

Un Algoritmo de Rutas Mínimas para Redes Combinadas de Transporte

Henry Malbrán Rojas

Secretaría Ejecutiva

**Comisión de Planificación de Inversiones en
Infraestructura de Transporte (SECTRA)**

Ahumada 48, 5° Piso, Santiago CHILE

Fono: (562) 671.0935

Fax: (562) 696.6477

RESUMEN

El problema de asignación de flujos en redes combinadas de transporte, adquiere creciente importancia práctica por el énfasis que los planificadores están poniendo en privilegiar las alternativas de transporte *combinado (o integrado)* en las grandes ciudades. Estos modelos requieren calcular rutas mínimas, pero encontrar tales rutas no es trivial en una red combinada de transporte, pues en esta red no todas las rutas posibles entre un nodo origen y un nodo destino son válidas.

En este trabajo se propone un algoritmo de dos fases para resolver el problema de encontrar el árbol de rutas mínimas válidas desde un origen a todos los destinos factibles en una red combinada. En la primera fase el algoritmo resuelve un problema clásico del tipo *uno a todos*. En la segunda fase en cambio, se resuelve un conjunto de problemas del tipo *uno a uno* cuando el algoritmo no encuentra rutas válidas en la primera fase. Cada uno de los problemas de la segunda fase, deriva de una particular modificación de la red combinada.

El énfasis de este trabajo esta puesto en la formulación del algoritmo y en su fundamentación teórica, para resolver correctamente un problema que tradicionalmente ha sido abordado con metodologías aproximadas o derechamente erradas. Aunque no se discute aquí su eficiencia computacional, los resultados mostrados son prometedores, también en el sentido práctico de aplicación del algoritmo.

1.- Introducción

El problema de asignación de flujos en redes combinadas¹ de transporte, adquiere creciente importancia práctica. Típico ejemplo es el énfasis que las grandes ciudades están poniendo en privilegiar las alternativa de transporte *combinado (o integrado)*, como una manera de enfrentar los agudos problemas de congestión y contaminación. La idea subyacente en estas políticas es que la utilización de modos combinados de transporte, contribuyen a aliviar los problemas mencionados y a optimizar la operación del sistema de transporte urbano. El análisis de tales políticas -entre otros propósitos- ha incentivado en años recientes el estudio y formulación de modelos de asignación a redes combinadas de transporte. Existen distintos enfoques e hipótesis de trabajo que dan origen a distintos modelos de asignación, casi todos los cuales necesitan resolver en alguna de sus etapas un problema de rutas mínimas combinadas. En realidad ello es necesario muchas miles y hasta millones de veces.

No obstante, el problema de encontrar rutas mínimas es bastante más complejo en una red combinada que en una red simple. Ello se debe fundamentalmente a las restricciones que impone el problema de transporte subyacente: en el caso de una red combinada, no todas las rutas posibles entre un nodo origen y un nodo destino son válidas. Ello tiene un fuerte impacto sobre la lógica de trabajo de los algoritmos de rutas mínimas clásicos, los que no son fácilmente adaptables para introducir la restricción de encontrar una ruta mínima dentro del subconjunto de aquellas que son válidas. De hecho, como se discute en este trabajo, las adaptaciones no son triviales y en la práctica conducen a aumentar fuertemente los costos de procesamiento.

En este trabajo se propone un algoritmo de dos fases que resuelve en forma exacta el problema planteado. El énfasis está puesto en la formulación del algoritmo y en su fundamentación teórica. Aunque no hay aquí mayor preocupación por la eficiencia computacional del algoritmo, los resultados mostrados sugieren una línea de desarrollo prometedora para construir una versión práctica del mismo. Ello permitiría contar con una herramienta eficaz para resolver correctamente un problema que tradicionalmente ha sido abordado con metodologías aproximadas o derechamente erradas.

En el contexto de este trabajo se considera una red combinada de transporte privado y transporte público. El ejemplo más claro es una red de Auto-Metro, aunque el problema es semejante si se considera una red Auto-Bus u otras redes combinadas. Una vez que el flujo se transfiere de una red a otra, ya no puede volver a desplazarse por la primera. Las preguntas son las mismas: en un par origen/destino, ¿Cuál es la ruta que seguirá el flujo en la primera red?, ¿Dónde se transfiere a la segunda red?, ¿Cuál es la ruta que seguirá en la segunda red?. Y de estas preguntas se desprende el concepto de rutas válida mencionada antes, que se refiere simplemente a que una ruta debe utilizar al menos un arco en cada red para ser considerada como válida (de lo contrario tal ruta no sería una ruta combinada). Esta consideración es la que introduce la complejidad al problema y obliga a formular un algoritmo específico para enfrentarlo.

¹ La idea de red combinada y modo combinado se refiere básicamente a que el flujo entre un nodo origen y un nodo destino, se realiza a través de dos redes disjuntas, que se conectan a través de ciertos arcos de transferencia. Por ejemplo, podemos hablar de una red combinada Auto-Metro o Bus-Metro.

2. Un Algoritmo de Dos Fase Para el Problema de Rutas Mínimas Combinadas

2.1 Ideas Previas Respecto al Algoritmo

En este trabajo se desarrolla un algoritmo específico para el modo integrado auto-metro, el más sencillo de los modos combinados privado-público que es posible concebir. Se trata de formular un algoritmo que respetando las características propias del problema de transporte subyacente, encuentre las rutas mínimas en la red combinada auto-metro.

