GENERALIZACION DE MODELOS LOGIT TRANSVERSALES A INFORMACION DE CORTE LONGITUDINAL

Marisa Yadlin A.
Reinaldo Arellano V.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Probabilidad y Estadística
Av. Vicuña Mackenna 4860
Fono: 5522375 anexo 4507
Fax: 5525916, Santiago, Chile

RESUMEN

Los Modelos de Decisión Discreta (MDD) especifican las probabilidades con que un sujeto (usuario) eligirá uno de los elementos de un conjunto finito de alternativas (bienes) exhaustivas y excluyentes. Los Modelos de Utilidad Aleatoria (MUA) son MDD consistentes con el principio de maximización de utilidad.

El Modelo Logit (ML) es el MUA prevaleciente en estudios empíricos, por su gran simplicidad analítica y computacional. Sin embargo, el ML no considera interrelaciones entre las alternativas disponibles a los usuarios. ML que superan esto último para información de corte transversal (en un punto del tiempo) han sido desarrollados en estudios anteriores, mediante la construcción de extensiones paramétricas del ML original, que incluyen dependencias entre las alternativas.

Aquí, se generalizan ML tranversales a información de corte longitudinal o en paneles (en varios puntos del tiempo), de modo de incorporar también dependencias intertemporales entre los bienes.

Los modelos resultantes mantienen la tractabilidad analítica y computacional y contienen al ML original, reduciéndose a este último cuando hay independencia.

En particular, se consideran decisiones entre dos bienes y en dos períodos de tiempo.

1 INTRODUCCION

Sea $G = \{1, 2, ..., J\}$ un conjunto de bienes exhaustivos y excluyentes y considere $n = 1, 2, ..., N$ estratos de usuarios.

Un Modelo de Decisión Discreta (MDD) especifica (McFadden, 1973, 1976 y 1981; Yadlin, 1985; Yadlin y Arellano, 1987)

$P_n(i)$ = Probabilidad con que un individuo en el estrato n elige el objeto i, $\quad i = 1, 2, ..., J, \quad n = 1, 2, ..., N$.

Se asume que estas probabilidades son funciones de variables exógenas y de parámetros.

$$P_n(i) = P_n(i; Z_n(j), j \epsilon G; \theta),$$

donde los $Z_n(j), j \epsilon G$, son vectores Kx1 de variables explicativas y θ es un vector de parámetros.

El objetivo de este trabajo es la generalización de ciertos modelos para información de corte transversal a modelos para información de corte longitudinal o en paneles. Es decir, a partir de modelos para datos sobre elecciones de una muestra en un período de tiempo, generar modelos para datos sobre elecciones de una misma muestra en varios períodos de tiempo.

Los modelos generados deben satisfacer tres criterios: (i) Deben constituír Modelos de Utilidad Aleatoria (MUA), o sea, deben ser consistentes con el principio de maximización de utilidad. (ii) Deben exhibir una expresión funcional cerrada para las probabilidades de decisión y presentar tractabilidad analítica y computacional. (iii) El modelo de referencia debe ser el Modelo Logit (ML) (McFadden, 1979; Yadlin, 1985a), que representa la metodología prevaleciente de estudios en los que se aplican MUA, por su forma cerrada y simple. Sin embargo, el ML no permite considerar interrelaciones entre los bienes en G. Se construyen entonces, modelos que corresponden a generalizaciones paramétricas del ML. Es decir, se introduce un parámetro α que involucra dependencias entre los bienes $j \epsilon G$. Cuando $\alpha = 0$, el modelo obtenido se reduce al ML original. Así, la evaluación del ML en cualquier situación práctica se puede realizar por medio de procedimientos estadísticos de test de la hipótesis alternativa $\alpha \epsilon A \subset R^L$. Cabe notar que esto no se puede efectuar cuando el modelo alternativo es disjunto del ML, por ejemplo, el Modelo Probit (Hausman y Wise, 1978), como se aprecia en la Figura 1.

ACTAS DEL VI CONGRESO CHILENO DE INGENIERIA DE TRANSPORTE, 1993
SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA DE TRANSPORTE

ML Generalizados
$H_1 : \alpha \epsilon ACR^L$

Modelo Probit
H_1 :?

$H_0 : \alpha = 0$

H_0 :?

ML

ML

Figura 1
Modelos que anidan al ML y disjuntos del ML.

