
ANALISIS DE SOLUCION DE ASIGNACION DINAMICA A REDES DE TRANSPORTE

J. Enrique Fernández L., Joaquín de Cea Ch. y Derek Bull H.

Depto. Ingeniería de Transporte, U. Católica de Chile
Casilla 306, Santiago 22, FAX 5524054

RESUMEN

En este trabajo se analizan las características de las soluciones del problema de asignación dinámica a redes de transporte. Para ello se utiliza un modelo recientemente propuesto por los autores y que se basa en la Teoría de Control.

Sobre la base de dicha formulación se analizan las características de las soluciones correspondientes utilizando las condiciones de optimalidad obtenidas al aplicar el Principio Máximo de Pontryagin y las interpretaciones económicas y operacionales correspondientes. A continuación se describe un algoritmo de solución y se realizan algunos experimentos de aplicación del algoritmo con un ejemplo de prueba. Finalmente, se analizan los resultados obtenidos, tanto en términos de funcionamiento del algoritmo como de las soluciones encontradas.

1. INTRODUCCION

Durante los últimos años ha aparecido un gran interés por la formulación y desarrollo de modelos dinámicos de redes de transporte. Dichos modelos aparecen como una evolución natural de los modelos estáticos de equilibrio, que han llegado a una etapa de madurez, tanto en sus desarrollo teórico como aplicación práctica a la planificación estratégica de sistemas de transporte. Ha existido también un fuerte incentivo proveniente de los gobiernos de países desarrollados y de la industria automotriz internacional, que ven a los modelos dinámicos como una condición necesaria para la implementación de "sistemas de carreteras inteligentes" (IVHS) tendientes a resolver los graves problemas actuales de congestión.

Varios autores han propuesto distintas formulaciones modelísticas para el problema de asignación dinámica a redes de transporte: Merchant y Nemhauser (1978a, 1978b), Carey (1986, 1987, 1992), Friesz et al. (1989), Wie, Friesz y Tobin (1990), Janson (1991) y Ran, Boyce y LeBlanc (1993) entre otros; estos mismos autores han propuesto también métodos de solución basados en distintos enfoques, que en general están estrechamente relacionados con la formulación del modelo planteado.



En este trabajo se utiliza una formulación basada en la Teoría de Control Óptimo, y un algoritmo de solución recientemente propuestos por los autores (Fernández y De Cea, 1994 y 1995) para analizar las características de las soluciones al problema de asignación dinámica. En la próxima sección se presenta brevemente la formulación del modelo y sus principales características. Luego se analizan las condiciones de optimalidad correspondientes a la aplicación del Principio Máximo de Pontryagin y su interpretación económica. A continuación se describe un algoritmo de solución y finalmente se presentan los resultados de algunos experimentos de aplicación el algoritmo con un ejemplo de prueba y se analizan los resultados obtenidos, tanto en términos de funcionamiento del algoritmo como de las soluciones encontradas.

2. FORMULACION DEL MODELO

Consideremos una red representada por un grafo $G = (N, A)$, en que N representa el conjunto de nodos y A el conjunto de arcos; los arcos son las vías por las que circulan los vehículos; los nodos representan intersecciones, o puntos especiales del espacio en los cuales los arcos experimentan cambios en sus características de diseño y centroides en los que se localizan los orígenes y destinos de viajes. Usaremos un índice general a para identificar un arco y los índices j, k, n, m identificarán nodos, con k, n, m reservados para centroides (k para Orígenes (O) y n, m para Destinos (D)) y j para nodos normales de la red. Además adoptaremos la siguiente notación básica:

