ESTIMACION DEL ERROR DE PREDICCION EN MODELOS DE ELECCION DISCRETA

Eduardo Valenzuela Freraut
Consultores en Ingeniería de Transporte, CITRA Ltda. Casilla 52301 Santiago, Chile.

RESUMEN

Uno de los principales problemas que surge cuando se analizan políticas dirigidas a modificar el sistema de transporte, corresponde a la predicción del comportamiento de los usuarios como respuesta a los posibles cambios que se produzcan. En este contexto, los modelos de elección discreta, basados en la teoría de la utilidad aleatoria y formulados de acuerdo a una estructura conductual de los usuarios del sistema de transporte, han mostrado ser una herramienta eficaz. Particularmente en Chile, se distinguen estudios de transporte urbano y recientemente interurbano (Véjar, 1993; Vera, 1993) relacionados con el valor subjetivo del tiempo, políticas de tarificación, análisis de alternativas y planificación, entre otros.

La estimación de los parámetros de los atributos asociados a la función de utilidad, se hace normalmente utilizando la técnica de máxima verosimilitud. Convertir los intervalos de confianza de los parámetros en el intervalo de confianza de la probabilidad de elección presenta dificultades, ya que la relación entre ambos es no lineal. Existen diversos métodos de estimación de estos intervalos (Horowitz, J. 1979; Koppelman, F. 1976), destacando tres de ellos. El primero consiste en aproximar la probabilidad de elección según una expansión en serie de Taylor de primer orden, linealizando la relación entre los parámetros y la probabilidad de elección. El segundo método se fundamenta en la programación no lineal, existiendo diversas formas de formular el problema. Por último, el tercer método es desarrollado a partir de la teoría de propagación de errores. Todos estos requieren excesivo recurso computacional y son de estimación bastante dificultosa (Daganzo, 1979).

El objetivo del estudio es estimar empíricamente el intervalo de confianza (en adelante, IC), el método de trabajo está sustentado en la técnica de Montecarlo, siendo la información relevante los valores de los coeficientes asociados a la función de utilidad (esperanza estimada) y sus respectivos errores estándar.

Se concluye que el IC estimado por este método, para un nivel de significancia estadística dado, es un buen indicador del error de predicción y presenta ventajas comparativas respecto de los métodos tradicionales, en cuando a recursos computacionales y dificultad de estimación.

ACTAS DEL VI CONGRESO CHILENO DE INGENIERIA DE TRANSPORTE, 1993
SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA DE TRANSPORTE

1. INTRODUCCION.

Para estudiar el comportamiento y estructura de preferencias de usuarios frente a un grupo de alternativas específicas (elección de modo de transporte y elección de ruta, por ejemplo), se ha utilizado el marco de la teoría de la utilidad aleatoria, el cual supone que las elecciones de los consumidores pueden representarse por una componente fija, función de un vector de atributos observados, y una componente variable que refleja los gustos particulares de cada individuo, como también los errores de medición u observación por parte del modelador.

La forma usualmente adoptada para la componente fija es suponerla lineal en los atributos. En cambio, la componente variable puede ser tratada como una variable aleatoria por lo cual, sólo es posible determinar la probabilidad de elección de la alternativa. En este contexto, el modelo generado depende de la forma funcional que se adopte para la variable aleatoria. Los modelos de mayor uso en este campo son Logit y Probit, que se obtienen de asumir una distribución Gumbel y una Normal, respectivamente para los residuos.

Al adoptar el modelo Logit se obtiene la siguiente forma funcional para la probabilidad (P_{ij}) de que el individuo i elija la alternativa j entre N alternativas disponibles:

$$P_{ij} = \frac{e^{V_{ij}}}{\sum_{k=1}^{N} e^{V_{ik}}} \tag{1}$$

con:

$$U_{ij} = V_{ij} + \epsilon_{ij} \tag{2}$$

$$V_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \beta_{ik} \cdot X_{ikj} \tag{3}$$

donde V_{ij} es la componente fija - con parámetros β_{ik} y atributos X_{ikj} - y ϵ_{ij} es la componente variable de la función de utilidad U_{ij}.