Hay dos tipos de interrelaciones por introducir: (i) Dependencias entre los bienes en un punto fijo del tiempo. Por ejemplo, sustituíbilidad. Esto se ha logrado en investigaciones anteriores, (Yadlin, 1991). (ii) Dependencias entre los bienes en distintos puntos del tiempo. Por ejemplo, correlación serial.

2 REVISION DE RESULTADOS PREVIOS

2.1 Modelos de Utilidad Aleatoria

Un MUA supone que existe una función vectorial que refleja las preferencias de un usuario.

Sea $U_n(i)$ = Utilidad asociada al bien $i \epsilon G$ por los sujetos del estrato $n, i = 1, 2, ..., J, \quad n = 1, 2, ..., N$,

$$U_n(i) = V_n(i) + \epsilon_n(i), \tag{1}$$

$V_n(i)$ es determinística,

$\epsilon_n(i)$ es aleatoria,

con

$V_n(i) = (Z_n(i))^T \beta$,

β es un vector Kx1 de parámetros.

Se postula que un usuario en el estrato n elige el bien i si y sólo si

$$\mathrm{U}_n(i) > \mathrm{U}_n(j), \forall j \epsilon\, G - \{i\}. \tag{2}$$

Se denota por F la Función de Distribución Acumulativa (FDA) de $\epsilon_n = (\epsilon_n(j); j\epsilon G)$, por F^j la FDA marginal de $\epsilon_n(j)$, por $\Delta_n(i) = (\epsilon_n(j) - \epsilon_n(i); j\epsilon G - \{i\})$, por $F^{\Delta_n(i)}$ la FDA de $\Delta_n(i), 1 = 1, 2, ..., J, n = 1, 2, ..., N$. Nótese que F determina F^j, pero no viceversa e igualmente, que F determina $F^{\Delta_n(i)}$, pero no viceversa.

Se asume que

$F = F(\alpha)$,

Cuando $\alpha = 0, \quad F = \Pi_{j\epsilon G} F^j$.

El parámetro de interés es $\theta = (\alpha^T, \beta^T)^T$.

De (1) y (2) se tiene

$P_n(i) = P_r(\Delta_n(i) < V_n(i) - V_n(j); j\epsilon G - \{i\})$,

$$P_n(i) = F^{\Delta_n(i)}(V_n(i) - V_n(j); j\epsilon G - \{i\}). \tag{3}$$

De (3) se desprende que hay dos métodos para derivar un MUA. (i) Especificar F y deducir $F^{\Delta_n(i)}$. (ii) Especificar $F^{\Delta_n(i)}$ directamente. Ambos métodos no son equivalentes, ya que de F se deduce $F^{\Delta_n(i)}$ en forma única, pero pueden existir varias F que corresponden a la misma $F^{\Delta_n(i)}$, como se verá en las próximas secciones.

2.2 Modelos Logit

Para distinguir los ML, se denotan las probabilidades de selección por $Q_n(i), i = 1, ..., J, \quad n = 1, ..., N$.

Se tiene que

$$Q_n(i) = \exp\{V_n(i)\} / \sum_{j\epsilon G} \exp\{V_n(j)\} \tag{4}$$

Los $Q_n(i)$ tienen una forma cerrada simple, pero presentan el inconveniente de que las chances relativas de elegir i sobre j son independientes de otras alternativas disponibles a los usarios.

Condiciones para derivar el ML como MUA se enumeran a continuación.

Una condición necesaria es que $\alpha = 0$.

Una condición suficiente y necesaria es que $\Delta_n(i)$ tenga FDA Logística Multivariada (Yadlin, 1991)

$$F^{\Delta_n(i)}(x_j; j\epsilon G - \{i\}) = (1 + \sum_{j\epsilon G - \{i\}} \exp\{-x_j\})^{-1}. \quad (5)$$

Condiciones suficientes, pero no necesarias son las siguientes:

ϵ_n tiene FDA Logística Multivariada o $\epsilon_n(i), i = 1, ..., J$, son independientes idénticamente distribuídos con FDA Valor Extremo, o sea

$$F(x_j, j\epsilon G) = (1 + \sum_{j\epsilon G} \exp\{-x_j\})^{-1} \quad (6)$$

o

$$F(x_j, j\epsilon G) = \Pi_{j\epsilon G} F^j(x_j) \quad (7)$$

con

$$F^j(x_j) = \exp\{-e^{x_j}\}. \quad (8)$$

Así hay por lo menos dos FDA para ϵ_n que son compatibles con una FDA Logística Multivariada para $\Delta_n(i)$.

Típicamente, se toma la FDA de Valor Extremo dada en (8) como la generadora de los ML.

