMPLO

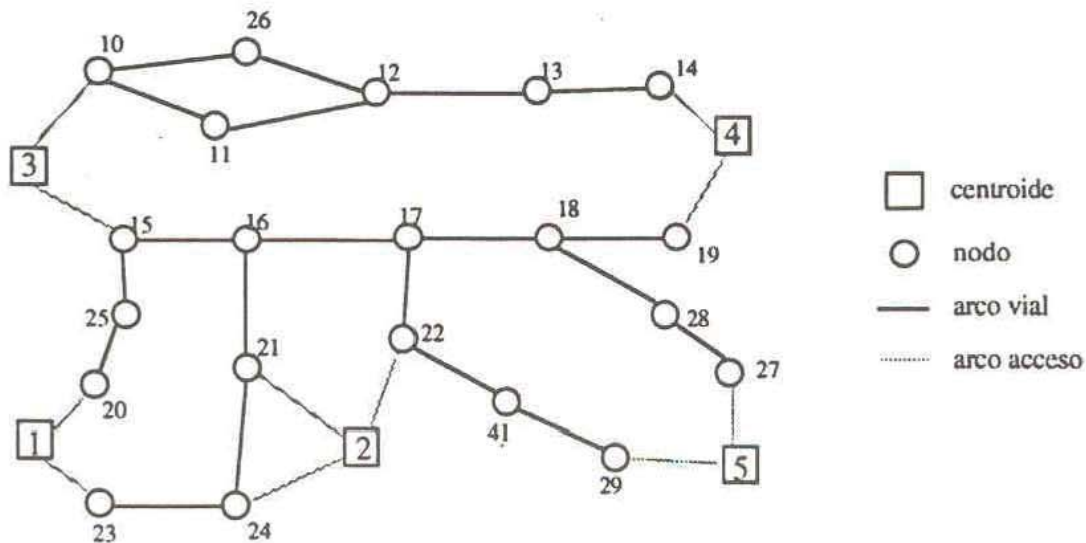
La red ejemplo, utilizada en la aplicación del método de Hooke-Jeeves y en la comparación de resultados, se muestra en la Figura 6.1. En ella se representa la red vial básica sobre la cual se realiza la asignación de vehículos de transporte privado y donde circulan los servicios de transporte público. Dicha red está compuesta por 5 zonas, 21 nodos y 58 arcos unidireccionales.

Las velocidades a flujo libre y a capacidad, la capacidad, la longitud y el exponente de la función flujo-tiempo para cada uno de los arcos de la red vial se entregan en la Tabla 6.1.

Por su parte, la red de transporte público está formada por 4 líneas, que para efectos de la aplicación del algoritmo se han considerado como 8 recorridos unidireccionales. La capacidad de



los vehículos de las líneas 1 y 3 es de 60 pasajeros, mientras que para las líneas 2 y 4 la capacidad es de 45 y 65 pasajeros por vehículo, respectivamente. Esta red se muestra en la Figura 6.2.