Existen diversas técnicas para la estimación de los parámetros de la función de utilidad, dependiendo del tipo de experimento que se esté realizando. Pearmain y Kroes (1990) agrupan en cuatro las técnicas más utilizadas: Método gráfico, Análisis Monotónico de la Varianza, Técnicas de regresión y Modelos de elección discreta.

Cual de éstos utilizar depende de diversos criterios, entre los que se destacan: la escala de medida de la variable de preferencias, el diseño experimental, el nivel de agregación deseado de los resultados, la forma funcional de la utilidad, la disponibilidad de software de estimación y el propósito del estudio (Kroes y Sheldon, 1988; MVA et. al. 1987; Morikawa, 1990).

La técnica de máxima verosimilitud, es la más ampliamente utilizada en estudios de demanda de transporte. Independiente del método utilizado para estimar el vector de parámetros ß, existen diversos errores posibles de ocurrir, entre estos destacan:

- Inclusión de variables explicatorias irrelevantes;
- Variaciones aleatorias en los gustos y/o ingresos;
- Omisión de variables explicatorias relevantes;
- Variables explicatorias correlacionadas;

- **Diseño muestral erróneo;**
- **Forma funcional errónea,**

los que han sido estudiados extensivamente por Theil, 1971; Koppelman, 1976, 1976a; Bouthelier y Daganzo, 1979; y Reid, 1978, entre otros.

El presente trabajo de investigación esta enfocado a la elección de ruta en transporte interurbano e intenta profundizar en la estimación de intervalos de confianza para la probabilidad de elección, debido tanto a errores producidos en el diseño muestral del experimento de toma de información, como a información incompleta de las variables relevantes. La sección Nº2 describe brevemente los métodos teóricos normalmente utilizados para estos efectos. La sección Nº3 desarrolla un método alternativo basado en la técnica de Montecarlo, comparando los resultados obtenidos entre los diversos métodos a partir de un ejemplo numérico. Las principales conclusiones y líneas de investigación futura, se presentan en la sección Nº4.

2. METODOS TRADICIONALES.

Los errores de muestreo en los modelos de elección discreta, como en otros modelos econométricos, se deben a la necesidad de estimar los valores de los parámetros con información finita. Cuando éstos son estimados utilizando la técnica de máxima verosimilitud, se asume que los errores en los parámetros son asintóticamente distribuidos normalmente con media 0 y matriz de covarianzas estimada a partir de la derivada de la función de verosimilitud con respecto a los parámetros. Esta es la forma más adecuada de estimar los intervalos de confianza de las componentes del vector ß.

Convertir los IC de los parámetros en el IC de la probabilidad de elección presenta dificultades, ya que la relación entre el vector ß y P_{ij} es no lineal. Existe una diversidad de métodos para computar dicho intervalo, siendo los más relevantes los propuestos por Horowitz, J. (1979) quien aproxima la probabilidad de elección según una expansión en serie de Taylor de primer orden, linealizando la relación entre los parámetros y P_{ij}.

Denotando por P^* y P a la probabilidad de elección estimada y verdadera, respectivamente, se tiene que:

$$P^* = P + (\beta - b)' \cdot \frac{\partial P}{\partial b} \qquad (4)$$

donde b es el vector columna de los parámetros verdaderos.

Entonces, la varianza de P^* viene dada por :

$$V = \frac{\partial P}{\partial b'} \cdot A \cdot \frac{\partial P}{\partial b} \qquad (5)$$

donde A es la matriz de covarianza de b.

El valor numérico de V puede ser estimado sustituyendo b por ß en las derivadas. Entonces, si $Z(\epsilon/2)$ denota el percentil $1-\epsilon/2$ de la distribución Normal estándar al $100(1-\epsilon)$ porciento de confianza, el IC de P es:

$$P^* - Z(\epsilon/2) \cdot V^{1/2} \le P \le P^* + Z(\epsilon/2) \cdot V^{1/2} \qquad (6)$$

El segundo método se fundamenta en la programación no lineal, existiendo diversas formas de formular el problema. La alternativa más sencilla denota por $P_i(\beta)$ a la probabilidad de escoger la i-ésima alternativa - de entre J - cuando el vector de parámetros es β y el vector de atributos es fijo.