2.3 Generalización para Información Transversal

Incorporando el parámetro α, los $\epsilon_n(j), j\epsilon G$, se toman como variables dependientes entre sí de la siguiente manera: Se generaliza la FDA F que determina los $P_n(i)$, manteniendo fijas la FDA marginales F^j (Yadlin, 1987 y 1991)

$$F(x_j; j\epsilon G) = \Pi_{j\epsilon G} F^j(x_j)\{1 + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \Pi_{k\epsilon B_m}(1 - F^k(x_k))\}, \quad (9)$$

donde $B_m \subset G, \cup_{m=1}^{M} B_m = G$, los B_m son subconjuntos de alternativas relacionadas y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_M)$ es un parámetro de dependencias con

$$1 + \sum_{m=1}^{m} \alpha_m C_m \geq 0, C_m = \pm 1. \tag{10}$$

Es fácil comprobar que cuando $\alpha = 0$, $F = \Pi_{j \epsilon G} F^j$.

Tomando F^j como la FDA Valor Extremo dada en (8), se obtiene un ML transversal generalizado

$$P_n(i) = Q_n(i)\{1 + A_n(i;\alpha)\}, i = 1, ..., I, n = 1, ..., N, \tag{11}$$

donde los $A_n(i)$ son funciones simples de los $Q_n(j)$ y de α (son lineales en los α_m).

Si $\alpha = 0$ entonces $A_n(i) = 0$ y, por lo tanto, $P_n(i) = Q_n(i)$.

3 GENERALIACION PARA INFORMACION EN PANELES

3.1 Preliminares

Los MUA discutidos en la sección 2 constituyen MDD estáticos. En consecuencia, no son adecuados para estudiar decisiones discretas a través del tiempo, por ejemplo, selecciones de un modo de transporte por una muestra de usuarios, a medida que se va construyendo el Metro (Arellano, 1990). Estas situaciones requieren de MDD dinámicos, que capturen la naturaleza intertemporal de las decisiones, cuando se tiene información en paneles. Entre los autores que han tratado este problema se encuentran Daganzo y Sheffi (1979); Heckman (1981); Hensher y Johnson (1977 y 1981); Johnson y Hensher (1982); Maddala (1987) y Rust (1988).

La extensión de ML transversales a ML longitudinales aplicando formulaciones análogas a (9), se explica a continuación. (En lo que sigue se omite el subíndice n).

Considere $t = 1, 2, ..., T$ períodos. Sea C_t el conjunto de alternativas disponibles a la muestra de usuarios en el período t. El conjunto de selección en los T períodos es $G = X_{t=1}^{T} C_t = C^T = \{I = (i_1, i_2, ..., i_T) : i_t \epsilon C_t, t = 1, 2, ..., T\}$.

Sea

ACTAS DEL VI CONGRESO CHILENO DE INGENIERIA DE TRANSPORTE, 1993
SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA DE TRANSPORTE

$$
\begin{aligned}
U_t(i) &= \text{Utilidad asociada a } i \epsilon C \text{ en el tiempo t, } t = 1, 2, ..., T, \\
U_t(i) &= V_t(i) + \epsilon_t(i) \\
&= (Z_t(i))^T \beta + \epsilon_t(i).
\end{aligned}
$$

Se deben considerar dos tipos de dependencias entre los $\epsilon_t(i)$, $i \epsilon C$, $t = 1, 2, ..., T$. (i) Dependencias entre distintos bienes en un período de tiempo, denotadas por α_1. (ii) Dependencias entre los mismos bienes o entre distintos bienes en más de un período de tiempo denotadas por (α_2, α_3). Estas relaciones se esquematizan en la Figura 2.

$\epsilon_t(i)$	α_2	$\epsilon_s(i)$
α_1	α_3	α_1
$\epsilon_t(j)$	α_2	$\epsilon_t(j)$

Figura 2
Dependencias entre las perturbaciones $\epsilon_t(i)$

Sea

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$\epsilon_t = (\epsilon_t(j); j \epsilon C)$, el vector de perturbaciones en el tiempo t,

$\epsilon = (\epsilon_t; t = 1, 2, ..., T)$, todo el vector de perturbaciones,

F_t^j la FDA de $\epsilon_t(j)$, $F_t(\alpha_1)$ la FDA de ϵ_t y $F(\alpha)$ la FDA de ϵ.