**FIGURA 6.1 Red de transporte privado**

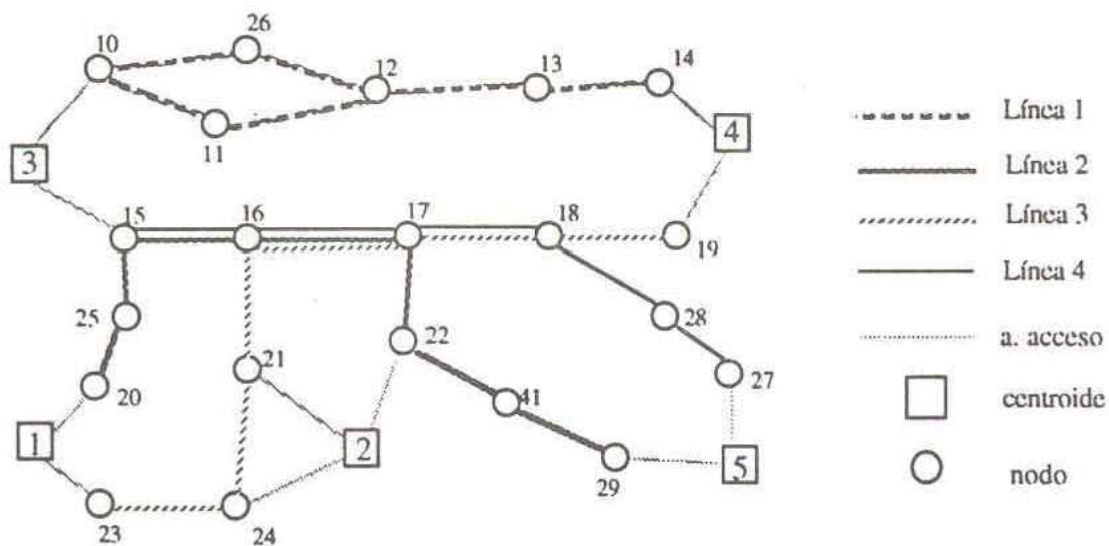


FIGURA 6.2 Red de transporte público

**TABLA 6.1 Descripción de los arcos de tpte. privado**

<b>Nodo O</b>	<b>Nodo D</b>	<b>V.flujo libre (km/hr)</b>	<b>V.capac. (km/hr)</b>	<b>Capacidad (pcu/hr)</b>	<b>Longitud (m)</b>	<b>Exponente</b>
10	11	43	12	771	1210	4.0
11	12	43	12	771	715	4.0
12	13	43	12	771	650	4.0
12	26	43	12	771	715	4.0
13	12	43	12	771	630	4.0
13	14	43	12	771	1550	4.0
14	13	43	12	771	1530	4.0
15	16	43	12	771	1210	4.0
15	25	43	12	750	800	4.0
16	15	43	12	750	1210	4.0
16	17	43	12	771	650	4.0
16	21	43	12	750	790	4.0
17	16	43	12	771	650	4.0
17	18	43	12	700	630	4.0
17	22	43	12	771	790	4.0
18	17	43	12	700	630	4.0
18	19	43	12	771	950	4.0
18	28	43	12	1200	1400	4.0
19	18	43	12	1436	950	4.0
20	25	43	12	771	645	4.0
21	16	43	12	1058	790	4.0
21	24	43	12	750	1050	4.0
22	17	43	12	718	790	4.0
22	41	43	12	718	1000	4.0
23	24	43	12	700	1520	4.0
24	21	43	12	936	1050	4.0
24	23	43	12	718	1520	4.0
25	15	43	12	700	880	4.0
25	20	43	12	718	645	4.0
26	10	43	12	850	1100	4.0
27	28	43	12	807	1400	4.0
28	27	43	12	850	1085	4.0
29	41	43	12	850	980	4.0
41	22	43	12	700	1000	4.0
41	29	43	12	850	980	4.0

En la Tabla 6.2 se presentan los tiempos de viaje en los arcos de acceso de las redes de transporte privado y público.

**TABLA 6.2 Descripción de los arcos de acceso**

Zona	Nodo acceso	Tpo. t.privado (min)	Tpo. t.público (min)
1	20	0.84	1.00
1	23	0.84	2.00
2	21	0.36	2.00
2	22	0.48	1.00
2	24	0.96	1.00
3	10	1.20	1.00
3	15	1.20	2.00
4	14	1.20	1.00
4	19	1.20	2.00
5	27	1.20	1.50
5	29	1.20	2.50

Las matrices de viaje para transporte privado y transporte público representan un total de 9.517 y 15.280 viajes por modo, respectivamente. Estas matrices son las siguientes:

Transporte Privado:

$$\begin{bmatrix} - & 700 & 110 & 580 & 380 \\ 382 & - & 85 & 300 & 181 \\ 146 & 1046 & - & 890 & 584 \\ 207 & 628 & 405 & - & 757 \\ 408 & 473 & 911 & 344 & - \end{bmatrix}$$

Transporte Público:

$$\begin{bmatrix} - & 930 & 500 & 200 & 600 \\ 1200 & - & 970 & 1000 & 750 \\ 800 & 200 & - & 400 & 830 \\ 330 & 1120 & 850 & - & 680 \\ 630 & 1200 & 750 & 1340 & - \end{bmatrix}$$

Los valores utilizados para los parámetros de las funciones de costo de las secciones de ruta sobre la red de transporte público, fueron los que siguen:  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 5.0$  y  $n = 4$ .