- W : conjunto de los pares O-D en la red.
- w : elemento genérico del conjunto W , con $w = (k, n)$.
- P : conjunto total de rutas en G .
- P_w : subconjunto de las rutas asociadas con el par $O-D$ w .
- p : elemento genérico del conjunto P .
- $f_a(i)$: número de vehículos en el arco a , al principio del período i .
- $f_a^n(i)$: número de vehículos con destino n , que se encuentran en el arco a , al comienzo de i .
- $u_a^n(i)$: flujo con destino n que entra al arco a en i .
- $g_a^n(i)$: flujo con destino n que sale del arco a , en i (demanda).
- $S_w(i)$: flujo instantáneo que sale del origen k con destino n , en i .
- $\tau_a(i)$: tiempo de viaje sobre el arco a , para un vehículo que entra en i .
- l_a : largo del arco a .
- $d_a(i)$: $[f_a(t)/l_a]$ densidad de tráfico en el arco a , en i .
- $A(j)$: conjunto de arcos cuya cola es el nodo j .
- $B(j)$: conjunto de arcos cuya cabeza es el nodo j .



A fin de obtener soluciones numéricas al problema de asignación dinámica usaremos una versión discreta del modelo correspondiente (Fernández y De Cea 1955b) en la que el período de análisis $[0, T]$ es dividido en un número finito de intervalos discretos de la misma longitud. El conjunto de intervalos correspondiente, se denotará por $T = \{i:1, \dots, I\}$ y el subconjunto que excluye el último período se identifica por $\hat{T} = \{i:1, \dots, I-1\}$. Definiremos además el subconjunto $\tilde{\tau}_a(0)$, de los primeros intervalos de T , cuya duración total es igual a $\tau_a f_a(0)$; el subconjunto $\Gamma = \{i:I-l, \dots, I-2, I-1, I\}$, compuesto por los últimos l intervalos del conjunto T , cuya duración total es igual a $\tau_a(I-l+1)$ y el conjunto complementario $T_\tau = T - \Gamma$, que contiene el resto de los intervalos iniciales de T .

La versión discreta del problema de asignación dinámica puede formularse como sigue:

$$(PD): \min_{\{f, u\}} Z(f) = \sum_{i=1}^I \sum_{a \in A} f_a(i), \quad (1)$$

$$\text{s.a: } f_a^n(i+1) = f_a^n(i) + u_a^n(i) - g_a^n(i), \quad \forall (a \in A), (n \in N), i \in \hat{T}, \quad (2)$$

$$g_a^n(i) = \frac{f_a^n(i^0)}{\tau_a(i^0)}, \quad \forall i^0 \in T_\tau, i = i^0 + \tau_a(i^0), \text{ si: } f_a^n(i) > 0, \quad (3a)$$

$$g_a^n(i) = 0, \quad \forall i^0 \in T_\tau, i = i^0 + \tau_a(i^0), \text{ si: } f_a^n(i) = 0, \quad (3b)$$

$$g_a^n(i) = \frac{f_a^n(0)}{\tau_a(0)}, \quad \forall i \in \{\tilde{\tau}_a(0)\}, \text{ si: } f_a^n(i) > 0, \quad (3c)$$

$$g_a^n(i) = 0, \quad \forall i \in \{\tilde{\tau}_a(0)\}, \forall (a \in A), (n \in N), \text{ si: } f_a^n(i) = 0, \quad (3d)$$

$$\tau_a = \tau_a^0 \left[1 + \beta \left(\frac{f_a(i)}{\tilde{f}_a} \right)^\eta \right] \quad (3e)$$

$$S_w(i) = \sum_{a \in A(k)} u_a^n(i), \quad w = (k, n), \quad \forall (k, n \in N), i \in \hat{T} \quad (4)$$

$$\sum_{a \in B(j)} g_a^n(i) = \sum_{a \in A(j)} u_a^n(i), \quad \forall (j, n \in N), i \in \hat{T}, \quad (5)$$



$$u_a^n(i) = 0, \quad \forall a \in B(m), \quad n \neq m, \quad i \in \hat{T}, \quad (6)$$

$$f_a^n(0) = f_a^{n0}, \quad \forall (a \in A), \quad (n \in N), \quad (7)$$

$$u_a^n(i) \geq 0, \quad f_a^n(i) \geq 0, \quad \forall (a \in A), \quad (n \in N), \quad i \in \hat{T}. \quad (8)$$

Este modelo puede ser considerado ya sea como la formulación de un problema general de programación matemática, como hacen Merchant y Nemhauser (1978a, 1978b), o como un problema de control óptimo en tiempo discreto. Nosotros tomaremos este último enfoque.