Definición 1

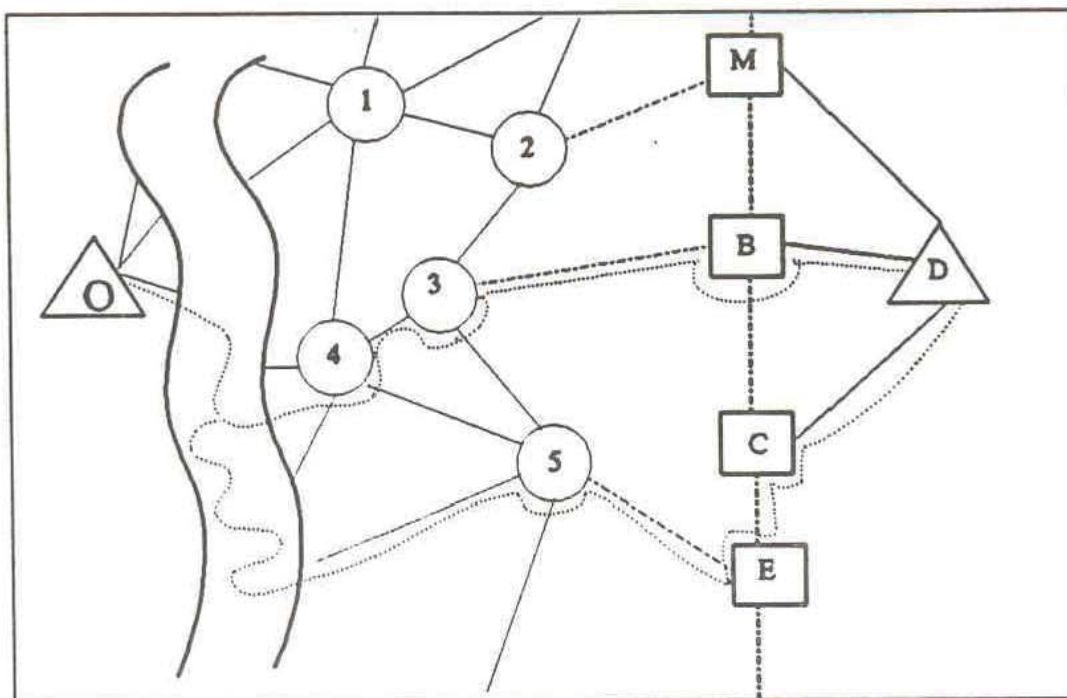
Sea Z un conjunto de puntos llamados centroides, distribuidos sobre un plano euclideo. Sobre este plano, sea también una red combinada Auto-Metro formada por una red vial $G(N,A)$ y una red de Metro $G(M,L)$ conectadas por los llamados arcos interredes. A su vez, los centroides se conectan a la red combinada a través de los llamados arcos de acceso. En este contexto, considérese una ruta que une dos centroides (llamados centroide origen y centroide destino) y que tiene las siguientes características:

- a) La ruta parte desde el centroide origen y pasa a la red vial utilizando un arco de acceso,
- b) Luego, la ruta sigue por la red vial, utilizando al menos un arco de esta red,
- c) Luego, la ruta pasa a la red de Metro utilizando un arco interred,
- d) Luego, la ruta sigue por la red de Metro, utilizando al menos un arco de esta red,
- e) Finalmente la ruta llega hasta al centroide destino utilizando un arco de acceso.
- f) Cada nodo incluido en la ruta aparece una sola vez en ella.

Si tal ruta existe para un par origen/destino determinado, se define la misma como una ruta válida para unir ambos centroides. Si para dicho par origen/destino existe una o más rutas válidas, se define como ruta mínima combinada o ruta mínima válida aquella ruta válida con menor costo.

Las implicancias de esta definición son inmediatas. Una ruta válida debe estar compuesta por una primera etapa vial y una segunda etapa de Metro: no están permitidas las rutas desarrolladas en una sola de las redes y en cada red la ruta debe utilizar al menos un arco. Las dos etapas de la ruta deben ser continuas: no están permitidas por ejemplo las rutas de auto-metro-auto: una vez que la ruta se transfiere de la red vial a la red de Metro, ya no puede volver a utilizar la primera. La existencia de una ruta válida implica que el origen debe estar conectado a la red vial y el destino debe estar conectado a la red de Metro. Y por último, la ruta no puede tener ciclos ni retroceder, pasando más de una vez por el mismo nodo.

El concepto de ruta mínima combinada es bastante simple, pero el algoritmo que la encuentra no es inmediato. Este debe evitar que una ruta no válida sea elegida como ruta mínima, lo que introduce la mayor complejidad del algoritmo. Por ejemplo, la restricción que obliga a una ruta válida a pasar al menos por un arco de la red de Metro, impide que la ruta mínima combinada, viniendo desde la red vial, pase *sólo a través* de una estación de Metro para llegar al destino final. La Figura 1 muestra una situación de este tipo, cuando se considera la ruta que une el origen O y el destino D que pasa a través de la secuencia de nodos 3 (red vial), B (red de Metro) y D (centroide destino). Es inmediato que tal ruta no sería válida (aunque fuera mínima) de acuerdo a los criterios que hemos definido.



El algoritmo de rutas mínimas combinadas es una adaptación del algoritmo clásico de búsqueda de mínimo para redes simples. Esta adaptación debe no obstante respetar las condiciones que garantizan al algoritmo original el encontrar las rutas mínimas. Una de ellas es que las características de la red están determinadas y fijas al comienzo de la operación del algoritmo.

Estas consideraciones sugieren la formulación de un algoritmo de dos fases. En la primera fase se construye el árbol de rutas mínimas combinadas, a partir del centroide origen, siguiendo la lógica de trabajo del algoritmo clásico. En la segunda fase se resuelve el problema de aquellos destinos para los cuales la ruta mínima encontrada en la primera fase no es válida. Así, en la terminología habitual en este campo, se puede decir que la primera fase resuelve un problema de *uno a todos*, en tanto que en la segunda fase resuelve un conjunto de problemas *uno a uno*.

Las secciones siguientes describen en detalle la formulación del algoritmo de dos fases. Recuérdese que en el contexto de este trabajo, el objetivo principal es la formulación de un algoritmo que resuelva conceptualmente el problema de encontrar rutas mínimas combinadas. El énfasis no está puesto por lo tanto, en la eficiencia de la implementación práctica del algoritmo, sino más bien en la ilustración de los problemas que debe enfrentar y superar.