Los resultados que se muestran a continuación corresponden a dos corridas del algoritmo de Hooke-Jeeves utilizando, respectivamente, el modelo de asignación a redes de transporte público con restricción de capacidad y el modelo sin restricción de capacidad. Ambas corridas se iniciaron con los mismos valores para los intervalos (valor inverso de las frecuencias) de los recorridos de transporte público, que se fijó en 5 minutos para todas las líneas.

Los valores de los parámetros del algoritmo de Hooke-Jeeves fueron los siguientes para las dos corridas:

delta	= 1.0
alpha (paso)	= 1.0
reducción delta	= 0.9

Se realizaron 50 iteraciones en cada corrida, obteniéndose los resultados para los intervalos de los recorridos que se muestran en la Tabla 6.3.

**TABLA 6.3 Resultados para los intervalos de los recorridos de tpte. público**

Recorrido	Intervalo (minutos)	
	Con restricción de capac.	Sin restricción de capac.
Línea 1 (ida)	1.5	3.9
Línea 1 (vuelta)	0.8	1.7
Línea 2 (ida)	1.2	3.0
Línea 2 (vuelta)	0.7	3.1
Línea 3 (ida)	2.1	4.8
Línea 3 (vuelta)	2.8	6.4
Línea 4 (ida)	2.4	5.8
Línea 4 (vuelta)	2.2	9.3

En cuanto al valor de la función objetivo, la Tabla 6.4 muestra la variación experimentada a lo largo de las iteraciones del algoritmo de Hooke-Jeeves. En ella se incluyen sólo aquellas iteraciones para las cuales se produjo una disminución en el valor de la función objetivo.

Los valores de las funciones objetivo para cada corrida no son directamente comparables, dado que corresponden a distintas funciones a minimizar. Cuando se considera restricción de capacidad de los vehículos de transporte público, a la función de costo en las secciones de ruta se agrega un término correspondiente al aumento en el tiempo de espera debido al fenómeno de congestión en los paraderos. En la primera iteración, para intervalos de 5 minutos en las líneas, el valor de la función

objetivo es muy alto, dado que la capacidad de transporte público determinada por dichas frecuencias produce una congestión alta y, por lo tanto, el término adicional del tiempo de espera aumenta considerablemente. Como se puede apreciar en los resultados de la Tabla 6.3, los valores obtenidos finalmente para los intervalos, considerando restricción de capacidad, son todos menores que 5 minutos, lo que permite disminuir los tiempos de espera de los usuarios de transporte público, disminución que resulta ser mayor que el aumento en los costos de operación de las líneas, por el mayor número de buses operando en la red, más el aumento en los tiempos de viaje de los autos y los buses, por el mayor número de vehículos circulando en la red.

**TABLA 6.4 Variación del valor de la función objetivo**

Con restricción de capacidad	Sin restricción de capacidad
7.400.841,50	1.385.431,75
3.918.063,75	1.375.799,13
1.690.851,75	1.368.711,38
1.577.806,13	1.368.279,00
1.567.893,25	1.367.894,63
1.552.319,50	1.367.600,00
1.552.304,38	1.367.416,25
1.549.083,00	1.367.323,00
1.541.098,88	1.366.710,13
1.541.093,00	1.366.489,88
1.540.723,38	1.366.336,88
1.540.024,13	1.366.076,13
1.535.639,00	1.366.005,38
1.534.685,75	1.365.916,50
1.533.683,75	
1.532.992,63	
1.532.490,88	
1.532.153,38	

Para la corrida en que no se considera restricción de capacidad, el valor de la función objetivo es menor, dado que el tiempo de espera sólo tiene la componente fija que depende de las frecuencias de las líneas y no existe el fenómeno de congestión en los paraderos.

En la Tabla 6.5 se compara el flujo de pasajeros por arco con la capacidad total del mismo, para las dos corridas realizadas del algoritmo de Hooke-Jeeves. Para la aplicación del algoritmo con restricción de capacidad de los vehículos de transporte público, no se produce sobrecarga de las líneas. Sin embargo, si no se considera esta restricción, la mayoría de los arcos resultan sobrecargados (25 de los 36 arcos unidireccionales de la red).