Definiendo $Q(b,\beta)$ como $(\beta - b)'A(\beta - b)$ y $b_i(\epsilon)$, $B_i(\epsilon)$ por el problema de programación no lineal siguiente:

$$[b_i(\epsilon),\ B_i(\epsilon)] = [Min,\ Max]\, P_i(\beta),\ i=1,..,J \tag{7}$$

sujeto a:

$$Q(b,\beta) \le \chi^2(\epsilon,\ M) \tag{8}$$

la solución del problema de minimización (maximización) permite obtener valores de β tal que las desigualdades:

$$b_i(\epsilon) \le P_i \le B_i(\epsilon),\quad i=1,..,J \tag{9}$$

definen conjuntamente un IC para P_i, con un nivel de significancia del $100(1-\epsilon)$ porciento.

Denotando una de las alternativas de elección por t, las variables $\{V_j - V_t;\ j=1,...,J_N;\ j \neq t\}$ son una combinación lineal de β. Bajo el supuesto que β es asintoticamente normalmente distribuido, las variables $\{V_j - V_t\}$ también lo son, con media $\{U_j - U_t;\ j=1,..J_N;\ j \neq t\}$ y matriz de covarianza C, donde:

$$C_{ij} = \sum_{r=1}^{J_N}\sum_{s=1}^{J_N} a_{rs}\cdot(X_{ir}-X_{tr})\cdot(X_{js}-X_{ts}) \tag{10}$$

Si existen sólo dos alternativas de elección (Logit Binario) la matriz C es un escalar. Entonces, si $Z(\epsilon/2)$ denota el percentil $1-\epsilon/2$ de la distribución Normal estándar al $100(1-\epsilon)$ porciento de confianza, el IC para $\{U_1 - U_2\}$ es

$$(V_1-V_2) - Z_{\epsilon/2}\cdot C^{1/2} \le (U_1-U_2) \le (V_1-V_2) + Z_{\epsilon/2}\cdot C^{1/2} \tag{11}$$

Denotando el lado izquierdo y derecho del intervalo por b y B respectivamente, el IC para la probabilidad de elección es

$$\begin{gathered} \frac{1}{1+e^{-b}} \le P_1 \le \frac{1}{1+e^{-B}} \\ \frac{1}{1+e^{B}} \le P_2 \le \frac{1}{1+e^{b}} \end{gathered} \tag{12}$$

Esta simple expresión para el IC existe sólo para modelos de elección Binarios.

Un método alternativo, desarrollado por Koppelman, F. (1976) permite estimar el error en la obtención de la probabilidad de elección a partir de la teoría de propagación de errores.

Sea $Z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, entonces la ecuación

$$e_Z^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot e_{x_i}^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot e_{x_i} \cdot e_{x_j} \cdot r_{ij} \qquad (13)$$

en que:

e_z	:	error de Z
e_{xi}	:	error asociado a variable x_i
r_{ij}	:	coeficiente de correlación entre x_i y x_j,

estima el error de la función Z, debido a los errores de las variables independientes. Esta ecuación es exacta si la función f es lineal, y una buena aproximación en otros casos (Beers, 1958).

Considerando el modelo Logit definido por la ecuación (1), derivando y reemplazando términos, se obtiene:

$$e_{P_j}^2 = (P_j \cdot (1-P_j))^2 \cdot [\sum_k \beta_k \cdot e_{x_k}^2 + \sum_k \sum_{j \neq k} \beta_k \cdot \beta_j \cdot e_{x_k} \cdot e_{x_j} \cdot r_{ij}] \qquad (14)$$

despreciando el término debido a correlación, la ecuación (14) se simplifica obteniéndose:

$$e_{P_j}^2 = (P_j \cdot (1-P_j))^2 \cdot \sum_k \beta_k \cdot e_{x_k}^2 \qquad (15)$$

ecuación que permite estimar el error en la determinación de la probabilidad de elección en forma rápida y sencilla si se conoce la matriz de correlación.