Es deseable que si $(\alpha_2, \alpha_3) = 0$, se obtenga $F(\alpha) = F(\alpha_1) = \Pi_{t=1}^{T} F_t(\alpha_1)$ y que si $\alpha = 0$, se obtenga $F(\alpha) = F(0) = \Pi_{t=1}^{T} \Pi_{j \epsilon C} F_t^j$.

En el tiempo t, el MUA está dado por

$$P_t(i) = P_r(U_t(i) > U_t(j); \forall j \epsilon C - \{i\}), \quad i \epsilon C, \tag{12}$$

probabilidades que quedan determinadas por $F_t(\alpha_1)$.

Para los T períodos, el MUA queda dado por

$$P_{1,2,...,T}(I) = P_r(\cap_{t=1}^{T} [U_t(i_t) > U_t(j), \forall j \epsilon C - \{i_t\}]), \quad I \epsilon G, \tag{13}$$

probabilidades que quedan determinadas por $F(\alpha)$.

Si $(\alpha_2, \alpha_3) = 0$, es conveniente que $P_{1,2,\ldots,T}(I) = \Pi_{t=1}^{T} P_t(i_t)$.

3.2 El Modelo para dos Bienes y para dos Períodos

En este caso $C = \{1,2\}$, $T = 2$ $(s, s+1)$, $G = \{1,2\}^2 = \{(i_s, i_{s+1}) : i_t =$ 1 ó 2, $t = s, s+1\}$

Es necesario considerar los siguientes MUA

$$P_{s.}(i) = Pr(i_s = i), \quad i \epsilon C, \tag{14}$$

$$P_{.s+1}(i) = Pr(i_{s+1} = i), \quad i \epsilon C, \tag{15}$$

$$P_{s,s+1}(i,j) = Pr(i_s = i, i_{s+1} = j), \quad (i,j) \epsilon C^2. \tag{16}$$

La relación entre (14), (15) y (16) se muestra en la Figura 3.

		i_{s+1}: 1	2	
i_s	1	$P_{s,s+1}(1,1)$	$P_{s,s+1}(1,2)$	$P_{s.}(1)$
	2	$P_{s,s+1}(2,1)$	$P_{s,s+1}(2,2)$	$P_{s.}(2)$
		$P_{.s+1}(1)$	$P_{.s+1}(2)$	1

Figura 3
Relaciones entre los MUA para dos bienes y dos períodos

Observando la Figura 3, resulta obvio que basta considerar los MUA asociados a uno de los bienes. Se toma, entonces, el bien 2 como base.

Para cualquier función f sea

$$
\begin{aligned}
\Delta f_t &= f_t(1) - f_t(2), \quad t = s, s+1, \\
\Delta f &= (\Delta f_s, \Delta f_{s+1}),
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
\Delta U_t &= \Delta V_t + \Delta \epsilon_t \\
&= (\Delta Z_t)^T \beta + \Delta \epsilon_t, \quad t = s, s+1.
\end{aligned}
$$

Si $F^{\Delta\epsilon_t}(\alpha_1)$ denota la FDA de $\Delta\epsilon_t$, $t = s, s+1$ y $F^{\Delta\epsilon}(\alpha)$ denota la FDA de $\Delta\epsilon$, se sabe que ambas quedan determinadas por $F(\alpha)$.

Los MUA asociados al bien 2 son

$$
\begin{aligned}
P_{s.}(2) &= Pr(\Delta\epsilon_s < -\Delta V_s) \\
&= F^{\Delta\epsilon_s}(-\Delta V_s; \alpha_1),
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{.s+1}(2) &= Pr(\Delta\epsilon_{s+1} < -\Delta V_{s+1}) \\
&= F^{\Delta\epsilon_{s+1}}(-\Delta V_{s+1}; \alpha_1),
\end{aligned} \tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{s,s+1}(2,2) &= Pr(\Delta\epsilon < -\Delta V) \\
&= F^{\Delta\epsilon}(-\Delta V; \alpha).
\end{aligned} \tag{19}
$$

(17), (18) y (19) sugieren que, al igual que en el caso transversal, hay dos métodos para construír un MUA longitudinal. (i) Método indirecto. Especificar las FDA marginales F_t^j, $j = 1,2$, $t = s, s+1$ y aplicar un fórmula como (9) para derivar $F(\alpha)$. Luego, deducir $F^{\Delta\epsilon_t}(\alpha), t = s, s+1$ y $F^{\Delta\epsilon}(\alpha)$ de $F(\alpha)$, usando el teorema del Jacobiano. (ii) Método directo. Especificar las FDA marginales $F^{\Delta\epsilon_t}(\alpha), t = s, s+1$ y aplicar una fórmula como (9) para derivar $F^{\Delta\epsilon}(\alpha)$. Nuevamente, cabe notar que ambos métodos no son equivalentes. En ambos casos, se obtiene la generalización del ML transversal a un ML longitudinal, especificando FDA marginales adecuadas.