**TABLA 6.5 Carga de pasajeros en arcos**

Nodo Origen	Nodo Destino	Con restricción de capac.		Sin restricción de capac.	
		N° pasajeros	Capacidad	N° pasajeros	Capacidad
10	11	1.430	2.400	1.371	923
11	12	1.430	2.400	1.371	923
12	13	1.430	2.400	1.371	923
12	26	2.570	4.500	2.463	2.118
13	12	2.570	4.500	2.463	2.118
13	14	1.600	2.400	1.643	923
14	13	2.300	4.500	2.469	2.118
15	16	800	4.023	724	1.319
15	25	1.760	3.857	1.600	871
16	15	960	3.857	907	1.543
16	17	800	2.250	849	2.069
16	21	0	1.286	218	563
17	16	960	3.857	964	2.106
17	18	828	1.773	258	1.169
17	22	1.921	2.250	2.616	900
18	17	0	3.058	276	1.235
18	19	1.340	1.800	1.297	750
18	28	1.508	1.773	758	419
19	18	680	1.286	511	563
20	25	1.300	2.250	1.165	900
21	16	0	1.800	287	750
21	24	0	1.286	499	563
22	17	3.350	3.857	2.978	871
22	41	1.352	2.250	2.102	900
23	24	930	1.800	1.065	750
24	21	0	1.800	409	750
24	23	900	1.286	1.060	563
25	15	1.300	2.250	1.165	900
25	20	1.760	3.857	1.600	871
26	10	2.570	4.500	2.463	2.118
27	28	1.340	1.625	1.562	672
28	18	1.340	1.625	1.562	672
28	27	1.508	1.773	758	419
29	41	2.580	3.857	2.358	871
41	22	2.580	3.857	2.358	871
41	29	1.352	2.250	2.102	900



Esto se produce debido a que, al no existir restricción de capacidad de los buses, hay incentivo a disminuir las frecuencias de las líneas para rebajar los costos de operación de los servicios de transporte público y del transporte privado, y los tiempos de viaje de los autos y de los buses, produciéndose la sobrecarga observada.

Este resultado constituye la principal ventaja de utilizar un modelo de asignación a redes de transporte público con restricción de capacidad para el diseño de redes y la optimización de frecuencias de las líneas que las componen, dado que permite modelar el fenómeno del aumento del tiempo de espera en los paraderos y, con esto, obtener frecuencias de las líneas que permitan efectivamente satisfacer la demanda de viajes en transporte público.

## 7. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un modelo y un algoritmo de solución para el problema de optimización de frecuencias en redes de transporte público. La función objetivo a minimizar en este caso considera los costos de operación de los automóviles y de los buses que operan sobre la red vial, además de los costos de viaje para los pasajeros de transporte público (tarifa y tiempos de acceso, espera y viaje en vehículo) y para los automovilistas (tiempos de acceso y viaje en vehículo).

En su versión actual el modelo considera demandas fijas de viajes en auto y bus, por lo que las interacciones entre ellos sólo se traduce en posibles cambios en la elección de rutas sobre las redes de cada modo y no en eventuales cambios en la partición modal. Adicionalmente, el modelo propuesto toma debida consideración de la restricción de capacidad de los vehículos de transporte público, lo que constituye el principal avance respecto de anteriores formulaciones de modelos similares. En general, los modelos existentes de optimización de frecuencias no consideran en forma realista la elección de rutas de los usuarios del transporte público, o bien cuando ésta se considera no se toma en cuenta que los vehículos tienen capacidad limitada (ver por ejemplo Constantin y Florian, 1993).

El algoritmo de solución utilizado no garantiza la obtención de un óptimo global, sino local, debido a las características de la función objetivo. Con el objeto de intentar la obtención del óptimo es posible, sin embargo, repetir la aplicación del algoritmo partiendo desde distintas soluciones (vector de frecuencias de las líneas) y con distintos valores de los parámetros del algoritmo.

Respecto a la posibilidad de aplicar este algoritmo a problemas de tamaño real, es importante destacar que el método de Hooke-Jeeves requiere de una fase de búsqueda exploratoria de dirección de disminución de la función objetivo y luego de una fase de avance en dicha dirección. Si se supone que las variables que deben ser exploradas (frecuencias en nuestro caso) son  $n$  y que el

número de iteraciones del algoritmo es  $N$ , el número de evaluaciones que debe hacerse de la función objetivo será, en promedio,  $N(2n+1)$ . Para evaluar la función objetivo se necesita realizar una asignación de equilibrio a la red, proceso que para el caso del equilibrio bi-modal con restricción de capacidad en ambos modos es muy consumidor de tiempo de cálculo. Sin embargo, Abdulaal y Leblanc (1979) propusieron, para la solución del problema de diseño de redes de infraestructura, una simplificación del método que consiste en independizar el número de asignaciones de  $n$ . Esta simplificación, que consiste en hacer todas las evaluaciones de la función objetivo en la fase exploratoria utilizando los flujos obtenidos para el punto base de la búsqueda, sólo requiere de  $N$  asignaciones, independientemente del número de variables.