2.2 Primera Fase del Algoritmo

En la primera fase, el algoritmo trabaja siguiendo la metodología clásica y construye el árbol de rutas mínimas desde el centroide origen a todos los centroides destino con acceso desde la red de Metro. La única restricción que se impone en esta fase, es que las rutas sean continuas. Para ello la red combinada ha sido *preparada*: el centroide origen está conectado sólo a la red vial y los centroides destino están conectados sólo desde la red de Metro. Las conexiones entre la red vial y la red de Metro son unidireccionales (nodo vial \rightarrow nodo de Metro). También lo son las conexiones entre la red de Metro y los centroides destino (Metro \rightarrow centroide). De esta manera se garantiza que el algoritmo encuentre rutas continuas, aunque no es seguro que tales rutas sean válidas.

Cuando el algoritmo ha elegido a todos los centroides destino como pivotes, la primera fase está concluida. Las rutas mínimas así construidas pueden ser válidas o no, de acuerdo con los criterios discutidos anteriormente. En el primer caso, la ruta encontrada es la ruta mínima combinada definitiva. Como ilustración, véase la ruta (O...5,E,C,D) en la Figura 1.

En cambio, si el centroide destino es alcanzado por una ruta no válida, como sería el caso de la ruta (O...3,B,D) en la Figura 1, tal ruta debe ser desechada. La necesidad de descartar esta ruta (que es mínima aunque no válida) introduce la mayor complejidad del problema y obliga a considerar una segunda fase del algoritmo.

Antes de seguir, consideremos una modificación inicial del algoritmo, tendiente a evitar la segunda fase. Supongamos que cada vez que se examina la etiqueta de un centroide destino desde un pivote (necesariamente un nodo de Metro), el algoritmo pregunte si la ruta correspondiente (hasta el centroide) es válida. Si es el caso, se permite modificar la etiqueta del centroide.

Si por el contrario la ruta no es válida, el pivote es *descartado* para acceder al centroide destino desde él. La etiqueta del centroide no es modificada y el algoritmo sigue adelante. En este caso pueden presentarse dos situaciones:

- a) La red de Metro se conecta al centroide a través de un arco de acceso único. Es inmediato entonces que el pivote *descartado* es el nodo inicial del único arco de acceso. Dado que cada nodo es elegido pivote una sola vez, el centroide no puede ser accesado desde la red y el algoritmo se verá impedido de construir una ruta hasta el centroide. Ello claramente es un despropósito, puesto que en general siempre existen rutas válidas en la red combinada.
- c) La red de Metro se conecta al centroide a través de un conjunto de arcos de acceso. En este caso el algoritmo podría encontrar una *ruta mínima combinada*, pero nada garantiza que tal ruta sea efectivamente mínima. Dado que el nodo *descartado* no vuelve a ser pivote, cualquier ruta válida encontrada posteriormente, excluirá el arco de acceso que une el nodo *descartado* con el destino. Las eventuales rutas válidas que incluyen este arco de acceso no son examinadas, por lo que no hay seguridad de que la ruta mínima encontrada sea tal.

Estos problemas ilustran la dificultad de formular el algoritmo de rutas mínimas combinadas. La modificación propuesta -que parecía atractiva en principio- es incorrecta. De acuerdo con ella, cuando se detecta una ruta no válida se impide la modificación de la etiqueta de un centroide, lo que es equivalente a hacer infinito el costo del arco de acceso que une el pivote con el centroide. Sin embargo, si la ruta fuera válida, el costo de dicho arco de acceso permanecería con su valor original. En otras palabras el costo del arco de acceso depende de la ruta que lo utiliza y este es precisamente el problema de la modificación propuesta. Porque una condición básica de los algoritmos de rutas mínimas en redes determinísticas, es que las características de la red (tópologías y operacionales) deben estar previamente determinadas y fijas para garantizar que las rutas encontradas existan y sean mínimas.

2.3 Segunda Fase del Algoritmo

En la primera fase, el algoritmo combinado construye un árbol de rutas mínimas entre el centroide origen y todos los centroides destino accesibles desde la red de Metro. Eventualmente, algunas de estas rutas, para algunas parejas origen/destino, podrían no ser válidas. En este caso, el algoritmo debe pasar a una segunda fase, en que el problema de cada pareja con ruta inválida debe ser resuelta separadamente, porque la *no validez* de una pareja determinada no está relacionada con las rutas que unen otras parejas origen/destino.

Como hemos visto en la sección anterior, no parece posible modificar la lógica de trabajo del algoritmo clásico para obligarlo a encontrar una ruta mínima válida, sin alterar simultáneamente la garantía de encontrar tal ruta y de que, aún encontrada, esta ruta sea efectivamente mínima. Es necesario entonces buscar la solución en otra dirección.

Una aproximación posible consiste en plantear un problema equivalente al original y demostrar que ambos tienen la misma solución. En esta dirección se plantea la idea principal de la segunda fase del algoritmo: desagregar la complejidad del problema original en un conjunto de problemas más simples, para luego demostrar que la solución de alguno de los problemas simplificados es también la solución del problema original.

En este caso, el problema original consiste en encontrar una ruta mínima válida entre el origen O y el destino D sobre la red original. En la segunda fase, el algoritmo desagrega este problema en un conjunto de problemas relacionados, cada uno de los cuales se deriva de una alteración de la red original.

Supóngase que la red de Metro está unida al destino D a través de n arcos de acceso. Cada arco de acceso une unidireccionalmente un nodo de Metro, que llamaremos M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) con el centroide D . Supóngase además que cada uno de estos nodos M_i es accesado desde la red vial a través de un conjunto de m arcos interredes, que unen unidireccionalmente un nodo vial con el nodo de Metro M_i .

El algoritmo toma el primero de los nodos M_i y realiza dos alteraciones de la red original:

- Elimina los arcos interredes desde la red vial al nodo M_i . Es decir, desconecta M_i de la red vial.
- Elimina todos los arcos de acceso al centroide D , excepto el arco de acceso que une M_i con D .

Luego, se ejecuta el algoritmo clásico para determinar la ruta mínima combinada *condicionada* por las modificaciones de la red (Ver Figura 2).