La función objetivo $Z(f)$ representa el costo total incurrido, por todo el tráfico que circula en la red, durante el período de análisis T . Su expresión es consecuencia de considerar que dicho costo total viene dado por la suma de los tiempos de viaje experimentados por los vehículos que salen de cada arco de la red $\hat{C}_a(i) = \tau_a[f_a(i^0)]g_a(i); i = i^0 + \tau_a[f_a(i^0)]$, durante cada uno de los intervalos del período T :

$$Z = \sum_{i=1}^I \sum_{a \in A} \tau_a[f_a(i^0)]g_a(i), \quad i = i^0 + \tau_a[f_a(i^0)], \quad (9)$$

con $\tau_a[f_a(i^0)]$ igual al tiempo de viaje sobre el arco a que experimenta un vehículo que entra en dicho arco en el intervalo i^0 y $g_a(i)$ es la función de egreso que determina el número de vehículos que salen del mismo arco durante i :

$$g_a(i) = \frac{f_a(i^0)}{\tau_a[f_a(i^0)]}, \quad i = i^0 + \tau_a[f_a(i^0)], \quad (10)$$

Por lo tanto, reemplazando (10) en (9) se obtiene la función objetivo(1).

Las ecuaciones (2), describen la dinámica de los flujos sobre cada arco y determinan por lo tanto las características de progresión y propagación de ellos sobre la red. Las ecuaciones (3) especifican la forma funcional de las funciones de egreso g_a y de los tiempos de viaje en los arcos τ_a . La expresión usada para la función de egreso está basada, en este caso, en la relación fundamental del tránsito (Drew, 1965); es importante observar que en su definición se



introduce un desfase, igual al tiempo de viaje $\tau_a(i^0)$, de tal forma que la cantidad de vehículos que salen de un arco en el intervalo i depende de la cantidad de vehículos que había en dicho arco en el intervalo $i^0 = i - \tau_a(i^0)$ ¹. La inclusión del tiempo de viaje en forma explícita es una particularidad de esta formulación, que permite eliminar problemas en la descripción dinámica de los flujos, presentados generalmente por los modelos propuestos anteriormente (ver Fernández y De Cea, 1995a). El modelo supone que el tiempo de viaje sobre cada arco se puede determinar en el momento en que un vehículo ingresa a él y depende de las características de diseño de la infraestructura y de la cantidad de vehículos que están en el arco en ese momento (ver(3e)).

Las ecuaciones (4) y (5) son restricciones combinadas que afectan a las variables de control y las variables de estado; ellas aseguran la satisfacción de las demandas por viajes existentes entre cada par w (ecuaciones (4)) y la continuidad de flujos en cada nodo normal j de la red (ecuaciones (5)) para cada intervalo $i \in T$. La tasa de viajes $S_w(i)$ demandada entre cada par $O - D$, w , en cada intervalo i , es un dato externo del problema.

Las ecuaciones (6) aseguran que cada flujos en el destino usadas en el caso estático. Estas no pueden utilizarse en el caso dinámico, dado que el momento (intervalo i) en que el flujo con destino n llegará a dicho centroide es desconocido a priori, ya que es parte de las incógnitas del problema, pues depende de los tiempos de viaje experimentados sobre la red. Las ecuaciones (7) determinan el estado de la red en el momento inicial (intervalo $i = 0$) y las ecuaciones (8) obligan que las variables de control y de estado no sean negativas. Estas últimas son necesarias, ya que como consecuencia de la definición de las funciones de egreso no siempre se tendrá que $g_a(i) \leq f_a(i)$.

3. CONDICIONES DE OPTIMALIDAD

A continuación presentaremos las condiciones necesarias para una solución óptima del problema de control (1) - (8). Para ello aplicaremos la expresión discreta del principio mínimo de Pontryagin (1962) y usaremos además los resultados derivados por Budelis y Bryson (1970) para modelos de control óptimo con desfases en las variables de estado.