Por razones de espacio, se detallan los desarrollos correspondientes al método directo y sólo se esbozan aquellos relacionados al método indirecto.

3.3 Generalización del Modelo Logit a un Modelo para dos Bienes y dos Períodos por el Método Directo

Es importante observar que, debido a que hay dos bienes y se están considerando sólo las diferencias de las perturbaciones correspondientes a ellos, es imposible incorporar el parámetro α_1 de dependencias transversales. Asimismo, los parámetros α_2 y α_3 de dependencias longitudinales se confunden en un sólo parámetro $\alpha^{\Delta\epsilon} \cdot \alpha^{\Delta\epsilon}$ representa la relación entre $\Delta\epsilon_1$ y $\Delta\epsilon_{s+1}$. Aquí, entonces, $\alpha = \alpha^{\Delta\epsilon}$.

Adaptando (9) se obtiene

$$
\begin{aligned}
F^{\Delta\epsilon}(x_s, x_{s+1}; \alpha^{\Delta\epsilon}) &= \Pi_{t=s}^{s+1} F^{\Delta\epsilon_t}(x_t)\{1 + \\
&+ \alpha^{\Delta\epsilon}\Pi_{t=s}^{s+1}(1 - F^{\Delta\epsilon_t}(x_t))\},
\end{aligned} \tag{20}
$$

donde, de (10)

$$
|\alpha^{\Delta\epsilon}| \leq 1. \tag{21}
$$

En consecuencia, $\Delta\epsilon_s$ y $\Delta\epsilon_{s+1}$ son independientes si y sólo si $\alpha^{\Delta\epsilon} = 0$.

Reemplazando (20) en (19) y usando (17) y (18)

$$
P_{s,s+1}(2,2) = P_{s.}(2)P_{.s+1}(2)\{1 + \alpha^{\Delta\epsilon}(1 - P_{s.}(2))(1 - P_{.s+1}(2))\} \tag{22}
$$

De (22) se deduce que

$$
\begin{array}{llllll}
P_{s,s+1}(2,2) & > & P_{s.}(2)P_{.s+1}(2) & \text{(dependencia positiva)} & \Longleftrightarrow \alpha^{\Delta\epsilon} & > \; 0 \\
 & = & & \text{(independencia)} & & = \\
 & < & & \text{(dependencia negativa)} & & <
\end{array}
$$

Para adaptar una definición de correlación entre variables binarias (Bishop, Fienberg y Holland, 1971) a una definición de correlación serial se toma

$$
Y_t(2) = \begin{cases} 1 & \text{si se elige 2 en el periodo t} \\ 0 & \text{si no (si se elige 1),} \\ & t = s, s+1 \end{cases}
$$

Entonces

$$
\rho(Y_s, Y_{s+1}) = \text{Correlación}(Y_s, Y_{s+1}) \propto P_{s,s+1}(2,2) - P_{s.}(2)P_{.s+1}(2). \tag{23}
$$

Por lo tanto, $\rho(Y_s, Y_{s+1}) \propto \alpha^{\Delta\epsilon}$ y

$$\begin{array}{llll}\rho(Y_s, Y_{s+1}) & > & 0 \iff \alpha^{\Delta t} & > 0 \\ & = & & = \\ & < & & < \end{array}$$

Tomando $F^{\Delta\epsilon_t}, t = s, s+1$ como la FDA Logística dada en (6) y utilizando (17), (18) y (19) y la Figura 3 se obtiene el ML Longitudinal

$$P_{s,s+1}(i,j) = Q_{s.}(i)Q_{.s+1}(j)\{1 + (-1)^{1-\delta_{ij}}\alpha^{\Delta t}(1 - Q_{s.}(i))(1 - Q_{.s+1}(j))\}, \quad i,j = 1,2, \tag{24}$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

$$Q_{s.} = \exp\{V_s(i)\} / \sum_{k=1}^{2} \exp\{V_s(k)\}. \tag{25}$$

$$Q_{.s+1}(j) = \exp\{V_{s+1}(j)\} / \sum_{k=1}^{2} \{V_{s+1}(k)\}. \tag{26}$$

Por ende,

$$P_{s,s+1}(i,j) = Q_{s.}(i)Q_{.s+1}(j) \iff \alpha^{\Delta t} = 0, \tag{27}$$

En (27), se asevera que el ML longitudinal se reduce al producto de los ML transversales para los períodos s y $s+1$ si y sólo si el parámetro de dependencia longitudinal se anula.