Si bien cualquiera de los métodos descritos permite estimar un IC para la probabilidad de elección, para un nivel de significancia dado (salvo ecuación Nº 15), el grado de exactitud de cada uno es incierto.

El ejemplo numérico siguiente considera dos alternativas de elección: camino pavimentado o camino de tierra. Los atributos relevantes son el tiempo de viaje, el valor del peaje (en el caso del camino pavimentado), la distancia recorrida y la constante rutal.

Cuadro Nº1 : Parámetros Estimados.

Atributo	Parámetro	Error Estándar	Estadístico T
Tiempo	-0.055842	0.01278	4.4
Peaje	-0.001061	0.00011	10.0
Distancia	-0.018665	0.01072	1.8
Cte.Rutal	-2.614600	0.22025	11.9
Rho^2 = 0.29	NºObs = 595		

Conociendo la matriz de correlación, la matriz de varianza-covarianza y el vector de parámetros ß, el IC de cada método es el detallado en Cuadro Nº2. Se ha considerado una variación del flujo (q) entre 100 y 2500 [Veh/Hr] para dos niveles de peaje($0 y $1500), se detalla el Grado de Saturación (X) para una capacidad de 2000 [Veh/Hr] del camino pavimentado y la probabilidad de elegir la ruta pavimentada (P).

Cuadro Nº2: Intervalos de Confianza para la Elección

Peaje	q	X	P	Métodos Tradicionales de estimación del IC CLB		PE		EST		PNL	
$0	100	5	95.1	90.3	97.5	91.8	98.3	89.7	100.4	84.2	97.2
	500	24	95.0	90.2	97.5	91.7	98.3	89.7	100.4	90.2	97.1
	1000	47	94.3	88.7	97.2	90.5	98.0	88.2	100.4	80.8	96.7
	1500	68	90.0	79.1	95.5	83.7	96.3	79.9	100.2	61.8	97.0
	2000	78	78.3	58.5	92.7	66.5	90.2	59.2	97.5	31.9	93.0
	2500	86	68.9	38.1	89.6	53.9	83.9	44.7	93.1	14.5	95.5
$1,500	100	4	79.6	60.3	91.0	68.3	91.0	61.3	97.9	75.6	83.2
	500	20	79.6	60.2	90.9	68.2	90.9	61.2	97.9	75.5	83.1
	1000	39	78.4	58.2	90.4	66.6	90.2	59.3	97.5	74.2	82.1
	1500	56	74.2	51.0	88.7	60.8	87.5	52.5	95.8	69.4	78.3
	2000	68	68.4	41.9	86.4	53.3	83.5	44.0	92.8	62.9	73.0
	2500	83	66.1	40.0	85.9	50.4	81.7	40.8	91.4	61.5	71.8

CLB : Método aplicable a modelos Logit Binarios.
PE : Método de propagación del error.
EST : Estimación según expansión en serie de Taylor.
PNL : Estimación según programación no lineal.

Es interesante notar que el método de estimación según expansión en serie de Taylor, tiene la desventaja de poder producir resultados erróneos (probabilidades de elección superiores al 100%). Por otro lado, todos tienden a estimar IC de amplitud superior a medida que la probabilidad de elección disminuye, llegando a resultados no satisfactorios desde un punto de vista práctico. Entonces, si bien todos los métodos expuestos permiten estimar un IC con un nivel de significancia estadística adecuado, salvo el método de propagación del error, el rango posible de variación de la probabilidad de elección, para fines prácticos, es demasiado amplio.

Todos los métodos expuestos requieren excesivos recursos computacionales y son de estimación bastante dificultosa. Entonces, la cuestión es si existe algún método empírico fácil de implementar y con un grado de exactitud adecuado.