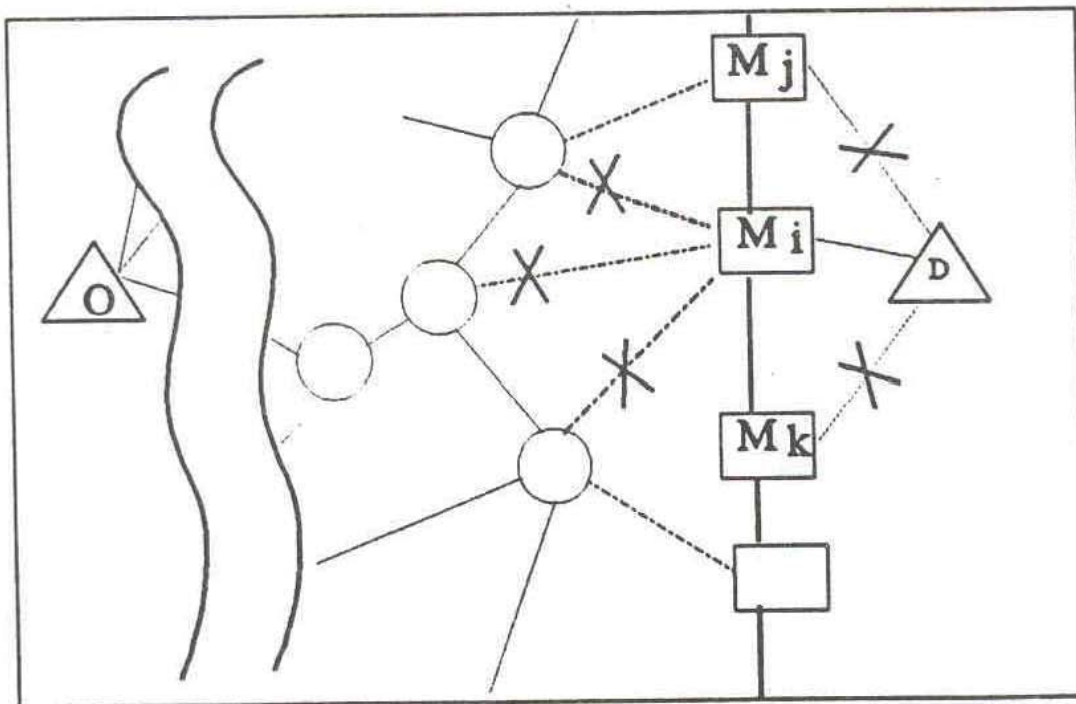


FIGURA 2: Modificaciones de la Red en la i -ésima Etapa de la Segunda Fase

El algoritmo repite esta operación con el siguiente nodo M_i hasta completar los n arcos de acceso al centroide destino. Al final de este proceso de n etapas, el algoritmo habrá encontrado n rutas mínimas combinadas, cada una de ellas condicionada a una red particular. La mínima de las rutas condicionadas será la solución del problema original.

Nótese que en cada etapa de la segunda fase se cambia la topología de la red, definiéndose cada vez un nuevo problema de rutas mínimas. Ello implica que en principio, la información proveniente de la solución de la primera fase no es aprovechable en la segunda fase, lo cual también es cierto entre las distintas etapas de la segunda fase. Más tarde, la expresión práctica del algoritmo puede intentar formas de aprovechar la solución de la fase o etapa anterior, pero en cada caso la nueva solución es independiente de la anterior, dado que las redes son distintas.

Las modificaciones realizadas en cada etapa de la segunda fase, están diseñadas para asegurar que el algoritmo clásico encuentre una ruta mínima válida en la red modificada: realizadas las modificaciones en torno al nodo M_i , la única manera de llegar al centroide D es a través del nodo M_i y a su vez al nodo M_i no se puede llegar sino desde otro nodo de Metro. Pero además, estas modificaciones garantizan que la ruta encontrada es la mínima de todas las rutas válidas posibles en la red original, que contienen el arco de acceso (M_i, D) . Esta es la que hemos llamado la ruta mínima condicionada.

En resumen, la segunda fase realiza una partición de las rutas válidas en la red original. En cada etapa de la segunda fase, el algoritmo encuentra la ruta mínima dentro de cada subconjunto en que la partición dividió las rutas válidas. La solución global se obtiene eligiendo *la ruta mínima entre el conjunto de rutas mínimas condicionadas*. La solución así encontrada es efectivamente la ruta mínima válida global, dado que cada ruta válida posible en la red original ha sido considerada en alguna de las etapas de la segunda fase. La Figura 3 resume el algoritmo:

A.- PRIMERA FASE

- a.0 Defina la red de trabajo, estableciendo el origen O y los destinos D factibles.
- a.1 Encuentre el árbol de rutas mínimas desde O a todos los destinos factibles.

B.- SEGUNDA FASE

- b.0 Para cada destino D examine la validez de ruta mínima encontrada
 - b.1 Si la ruta mínima es válida vuelva a b.0
 - b.2 Si la ruta mínima no es válida haga lo siguiente:
 - b.2.2 Haga infinito el costo de la ruta mínima
 - b.2.2 Para cada estación M conectada a D haga lo siguiente:
 - b.2.2.1 Desconecte M de la red vial
 - b.2.2.2 Desconecte D de cualquier estación distinta de M
 - b.2.2.3 Encuentre la ruta mínima condicionada entre O y D
 - b.2.2.4 Si la ruta mínima condicionada es menor que la ruta mínima, entonces haga esta última igual a la ruta mínima condicionada. Vuelva a b.2.2.

FIGURA 3: Resumen Conceptual del Algoritmo de Dos Fases

La tarea de estudiar la factibilidad de origen y destinos, mencionadas en el primer paso de la Figura 3, podría ser externa al algoritmo. Para que el problema tenga solución el origen debe estar conectado a la red vial y los destinos deben estar conectados a la red de Metro. Para evitar soluciones inválidas y trabajo irrelevante, la primera tarea es desconectar el centroide origen de la red de Metro, los centroides destinos de la red vial y las conexiones desde la red de Metro hacia la red vial. Después de ello, el origen será factible cuando queda conectado a la red vial, los destinos serán factibles cuando queden conectados a la red de Metro. El problema tendrá solución sólo cuando origen y destino sean factibles. Es claro que esta tarea puede ser externa al algoritmo y así se considerará en el resto de este trabajo.