Primero es necesario formular el Hamiltoniano cuya expresión discreta es la siguiente:

$$H[f(i), u(i), \lambda(i+1)] = \sum_{a \in A} f_a(i) + \sum_{a \in A} \sum_{n \in N} \lambda_a^n(i+1) [f_a^n(i) + u_a^n(i) - g_a^n(i)], \quad (11)$$

¹ Para determinar el intervalo i^0 , en que un vehículo egresa del arco, a partir del intervalo i^0 en que ingresa, o viceversa, debe considerarse solo la parte entera del valor del tiempo de viaje $\tau_a(i^0)$. En otras palabras el valor del tiempo de viaje debe expresarse en unidades enteras de intervalos.



donde $\lambda_a^n(i+1)$ es la variable adjunta correspondiente a la ecuación de estado (2) (para flujos del arco a con destino n), durante el intervalo $(i+1)$. Tanto $f^n(i)$, como $u^n(i)$ y $\lambda^n(i)$, son vectores de $|A|$ componentes.

Sean $\mu_k^n(i)$ y $\mu_j^n(i)$, multiplicadores de Lagrange asociados con las restricciones (4) y (5) de conservación de flujos en orígenes k y nodos de la red j respectivamente.

Entonces, la versión discreta del principio mínimo establece que si (f^*, u^*) es una solución óptima al problema (PD), deben existir multiplicadores (λ, μ) tales que:

$$\lambda_a^n(i) = 1 + \lambda_a^n(i+1) - \frac{g_a^n(i)}{1 - \tau_a(i^0)} [\lambda_a^n(i+1) - \mu_j^n(i)], \quad a \in B(j)$$

$$\forall (j \neq k) \in N, \quad i \in T_\tau, \quad (12)$$

$$\lambda_a^n(i) = 1 + \lambda_a^n(i+1), \quad \forall (a \in A), \quad (n \in N), \quad i \in \Gamma, \quad (13)$$

$$\lambda_a^n(I) = 0, \quad \forall (a \in A), \quad (n \in N), \quad (14)$$

$$f_a^n(i+1) = f_a^n(i) + u_a^n(i) - g_a^n(i), \quad \forall (a \in A), \quad (n \in N), \quad i \in \hat{T}, \quad (15)$$

$$g_a^n(i) = \frac{f_a^n(i)}{\tau_a(i^0)}, \quad \forall i^0 \in T_\tau, \quad i = i^0 + \tau_a(i^0), \quad \text{si: } f_a^n(i) > 0, \quad (16a)$$

$$g_a^n(i) = 0, \quad \forall i^0 \in T_\tau, \quad i = i^0 + \tau_a(i^0), \quad \text{si: } f_a^n(i) = 0, \quad (16b)$$

$$g_a^n(i) = \frac{f_a^n(0)}{\tau_a(0)}, \quad \forall i \in \{\tilde{\tau}_a(0)\}, \quad \text{si: } f_a^n(i) > 0, \quad (16c)$$

$$g_a^n(i) = 0, \quad \forall i \in \{\tilde{\tau}_a(0)\}, \quad \forall (a \in A), \quad (n \in N), \quad \text{si: } f_a^n(i) = 0, \quad (16d)$$

$$f_a^n(0) = f_a^{n0}, \quad f_a^n(i) \geq 0, \quad \forall (a \in A), \quad (n \in N), \quad i \in \hat{T}, \quad (17)$$

donde $g_a^n(i) = \partial g_a^n(i) / \partial f_a^n(i - \tau_a)$ la ecuación (12), (13), se denomina ecuación de diferencias adjunta.