La próxima etapa de la presente investigación será la implementación y prueba de la simplificación mencionada. Si los resultados obtenidos con ella son aceptables, será posible pensar en la aplicación del método propuesto para optimizar frecuencias en redes de buses de gran tamaño (la de Santiago, por ejemplo, tiene más de 400 recorridos diferentes). En todo caso, el procedimiento ya implementado puede ser usado para optimizar frecuencias en problemas más limitados. Este es el caso de un sistema de recorridos alimentadores de una estación de metro. Se puede suponer que la puesta en marcha de tales recorridos afecta sólo a una pequeña proporción de todos los recorridos de la red, lo que reduce en forma importante el número de frecuencias variables del problema ( $n$ ).

## **8. AGRADECIMIENTOS**

Este trabajo forma parte de una investigación financiada por el Fondo Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (FONDECYT).

## **9. REFERENCIAS**

- ABDULAAL, M. y LEBLANC, M. J. (1979). "Methods for Combining Modal Split and Equilibrium Assignment Models". *Transportation Science*, Vol. 13, 292-314.
- CONSTANTIN, I. y FLORIAN, M. (1993). "Optimizing Frequencies in a Transit Network: A Nonlinear Bi-level Programming Approach". *XIII World Conference on Operations Research (IFORS 93)*, Lisboa, Portugal, Julio de 1993.
- CROVETTO, G. (1989). "Implementación Computacional y Prueba de un Modelo de Asignación a Redes Congestionadas de Transporte Público". Tesis de Magister, Departamento de Ingeniería de Transporte, Pontificia Universidad Católica de Chile.



- **DE CEA, J. Y FERNANDEZ, J. E. (1993). "Transit Assignment for Congested Public Transport Systems: An Equilibrium Model". *Transportation Science*, Vol. 27, Nº 2, 133-147.**
- **DE CEA, J., FERNANDEZ, J. E. Y MERY D. (1992). "Comparación de Algoritmos de Solución del Problema de Asignación de Equilibrio en Redes de Transporte Público". VII Congreso Panamericano de Ingeniería de Tránsito y Transporte, Caracas, Venezuela, Septiembre de 1992.**
- **FERNANDEZ, J. E. (1986). "Diseño de Redes de Transporte Público Urbano. Planteamiento y Métodos de Solución". 16 JAIIO, Buenos Aires, Argentina, Septiembre de 1986.**
- **FLORIAN, M. (1977). "A Traffic Equilibrium Model of Travel by Car and Public Transit Modes". *Transportation Science*, Vol. 8, 166-179.**
- **HOOKE, R. Y JEEVES, T. A. (1961). "Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems". *Journal of the Association of Computer Machinery*, Vol. 9, 212-229.**
- **HUDSON, M. T. (1993). "Implementación de una Heurística de Solución al Problema de Asignación en Redes de Transporte Público". Memoria de Título, Departamento de Ingeniería de Transporte, Pontificia Universidad Católica de Chile.**
- **LEBLANC, L. J. (1988). "Transit System Network Design". *Transportation Research*, 22B(5), 383-390.**
- **MERY, D. (1993). "Aplicación del Método de Planos Cortantes para Resolver el Problema de Equilibrio en Redes de Transporte Público". Tesis de Magister, Departamento de Ingeniería de Transporte, Pontificia Universidad Católica de Chile.**
- **NGUYEN, S. y DUPUIS, C. (1984). "An Efficient Method for Computing Traffic Equilibria in Networks with Asymmetric Transportation Costs". *Transportation Science*, Vol. 18, 185-202.**
- **WOOD, R. (1986). "Análisis de Métodos Continuos de Solución al Problema de Diseño de Redes de Transporte Público". Tesis de Magister, Departamento de Ingeniería de Transporte, Pontificia Universidad Católica de Chile.**