3.- Fundamentos del Algoritmo de Dos Fases

En esta sección se discuten los fundamentos de la segunda fase del algoritmo propuesto.

Definición 2

Se define como red de trabajo $R(W,S)$ asociada a una pareja de centroides (llamados origen O y destino D) una macro-red integrada por los siguientes elementos:

- Una red vial $G(N,A)$.
- Una red de Metro $G(M,L)$ disjunta de la red vial.
- Un conjunto de m arcos de acceso unidireccionales que unen el centroide origen O con la red vial. Estos arcos serán referenciados con la nomenclatura (O,N_j) .
- Un conjunto de n arcos de acceso unidireccionales que unen la red de Metro con el centroide destino D . La nomenclatura utilizada para ellos será (M_i,D) .
- Un conjunto de t arcos interredes unidireccionales que unen un nodo de la red vial y un nodo de la red de Metro. La nomenclatura para ellos será (N_j,M_i) .

Sobre la red de trabajo así definida se trata de encontrar la ruta mínima válida que une los centroides origen y destino.

Proposición 1

Sea P el conjunto de todas las rutas válidas que unen el centroide origen O con el centroide destino D en la red de trabajo $R(W,S)$. Entonces el conjunto P puede ser particionado en n subconjunto disjuntos:

$$P = \{ P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n \}$$

donde cada subconjunto P_i agrupa todas las rutas válidas que utilizan el arco de acceso (M_i,D) .

Prueba

La fundamentación de esta propocisión es inmediata a partir de la definición de rutas válidas (Definición 1). Puesto que el nodo final de toda ruta válida es el nodo D y a este sólo se puede llegar a través de alguno de los arcos de acceso (M_i, D) , cada ruta válida del conjunto P se puede clasificar de acuerdo al arco de acceso que utiliza para llegar hasta D . Ninguna ruta válida puede utilizar más de uno de estos arcos de acceso, por lo que la clasificación de rutas válidas es en realidad un partición del conjunto P .

Teorema 1

Sea P_i el subconjunto de rutas válidas que unen el centroide O con el centroide D , que utilizan el arco de acceso (M_i, D) . Y sea V el conjunto de todo los arcos interredes (N_j, M_i) que unen la red vial con el nodo de Metro M_i . Entonces, ninguna de las rutas que pertenecen a P_i utiliza ninguno de los arcos incluídos en V .

Demostración

Para demostrar el teorema supondremos que su postulado es falso, y que alguna de las rutas válidas de P_i utiliza algun arco de V . Luego, existe alguna ruta que viniendo desde el origen O llegue hasta M_i utilizando un arco unidireccional (N_j, M_i) perteneciente a V . En este punto la ruta puede seguir dos trazados posibles.

- a) La ruta sigue desde M_i hasta el centroide D . En este caso la ruta no utiliza ningún arco de Metro. La ruta es inválida y no pertenece al conjunto P_i , lo cual contradice la primera condición del teorema.
- b) La ruta sigue desde M_i hasta otro nodo M_j de la red de Metro. En este caso la ruta no utiliza el arco de acceso (M_i, D) , puesto que por definición de ruta válida, el nodo M_i no volverá ser visitado por la ruta. Luego, la ruta no pertenece al conjunto P_i , lo cual nuevamente contradice la primera condición del teorema.

Dado que esta discusión se repite para cada uno de los arcos del conjunto V , el teorema queda demostrado.

La proposición 1 y el Teorema 1 permiten desagregar el problema original en un conjunto de n problemas simplificados, utilizando las siguientes dos propocisiones:

Propocisión 2

Sea $P = \{ P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n \}$ una partición de las rutas válidas que unen el centroide origen O con el centroide destino D en la red de trabajo $R(W, S)$, donde P_i el subconjunto de rutas válidas que utilizan el arco de acceso (M_i, D) . La mínima de la rutas pertenecientes a P_i se puede obtener siguiendo los siguientes pasos:

- a) Defínase una nueva red de trabajo $R_i(W, S')$ igual a la original, excepto por dos cambios:

- a.1) Elimínense de la red original cualquier arco de acceso (M_i, D) con k distinto de i .
- a.2) Elimínese de la red original cualquier arco interred (N_j, M_i) que una la red vial con el nodo de Metro M_i .
- b) Utilícese un algoritmo clásico de búsqueda de mínimo para encontrar la ruta mínima entre O y D . Si tal ruta existe, esta es la mínima de las rutas del subconjunto P_i .

Prueba

De la propocisión 1 se sigue que la rutas válidas incluídas en P_i no utilizan ningun arco de acceso distinto a (M_i, D) . Por otra parte, el Teorema 1 demuestra que la rutas de P_i tampoco utilizan ningun arco de conexión interred (N_j, M_i) . Por lo tanto la nueva red $R_i(W, S')$ no impide ninguna de la rutas válidas de la red original incluídas en P_i , pero simultaneamente impide cualquier ruta válida no perteneciente a P_i .

Si en esta nueva red se aplica el algoritmo clásico para encontrar la ruta mínima entre O y D , el conjunto de soluciones factibles estará reducido a P_i y la ruta encontrada será la mínima de las rutas de P_i .

Proposición 3

Sea $P = \{ P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n \}$ una partición de las rutas válidas que unen el centroide origen O con el centroide destino D en la red de trabajo $R(W, S)$, donde P_i el subconjunto de rutas válidas que utilizan el arco de acceso (M_i, D) .

Sea tambien $rm_i = \min\{P_i\}$ la mínima de las rutas pertenecientes a P_i

Entonces la ruta mínima del conjunto P es la mínima de las rutas rm_i . Es decir:

$$\min \{P\} = \min \{ rm_1, rm_2, \dots, rm_i, \dots, rm_n \}$$

Prueba

La demostración de esta propocisión es inmediata a partir de su propio enunciado. La partición divide las rutas válidas en subconjuntos disjuntos. La ruta mínima global será la mínima de la rutas mínimas de cada subconjunto.