Adicionalmente, los controles óptimos deben minimizar el Hamiltoniano, sujeto a las restricciones de conservación de flujos:

$$H[f^*(i), \lambda^*(i+1), u^*(i)] = \min_{(u(i) \in \Omega(i))} H[f^*(i), \lambda^*(i+1), u(i)] \quad (18)$$

donde $\Omega(i)$ está definido por las restricciones (4), (5) y (6), de continuidad en los nodos y las de no negatividad en (8). Las condiciones de Kuhn-Tucker, correspondientes a la minimización del Hamiltoniano expresada en (18) implican que:

$$\lambda_a^n(i+1) - \mu_j^n(i) \geq 0, \quad \forall (j, n \in N), (a \in A(j)), (i \in T), (j \neq n) \quad (19)$$

$$u_a^n(i) [\lambda_a^n(i+1) - \mu_j^n(i)] = 0, \quad \forall (j, n \in N), (a \in A(j)), (i \in T), (j \neq n) \quad (20)$$

$$u_a^n(i) = 0, \quad \forall a \in B(m), n \neq m, i \in T, \quad (21)$$

además de las ecuaciones de conservación de flujos (4), (5), (6) y no negatividad de los controles, (8). Es fácil ver que el gradiente del Lagrangiano, correspondiente al Hamiltoniano con sus restricciones en (18), con respecto a las variables de control $u_a^n(i)$ es:

$$L_{u_a^n} = [\lambda_a^n(i+1) - \mu_j^n(i)], \quad (a \in A(j)) \quad (22)$$

De (19) y (20) se deduce que para una solución óptima $\{u_a^{n*}\}$ se cumplirá que: cuando $\lambda_a^n(i) \geq \mu_j^n(i)$ el valor de la variable de control u_a^{n*} será cero y puede ser positivo solo si $\lambda_a^n(i+1) = \mu_j^n(i)$. Por lo tanto, dado que los flujos con destino n deben satisfacer las condiciones de conservación en cada nodo $j \neq n$, de la red, la suma de todos los flujos u_a^n , correspondientes a arcos a que salen del nodo $(a \in A(j))$ y que satisfacen las condiciones necesarias $\lambda_a^n(i) = \mu_j^n(i)$ debe ser igual a: i) $S_w, w = (k, n)$, si j corresponde a un nodo origen ($j = k$) o, ii) $\sum_{a \in B(j)} g_a^n$ para cualquier otro nodo normal de la red.

Es útil recordar que los multiplicadores λ y μ tienen la siguiente interpretación económica (Fernández y De Cea, 1994):



- $\mu_j^n(i)$, representa el costo marginal, producido por un vehículo adicional que sale en el intervalo i desde el nodo j hacia el destino n , y viaja a través de una ruta de costo marginal mínimo.
- $\lambda_a^n(i)$, es igual al costo marginal de viaje sobre una ruta $p = (a, \tilde{p})$, $p \in P_j^n$, cuyo primer arco es $a = (j, l)$ y el resto de la ruta \tilde{p} (partiendo del nodo l) corresponde a una ruta de costo marginal mínimo para viajar al destino n .

Es importante notar que, por definición, no es posible en este caso que $\mu_j^n(i) > \lambda_a^n(i)$. Por lo tanto, y dado que el Hamiltoniano H y el Lagrangiano L son lineales en las variables de control, se tendrán controles tipo “bang-bang” ($u_a^n(i) = 0$), si el gradiente es positivo $L_{u_a^n} > 0$, o “singulares” si él se anula idénticamente sobre un período finito de tiempo en T (Fernández y De Cea, 1994).

4. ALGORITMO DE SOLUCION

A continuación se presenta un algoritmo de solución para el problema (PD). Este hace uso directamente de las condiciones de optimalidad expresadas en las ecuaciones (12) a (21) para resolver en forma iterativa un serie de problemas con valores en dos puntos de borde (“two point boundary value problems”).

La solución de cada uno de estos problemas consisten en tres pasos principales realizadas a partir de una solución factible² cualquiera: 1) cálculo de los flujos de egreso g_a , y resolución hacia adelante ($i = 1, \dots, I$) de las ecuaciones de estado; 2) resolución hacia atrás ($i = I, \dots, 1$) de las ecuaciones adjuntas; 3) minimización del Hamiltoniano con respecto a las variables de control, para cada intervalo $i \in T$, sujeto a las restricciones de conservación de flujos y no negatividad. Para este último paso se usa un método de gradiente. Los tres pasos anteriores constituyen un ciclo interno de iteraciones que se realizan manteniendo constante el valor de los multiplicadores μ , los que son a su vez actualizados en un ciclo externo cada vez que se obtienen nuevos valores de las variables μ, f, λ .