Finalmente, cabe notar que hay varias especificaciones para F que resultan en FDA Logística para $F^{\Delta\epsilon_t}$, $t = s, s+1$. Así, F puede ser la FDA Logística Multivariada dada en (6) o los $\epsilon_t(i)$, $i = 1,2$, $t = s, s+1$ pueden ser independientes, idénticamente distribuídos como en (7), donde F_t^i es la FDA Valor Extremo dada en (8).

3.4 Generalización del Modelo Logit a un Modelo para dos Bienes y dos Períodos por el Método Indirecto

Con este método es factible incorporar $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, donde $\alpha_1 = (\alpha_{t,t}(1,2); t = s, s+1)$ son parámetros de dependencias transversales entre los dos bienes en cada período, $\alpha_2 = (\alpha_{s,s+1}(i,i); i = 1,2)$ son parámetros de dependencia entre los dos períodos para un mismo bien y $\alpha_3 = (\alpha_{s,s+1}(i,j), i,j = 1,2, \quad i \neq j)$ son parámetros de dependencias entre los dos períodos para bienes distintos.

Fijando marginales F_t^j para $\epsilon_t(j), \quad j = 1,2, \quad t = s, s+1$ y aplicando (9), se genera

$$
\begin{aligned}
F(x_t(i); i = 1,2, t = s, s+1; \alpha) \; = \; & \Pi_{t=s}^{s+1}\Pi_{i=1}^{2} F_t^i(x_t(i))\{1 + \\
& + \sum_{t=s}^{s+1} \alpha_{t,t}(1,2)(1 - F_t^1(x_t(1))(1 - F_t^2(x_t(2)) + \\
& + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \alpha_{s,s+1}(i,j)(1 - F_t^i(x_t(i))(1 - F_t^j(x_t(j))\}, \quad (28)
\end{aligned}
$$

donde la restricción (10) se escribe como

$$
\begin{aligned}
1 + \sum_{t=s}^{s+1} \alpha_{t,t}(1,2)C_{t,t}(1,2) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \alpha_{s,s+1}(i,j)C_{s,s+1}(i,j) \geq 0, \\
C_{r,t}(i,j) = \pm 1, \quad i,j = 1,2, \quad r,t = s,s+1, \quad r \leq t. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Como las expresiones genéricas para las probabilidades en (17), (18) y (19) y para la correlación serial en (23) son muy engorrosas, se procede a asumir que F_t^j es la FDA de Valor Extremo dada en (8).

Reemplazando (8) en (28), se obtiene F y luego, usando el teorema del Jacobiano, se deducen $F^{\Delta\epsilon_t}, t = s, s+1$ y $F^{\Delta\epsilon}$. Es interesante notar que $F^{\Delta\epsilon_t}, t = s, s+1$ son FDA Logísticas como en la Sección anterior sólo cuando $\alpha_1 = 0$, o sea, cuando los $\epsilon_t(j), j = 1,2$, son contemporáneamente independientes en cada período $t = s, s+1$.

Debido a que $\rho(Y_s, Y_{s+1})$ tiene una forma funcional complicada en términos de α, al calcularlo sólo se distingue lo que ocurre cuando $\alpha = 0$, lo que sucede si y sólo si $\rho(Y_s, Y_{s+1}) = 0$. Nótese que se requiere $\alpha_1 = 0$ y no sólo $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ para que el coeficiente ρ sea cero.

Como indicador adicional de la correlación serial, el método indirecto permite calcular también $\rho(\Delta\epsilon_s, \Delta\epsilon_{s+1}) =$ Correlación $(\Delta\epsilon_s, \Delta\epsilon_{s+1})$.

De las fórmulas para las FDA y para $\rho(\Delta\epsilon_s, \Delta\epsilon_{s+1})$, se concluye que $\Delta\epsilon_s$ y $\Delta\epsilon_{s+1}$ son independientes si y sólo si $\alpha = 0$. Sin embargo, que $\rho(\Delta\epsilon_s, \Delta\epsilon_{s+1})$ sea cero no implica independencia. Además, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ no lleva a independencia entre $\Delta\epsilon_s, \Delta\epsilon_{s+1}$, siendo necesario que $\alpha_1 = 0$ también. O sea, la dependencia contemporánea impide la independencia intertemporal.