En este contexto, a continuación se desarrolla un método alternativo basado en la técnica de Montecarlo.

3. METODO ALTERNATIVO.

La técnica de Montecarlo se ha generalizado debido a su conexión con los juegos de azar, para describir cualquier método de cómputo que utilice números aleatorios. Muchas aplicaciones descritas como simulaciones de Montecarlo son simulaciones en este sentido, debido a que siguen el desarrollo de un proceso estocástico. Sin embargo, ciertos métodos de Montecarlo se aplican a problemas que no son intrínsecamente aleatorios; los números aleatorios sólo proporcionan una manera conveniente de evaluar una cantidad; por ejemplo, el valor de una integral. Se puede interpretar que una integral representa el valor de un área o volumen. El método de Montecarlo genera al azar las coordenadas de un punto dentro de un espacio y determina si el punto cae dentro del área o volumen definido por la integral. Repitiendo muchas veces el experimento y midiendo la proporción de puntos que caen dentro del área o volumen se obtiene un valor aproximado para la integral.

Es posible distinguir dos tipos de métodos de Montecarlo (Hammersley y Handscomb, 1964) definiendo como métodos probabilísticos a los que se aplican a problemas en que un proceso aleatorio es intrínseco, y como deterministas a los que proporcionan una manera conveniente de evaluar alguna cantidad. Ciertamente, el método aquí desarrollado pertenece a éste último grupo.

Una simulación de Montecarlo requiere sucesiones de números aleatorios que se obtienen de una distribución que normalmente no es uniforme. Por lo general no se dispone de métodos para generar números aleatorios directamente con una distribución específica. Sin embargo, sí existen métodos para generar números aleatorios con una distribución uniforme. Casi todos los métodos que se utilizan para generar una distribución no uniforme se basan en el principio de transformar una sucesión distribuida uniformemente de números aleatorios en la sucesión requerida.

El objetivo es determinar un IC para la probabilidad de elección, a partir de los errores en la estimación de los parámetros del modelo de utilidad. En este caso, la información relevante son los valores de los coeficientes asociados a la función de utilidad (esperanza estimada) y sus respectivos errores estándar.

Entonces, eliminando el subíndice asociado al individuo, la función de utilidad tiene la forma:

$$V_j = \sum_{k=1}^{M} \beta_k \cdot X_{kj} \tag{16}$$

donde:

$$\beta_{1k} \leq \beta_k \leq \beta_{2k} \tag{17}$$

define el IC del parámetro β_k para un nivel de significancia estadística conocido.

Definiendo por:

$$P_j(\beta_i) = \frac{e^{V_j(\beta_{ij})}}{\sum_{k=1}^{N} e^{V_k(\beta_{ik})}} \tag{18}$$

$$P_j^{MAX,MIN} = Max, Min\ (P_j(\beta_1), P_j(\beta_2))$$

Se cumple que:

$$P_j^{MIN} \leq P_j \leq P_j^{MAX} \tag{19}$$

Lo que representa un IC para la probabilidad de elección de fácil estimación, pero con un nivel de significancia estadística desconocido.

Bajo el supuesto que los parámetros estimados se distribuyen según una Distribución Normal, es factible utilizar un procedimiento que genere números aleatorios distribuidos normalmente para cada parámetro de la función de utilidad, manteniendo constante el vector de atributos. Con estos nuevos parámetros se reevalua la función de utilidad de los usuarios, lo que permite determinar la nueva probabilidad de elección. Repitiendo el procedimiento varias veces, es posible estimar el IC asociado a la probabilidad de elección con el nivel de significancia estadística deseado. Si N es el número de probabilidades de elección obtenidas, el IC al X% de confianza se determina eliminando de la muestra los 0,5·N·(1-X%) valores mayores y menores.

Para el ejemplo desarrollado, el Cuadro Nº3 presenta los IC obtenidos por medio del método aquí propuesto, para un nivel de significancia estadística del 95%.

Cuadro Nº3: IC según Método de Montecarlo.