Todo este desarrollo viene a demostrar la validez metodológica de la segunda fase del algoritmo. En cada etapa de esta fase el algoritmo resuelve un problema de rutas mínimas, condicionado a una red modificada que garantiza una partición estricta del conjunto de rutas válidas posibles en la red de trabajo original.

4.- Ejemplo de Prueba

En esta sección se desarrolla un ejemplo de aplicación del algoritmo de dos fases propuesto. La Figura 4 muestra una red combinada de características tan comunes como las de cualquier red que puede encontrarse en una aplicación típica de transporte. Existen 5 nodos centroides graficados como triángulos y numerados secuencialmente del 1 al 5. Una red de Metro de 6 nodos numerados del 6 al 11 y graficados como cuadrados. Una red vial de 14 nodos que van desde el nodo 12 al nodo 25 y graficados en forma de círculo. Los arcos de acceso y los arcos interredes están dibujados con líneas punteadas. Inicialmente todos los arcos de la red son bidireccionales y con igual costo en ambas direcciones, los que se indican en la Figura 4.

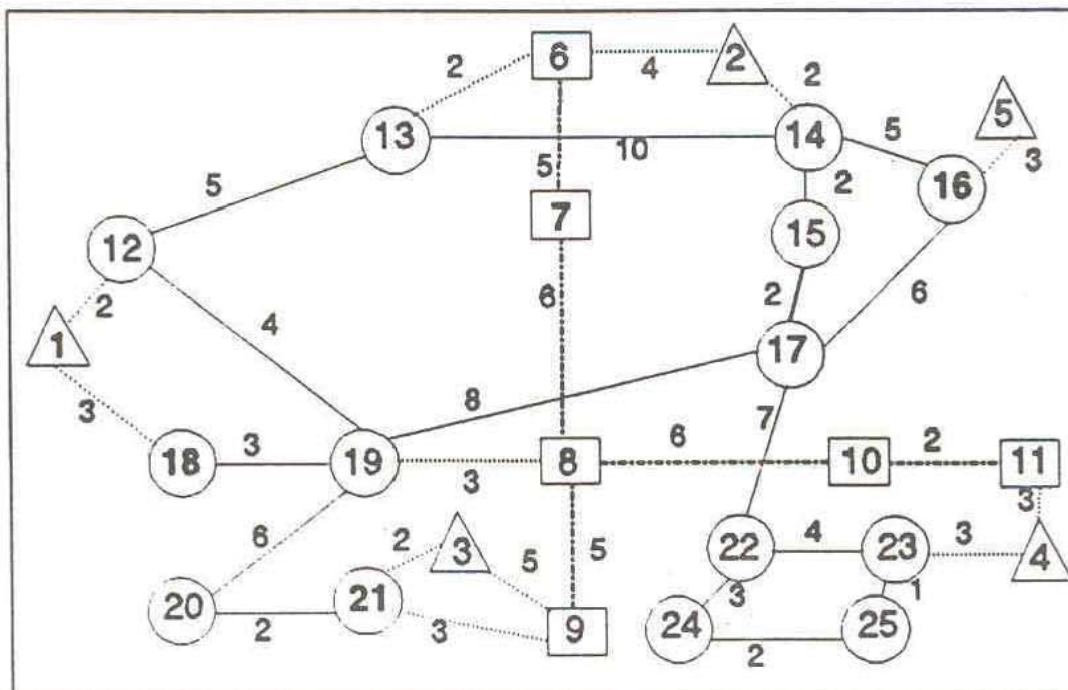


FIGURA 4: Red inicial del Ejemplo de prueba

El problema consiste en encontrar la ruta mínima válida entre el centroide origen 1 y el resto de los centroides de la red combinada. De la simple inspección de la red se deduce que para ciertos centroides destino el problema no tiene solución. Específicamente el centroide 5 no se puede alcanzar con una ruta combinada válida. La primera fase del algoritmo prepara la red para utilizar el algoritmo, desconectando los centroides que no tienen solución factible y eliminando los arcos interredes y arcos de acceso que pueden conducir a rutas no válidas. La Figura 5 muestra la red así preparada. La primera fase del algoritmo encuentra el árbol de rutas mínimas a partir del centroide 1.