Ahora, reemplazando $F^{\Delta\epsilon_t}, t = s, s+1$ y $F^{\Delta\epsilon}$ en (17), (18) y (19) y combinando con la Figura 3, se tiene que

$$
P_{s,s+1}(i,j) = Q_{s.}(i)Q_{.s+1}(j)\{1 + A_{s,s+1}(i,j;\alpha)\}, \qquad (30)
$$

donde $Q_{s.}(i)$ y $Q_{.s+1}(j)$ están dados en (25) y (26) y $A_{s,s+1}(i,j;\alpha)$ es una función simple de estas probabilidades y lineal en α.

Al inspeccionar la expresión completa para $A_{s,s+1}(i,j;\alpha)$, se advierte que

$$P_{s,s+1}(i,j) = Q_{s.}(i)Q_{.s+1}(j) \Longleftrightarrow \alpha = 0 \tag{31}$$

Sin embargo, (31) no se cumple si sólo $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ a menos que $\alpha_1 = 0$ también. O sea, se requiere de independencia completa entre los $\epsilon_t(j), j = 1,2, \quad t = s, s+1$, para que el ML Longitudinal se reduzca al producto de los ML transversales.

4 CONCLUSIONES

Inspeccionando ambos ML Longitudinales aquí desarrollados, resulta evidente que los dos poseen tractabilidad analítica y computacional, pudiendo expresarse como funciones simples de ML transversales y lineales en los parámetros de dependencia. El ML alcanzado con el método directo tiene la ventaja de exhibir una forma funcional mucho más simple, mientras que el ML obtenido con el método indirecto es superior en cuanto a la flexibilidad con que permite la especificación de diferentes patrones de dependencias.

No obstante, cuando existen sólo dos bienes, el hecho de que el primer modelo acepte introducir sólo dependencias intertemporales, sin diferencias entre los bienes, puede no traducirse en un inconveniente tan grave. Esto se debe a que como no hay terceras alternativas contra las cuales contrastar las dos disponibles, es virtualmente imposible distinguir una relación entre ellas. Más aún, se han desarrollado modelos transversales para $J = 2$, en los cuales el parámetro de dependencia α queda incorporado a la función de utilidad, confundiéndose con el parámetro β, lo que hace infactible su identificación. Por ejemplo, el Modelo de Valor Extremo Generalizado (McFadden, 1979).

Gracias a que los dos ML longitudinales anidan al modelo constituído por el producto de ML transversales, el test de la hipótesis que este último es el modelo verdadero se puede realizar utilizando procedimientos de máxima verosimilitud. Así, el test de la razón de máxima verosimilitud se aplica para docimar la hipótesis nula que $\alpha = 0$ versus la hipótesis alternativa que $\alpha \epsilon\ A \ \subset R^L$ con $0 \epsilon A$. En el caso del método directo, A queda dado por (21) y en el caso del método indirecto, por (29). Hay que advertir que no se pueden llevar a cabo dócimas para comparar ambos ML longitudinales, ya que estos constituyen modelos disjuntos.

Cabe notar que las restricciones (21) y (29) son necesarias para que las funciones generadas en base a (9) sean FDA y, por lo tanto, para que los modelos producidos sean MUA. En realidad, (21) y (29) pueden relajarse, manteniéndose los modelos (24) y (30) como MDD, en el sentido que (24) y (30) continúan formando un sistema de probabilidades. Sin embargo, estos ya no son MUA, porque (20) y (28), en las cuales se originan, dejan de cumplir con todas las condiciones de una FDA.

Siguiendo en el marco de test de hipótesis, se llevó a cabo un estudio computacional de la siguiente manera: Se asignan valores a α y a $Q_t(i)$, $i = 1, 2$, $t = s, s+1$. Usando el método de Yadlin (1991), se simulan las decisiones $I_n = (i_{sn}, i_{s+1,n})$ para 100 usuarios, basándose en tres modelos de decisión: (i) Un modelo que es el producto de ML transversales. Aquí $\alpha = 0$ con $P_{s,s+1,n}(i,j) = Q_{s.,n}(i)Q_{.s+1,n}$. (ii) Un ML longitudinal derivado por el método directo. Aquí $\alpha = \alpha^{\Delta t}$ con $P_{s,s+1,n}$ dadas en (24). (iii) Un modelo longitudinal derivado por el método indirecto. Aquí $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ con $P_{s,s+1,n}(i,j)$ dadas en (30). Luego, en cada una de las tres instancias, se extraen 20 muestras de tamaño 25 de la población de 100 decisiones ya generadas y se calibran los modelos pertinentes, por método de máximo verosimilitud. El test de la razón de máxima verosimilitud detecta cuál es el modelo verdadero por lo menos un 97% de las veces en los tres escenarios. Además, el producto de ML transversales se ajusta peor a los datos en las situaciones (ii) e (iii) de lo que lo hacen los ML longitudinales en la situación (i). Estos resultados no son concluyentes, debido a la naturaleza reducida del experimento.