Peaje	q	X	P	Pmin	Pmax
$0	100	5	95.1	94.4	95.7
	500	24	95.0	94.2	95.8
	1000	47	94.3	93.3	95.3
	1500	68	90.0	88.0	92.1
	2000	78	78.3	74.1	82.6
	2500	86	68.9	66.5	71.3
$1,500	100	4	79.6	77.4	81.9
	500	20	79.6	77.2	81.9
	1000	39	78.4	75.4	81.5
	1500	56	74.2	68.6	79.8
	2000	68	68.4	64.2	72.6
	2500	83	66.1	64.3	67.9

Al **comparar** los resultados obtenidos con los métodos descritos en sección anterior, se observa que la **tendencia a aumentar** el IC a medida que disminuye la probabilidad de elección, persiste; sin embargo, **la amplitud** del IC es más adecuada a los requerimientos prácticos.

La estabilidad del método en la estimación del IC es satisfactoria. La Figura Nº1 presenta la variación del IC estimado en función del número de iteraciones, observándose que éste es prácticamente invariante.

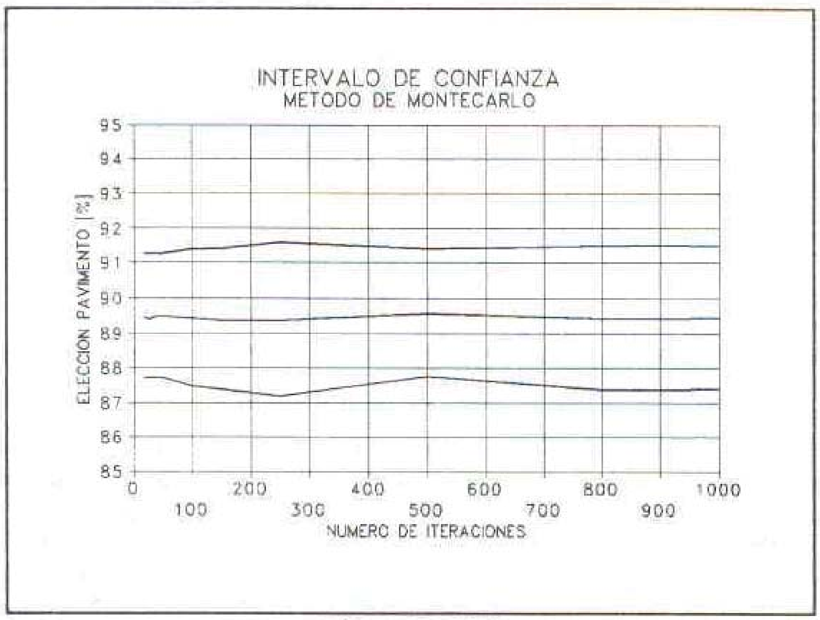

Figura Nº1

4. CONCLUSIONES.

El método de estimación por expansión en serie de taylor es el normalmente utilizado para estimar intervalos de confianza para la probabilidad de elección, sin embargo permite resultados negativos para el borde inferior del intervalo de confianza (Horowitz, 1979) y, como hemos apreciado, resultados mayores a la unidad para el borde superior, sin considerar que su estimación es bastante dificultosa (Daganzo, 1979). Además, sobreestima considerablemente el intervalo de confianza.

El método de programación no lineal tiende a dar intervalos de confianza mayores que la aproximación en serie de Taylor y su solución es bastante más dificultosa desde el punto de vista computacional, presentando inestabilidad en la estimación.

El método de estimación según propagación del error presenta dos inconvenientes. Por un lado, subestima considerablemente el intervalo de confianza, efecto producido probablemente debido al supuesto de linealidad y, por otro, no permite asociar el IC a un nivel de significancia estadística.

Respecto del método aquí propuesto, si bien presenta una tendencia a subestimar el intervalo de confianza para niveles de flujo cercanos a la saturación (≈80%), para grados de saturación menores la estimación es bastante acertada.