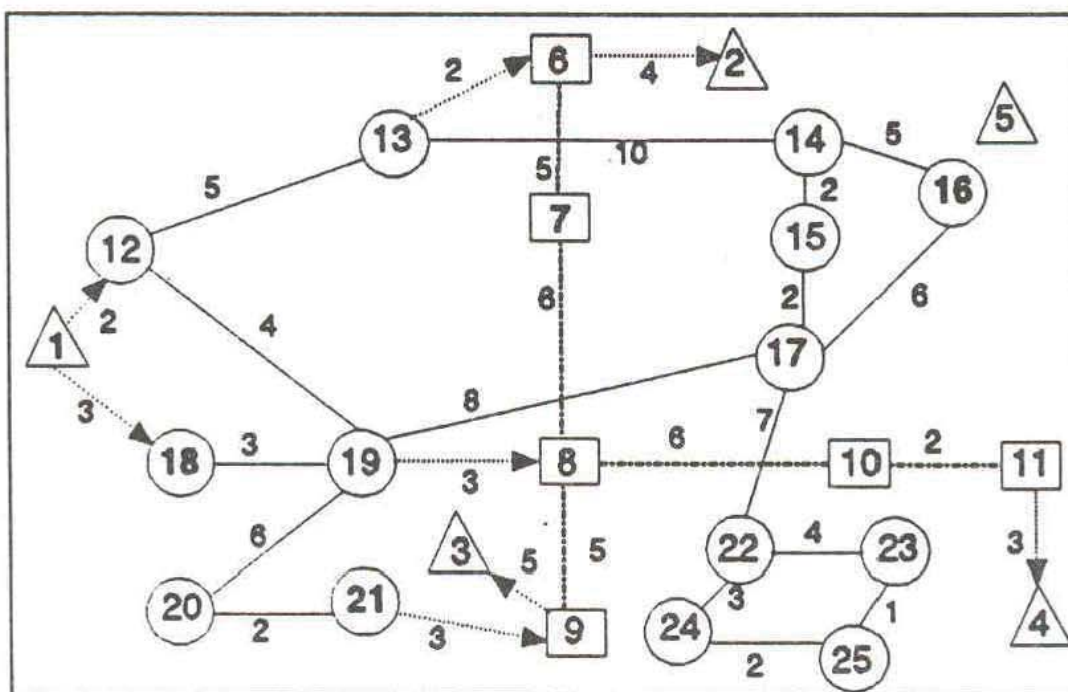


FIGURA 5: Red Preparada para la Primera Fase

La Tabla 1 muestra los resultados de la aplicación de la primera fase, después de haber encontrado la ruta mínima hasta cada uno de los centroides destinos factibles en 19 iteraciones. Los paréntesis de corchetes indican etiquetas definitivas. El resto de los nodos no fué alcanzado por el árbol de rutas mínimas antes de que el algoritmo concluyera la primera fase.

| NODO | ETIQUETA | NODO | ETIQUETA | NODO | ETIQUETA |
|------|----------|------|----------|------|----------|
| 1 | [0,0] | 6 | [13,19] | 12 | [1,2] |
| 2 | [6,13] | 7 | [6,14] | 13 | [12,7] |
| 3 | [9,19] | 8 | [19,9] | 14 | [13,17] |
| 4 | [11,20] | 9 | [8,14] | 15 | [17,16] |
| 5 | * | 10 | [8,15] | 16 | (17,20) |
| | | 11 | [10,17] | 17 | [19,14] |
| | | | | 18 | [1,3] |
| | | | | 19 | [12,6] |
| | | | | 20 | [19,12] |
| | | | | 21 | [20,14] |
| | | | | 22 | (17,21) |
| | | | | 23 | (-,∞) |
| | | | | 24 | (-,∞) |
| | | | | 25 | (-,∞) |

TABLA 1: Resultados de la Primera Fase del Algoritmo

La figura 6 muestra graficamente el árbol resultante al concluir la primera fase del algoritmo. Puede observarse que los centroides 3 y 4 han sido alcanzados por una ruta válida.

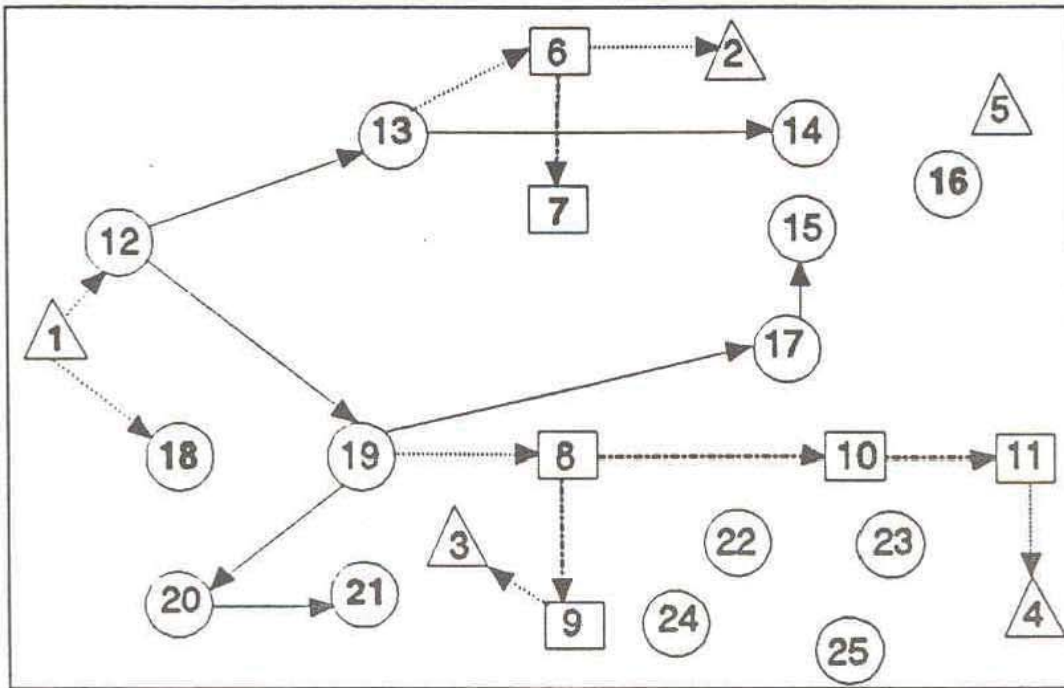


FIGURA 6: Arbol de Rutas Mínimas de la Primera Fase

Sin embargo, la ruta mínima que el algoritmo ha encontrado hasta el centroide 2 no es válida, pues no utiliza ningún arco de Metro. Es necesario entonces pasar a la segunda fase, una vez que se han realizado las modificaciones correspondientes en la red. Estas modificaciones, asociadas al par origen/destino 1/2, establecen la eliminación del arco de conexión (13,6). La Tabla 2 y la Figura 7 muestran los resultados de la segunda fase.

Puede observarse que ahora el algoritmo ha encontrado una ruta mínima válida para el par 1/2 que utiliza dos arcos de Metro para alcanzar el destino. Puede observarse también que en la segunda fase el algoritmo, encontró nuevamente rutas mínimas hasta los centroides 3 y 4 lo que significa un esfuerzo innecesario y que además puede inducir a errores, pues las nuevas rutas no tienen por qué coincidir con aquellas encontradas en la primera fase, que son las efectivamente mínimas. Una manera inmediata de ayudar al algoritmo, sería desconectar estos centroides en la segunda fase. Sin embargo, ello no se ha hecho aquí, porque una versión práctica del algoritmo podría necesitar de tales conexiones, cuando se consideran otros centroides orígenes y sea necesario encontrar rutas válidas hacia estos centroides destino.