Finalmente, hay que mencionar que los ML longitudinales aquí construídos presentan dos limitaciones. Primero, sirven sólo para dos puntos del tiempo. Segundo, consideran sólo dos bienes. La primera limitación es relativamente menor, ya que en la mayoría de las investigaciones empíricas se dispone de datos tomados en sólo dos períodos, correspondientes a decisiones observadas antes y después de un tratamiento. Por ejemplo, una campaña publicitaria, un alza de precios o una modificación de los recorridos de la locomoción pública. En todo caso, si hay que tomar en cuenta más de dos períodos, una solución razonable es postular, tal como lo hacen Bishop, Fienberg y Holland (1971) en sus modelos para Tablas de Contingencia, una estructura Markoviana para el proceso de decisión. O sea, se supone que el mecanismo probabilístico es tal que la decisión en el punto t depende sólo de la decisión en el tiempo $t-1$. La segunda limitación es más seria. La extensión a cualquier número de bienes, cuando existe sólo dependencia por pares, no debería presentar mayores dificultades. El desafío mayor se encuentra en la extensión de los ML longitudinales, cuando las interrelaciones involucran a más de un par de alternativas.

En resumen, se puede concluír que la línea de investigación abierta en este trabajo constituye un punto de partida prometedor, en lo que se refiere a la construcción de modelos para problemas acerca de elecciones longitudinales discretas.

5 Bibliografia

Arellano R. (1990) Modelos de Elección Discreta para Información en Paneles, Tesis de Magister, Departamento de Probabilidad y Estadística, Pontificia Universidd Católica de Chile.

Bishop Y.M., Fienberg S.E. y Holland P.W. (1976) **Discrete Multivariate Analysis -**

Theory and Practice, MIT Press, Cambridge, MA.

Daganzo C. y Sheffi Y. (1980) Estimation of Discrete Choice Models from Panel Data, 59^{th} Anual Meeting of the Transportation Research Board, Washington D.C.

Hausman J.A. y Wise D.A. (1978) A Conditional Probit Model for Qualitative Choice: Discrete Decisions Recognizing Interdependence and Heterogeneous Preferences, **Econometric 46**, 403-426.

Heckman J.J. (1981) Statistical Models for Discrete Panel Data, en C. Mansky y D.McFadden (eds.) **Structural Analysis of Discrete Data with Econometric Applications**, MIT Press, Cambridge, MA.

Hensher D.A. y Johnson L. (1977) A Two-Period Analysis of Commuter Model Choice: The Predictive Capability of Individual Choice Models, **Transportation Review 13**, 361-375.

Hensher D.A. y Johnson L. (1981) **Applied Discrete Choice Modelling**, Croom Helm, London.

Johnson L. y Hensher D.A. (1982) Application of Multivariate Probit to a Two-Period Panel Data Set. **Transportation Research A 16**, 457-464.

Maddala G.S. (1987) Recent Developments in the Econometrics of Panel Data Analysis, **Transportation Reseach A 21**, 303-326.

McFadden D. (1973) Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior, en P. Zarembka (ed.) **Frontiers in Econometrics**, Academic Press.

McFadden D. (1976) Quantal Choice Analysis: A Survey, **Annals of Social and Economics Measurement 5**, 363-390.

McFadden D. (1979) Quantitative Methods for Analyzing Travel Behavior of Individuals: Some Recent Developments, en D.A. Hensher y P.R. Stopher (eds.) **Behavioural Travel Modelling**, Croom Helm, London.

McFadden D. (1981) Econometric Models of Probabilistic Choice, en D.A. Hensher y P.R. Stopher (eds.) **Behavioural Travel Modelling**, Croom Helm, London.

Rust J. (1988) Statistical Models of Discrete Choice Processes, **Transportation Research B 22**, 125-158.

Yadlin M. (1985a) Development of a Model for Probabilistic Discrete Decisions, Tesis de Ph.D., Department of Statistics, University of California, Berkeley.