Como es sabido, la magnitud del intervalo de confianza es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de observaciones, siendo posible disminuirlo por medio del incremento del tamaño muestral. Sin embargo, la reducción es lenta: el tamaño muestral debe ser cuadruplicado para disminuir a la mitad el error en la estimación de la probabilidad de elección. En este contexto, el método de Montecarlo presenta una ventaja comparativa respecto de los métodos tradicionales: da la posibilidad de estimar sin demasiados recursos el error en la probabilidad de elección en la etapa de diseño de la encuesta, en forma rápida, sin la necesidad de estimar alguna variable estadística auxiliar, tales como la matriz de varianza-covarianza o la matriz de correlación, permitiendo determinar el tamaño muestral adecuado a los requerimientos del estudio, dado que, a partir de los antecedentes proporcionados por la figura Nº1, el considerar del orden de 50 repeticiones del proceso aquí propuesto, es adecuado.

Por lo anterior, se propone utilizar el método aquí expuesto para estimar el intervalo de confianza para la probabilidad de elección, mientras no se desarrolle un método analítico más fidedigno y de mayor robustez.

Por último, como línea de investigación futura, quedaría la necesidad de estimar la variación del IC en función del número de atributos considerado en el diseño, aún cuando se prevé que los métodos tradicionales sean directamente proporcionales al número de atributos y que el método propuesto no presente una tendencia clara.

REFERENCIAS.

Beers Yardley, (1958). Introduction to the Theory or Error.

Bouthelier, F. & Daganzo, C.F. (1979). **Aggregation with multinomial probit and calibration of disaggregate demand models with aggregate data: a new methodological approach.** Transportation Research, 13B(2), 133-146.

CITRA Ltda. (1993) **Análisis de Demanda para estudios de concesión camino Nogales - Puchuncaví.** Informe Final al Departamento de Concesiones del Ministerio de Obras Públicas.

Daganzo, C.F. (1979). **Multinomial Probit: The Theory and Its Application to Demand Forecasting.** Academic Press, New York.

Hammersley, J.M., y D.C. Handscomb, (1964). **Montecarlo Methods.** Nueva York, John Wiley and Sons, Inc.

Horowitz, J. (1979). **Confidence intervals for the choice probabilities of the multinomial logit model.** Transportation Research Record, Nº79, 23-29.

Koppelman, F.S. (1976). **Methodology for analysing errors in prediction with disaggregate choice models.** Transportation Research Record, Nº592, 17-23.

Koppelman, F.S. (1976a). **Guidelines for aggregate travel prediction using disaggregate choice models.** Transportation Research Record, Nº610, 19-24.

Kroes, E. y Sheldon, R. (1988). **Stated Preference Methods: An Introduction.** Journal of Transport Economics and Policy, Vol XXII, 71-91.

Morikawa, T. (1989). **Incorporating Stated Preference Data in Travel Demand Analysis.** Doctoral Dissertation, Junio 1989, MIT, Cambridge, Mass.

MVA Consultancy Institute for Transport Studies, University of Leeds and Transport Studies Unit, University of Oxford (1987). **"The Value of Travel Time Savings".** Policy Journals, Newbury.

Pearmain, D. y Kroes, E. (1990). **Stated Preference Techniques: A Guide to Practice.** Steer Davies & Gleave Ltd, Hague Consulting Group, Richmond.

Reid, F.A. (1978). **Minimizing error in aggregate predictions from disaggregatemodels.** Transportation Research Record, Nº673, 59-65.

Theil, H. (1971). **Principles of Econometrics.** John Wiley & Sons, New York.

Véjar, G. (1993). **Modelación de la elección de rutas en viajes interurbanos, usando técnicas de Preferencias Declaradas.** Memoria para optar al título de Ingeniero Civil. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería Civil, Sección Transporte.

Vera, J. (1993). **Formulación y Calibración de un Modelo Desagregado de Partición Modal para viajes interurbanos.** Memoria para optar al título de Ingeniero Civil. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería Civil, Sección Transporte.