| NODO | ETIQUETA | NODO | ETIQUETA | NODO | ETIQUETA |
|------|----------|------|----------|------|----------|
| 1 | [0,0] | 6 | [7,20] | 12 | [1,2] |
| 2 | [6,24] | 7 | [8,15] | 13 | [12,7] |
| 3 | [9,19] | 8 | [19,9] | 14 | [13,17] |
| 4 | [11,20] | 9 | [8,14] | 15 | [17,16] |
| 5 | | 10 | [8,15] | 16 | [17,20] |
| | | 11 | [10,17] | 17 | [19,14] |
| | | | | 18 | [1,3] |
| | | | | 19 | [12,6] |
| | | | | 20 | [19,12] |
| | | | | 21 | [20,14] |
| | | | | 22 | [17,21] |
| | | | | 23 | [22,25] |
| | | | | 24 | [22,24] |
| | | | | 25 | [-,∞) |

TABLA 2: Resultados de la Segunda Fase del Algoritmo

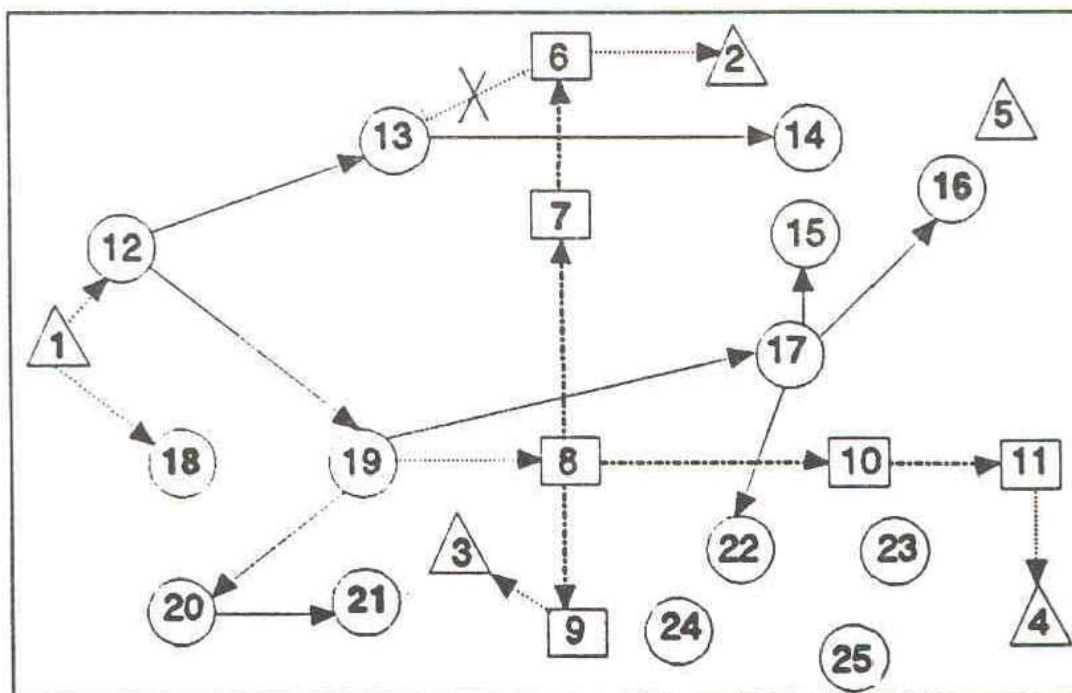


FIGURA 7: Árbol de Rutas Mínimas de la Segunda Fase

5.- Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto un algoritmo de dos fases para resolver el problema de calcular el árbol de rutas mínimas en una red combinada Auto-Metro. Este problema es típico en modelación de transporte y se presenta con creciente frecuencia con la popularización de los sistemas integrados de transporte. El trabajo parte por establecer el ámbito del problema, definiendo una red combinada y el tipo de ruta considerada como válida para unir dos centroides origen y destino en la red. Este concepto de validez de una ruta sobre la red combinada, debe ser entendida desde el punto de vista de la lógica del problema de transporte.

En la primera fase el algoritmo intenta encontrar una ruta mínima válida entre un centroide origen conectado a la red vial y todos los centroides destinos conectados a la red de Metro. Cuando, para un destino particular, la ruta así encontrada no es válida, el algoritmo pasa a una segunda fase que resuelve el problema después de modificar la red original. La segunda fase encontrará entonces la ruta mínima válida (siempre que tal ruta exista), lo cual se puede demostrar. De esta manera, en la primera fase el problema resuelve un problema clásico del tipo *uno a todos*. En la segunda fase en cambio, se resuelve un conjunto de problemas del tipo *uno a uno*. La dimensión del conjunto de problemas a resolver en la segunda fase, es igual al número de destinos para los cuales el algoritmo encontró rutas no válidas en la primera fase.

El objetivo esencial de este trabajo ha sido formular un algoritmo que resuelva teóricamente el problema planteado: encontrar ruta mínima válidas en redes combinadas privada-pública. En este sentido el énfasis está puesto en desarrollar conceptualmente el algoritmo y fundamentar su lógica de trabajo. El análisis desarrollado en el trabajo parece demostrar que el algoritmo propuesto resuelve el problema en forma exacta.

Por supuesto, una versión práctica del algoritmo deberá considerar muchos aspectos que aquí apenas se han mencionado. Por ejemplo, se requiere la aplicación intensiva de un algoritmo clásico de búsqueda de mínimo. Este algoritmo es utilizado un gran número de veces para resolver sucesivamente un conjunto de problemas muy "parecidos" en términos prácticos, pero conceptualmente distintos. Una línea de desarrollo puede ser intentar aprovechar la solución de un problema para resolver el siguiente. Otra posibilidad es, en la segunda fase, invertir los arcos (y sus costos), en orden a intentar resolver simultáneamente el problema de un destino con todos aquellos orígenes para los cuales la primera fase no encuentra una ruta mínima válida.

6.- Bibliografía

Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. (1993). *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.

Current J.R., ReVelle Ch.S., Cohon J.L (1986). *The hierarchical network design problem*. European Journal of Operational Research 27, 57-66.

Gallo G., Pallottino S. (1984). *Shortest path methods in transportation models*. Transportation Planning Models, edited by M. Florian, Elsevier/North-Holland.