Un aspecto importante de la implementación del algoritmo es el uso explícito de la estructura especial (de red) que presenta el problema y de la interpretación de los multiplicadores dada en la sección anterior.

² En realidad, no es necesario que la solución inicial sea factible, ya que esta condición es posteriormente impuesta internamente en el algoritmo, sin embargo es normalmente más cómodo construir una solución factible cualquiera para empezar.



Descripción del Algoritmo

Paso 1: Inicialización

Hacer $r = 0$ y $s = 0$, (índices del ciclo externo e interno).

- i) especificar los valores iniciales de las variables de estado $f(0)$.
- ii) determinar valores de los tiempos sobre los arcos de la red $\tau^{(0)}(i)$, suponiendo condiciones de flujo libre para todos los intervalos: $(f_a(i) = 0, \forall (a \in A), (i \in \hat{T}))$.
- iii) elegir valores de las variables de control para iniciar el proceso:

$$u^{(00)} = [\dots, u_a^{(00)}(i), \dots, \dots, u_a^{(00)}(i), \dots], \quad \forall i \in \hat{T},$$

Para empezar, se puede dar un valor cero a todas las variables de control.

- iv) elegir los valores iniciales de los multiplicadores \bar{u} :

$$u^{(0)} = [\dots, u_j^{(0)}(i), \dots, \dots, u_j^{(0)}(i), \dots], \quad \forall i \in \hat{T},$$

e ir al Paso 2.

Paso 2: Problema con valores en dos puntos de borde.

Subpaso 1: Comprobar el cumplimiento de las restricciones de conservación de flujos de los nodos y de ser necesario, corregir proporcionalmente los valores de las variables de control $\bar{u}^{(rs)}$.

Partiendo con los valores iniciales de las variables de estado $f(0)$, resolver hacia adelante en el tiempo las ecuaciones de estado:

$$f_a^{(rs)}(i+1) = f_a^{(rs)}(i) + \bar{u}_a^{(rs)}(i) - g_a^{(rs)}(i), \quad \forall (a \in A), (n \in N), i \in \hat{T},$$

usando el valor de $f_a^{(rs)}(i^0)$, obteniendo para cada intervalo i^0 , para calcular el valor del flujo de egreso $g_a^{(rs)}(i)$, correspondiente al intervalo $i = i^0 + \tau_a[f_a^{(rs)}(i^0)]$, mediante las funciones definidas en (3a)-(3e). Se comprueba que cada nuevo valor de $f_a^{(rs)}(i+1)$ no sea negativo. De resultar negativo, se recalcula el valor del flujo de egreso del periodo i , haciendo $g_a^{(rs)}(i) = f_a^{(rs)}(i) + \bar{u}_a^{(rs)}(i)$ y se pone $f_a^{(rs)}(i+1) = 0$.

Subpaso 2: Partiendo de los valores de borde de las variables adjuntas $\lambda(I) = 0$, resolver hacia atrás en el tiempo las ecuaciones adjuntas:

$$\lambda_a^n(i) = 1 + \lambda_a^n(i+1) - \frac{g_a^n(i)}{1 - \tau_a(i^0)} [\lambda_a^n(i+1) - u_j^n(i)], \quad a \in B(j), \quad \forall (j \neq k) \in N, i \in T_\tau,$$

$$\lambda_a^n(i) = 1 + \lambda_a^n(i+1), \quad \forall (a \in A), (n \in N), i \in \Gamma,$$

Subpaso 3: Determinar la dirección de descenso para la minimización del Hamiltoniano. Para ello, calcular los valores auxiliares de las variables de control $\{\tilde{u}^{(rs)}\}$, que minimizan el valor del Hamiltoniano, manteniendo constantes los valores de las variables de estado y adjuntas $(\tilde{f}, \tilde{\lambda})$ recién determinados en el Subpaso 2:

$$\min_{u^{(rs)} \in \Omega(i)} H(i) = \sum_a \tilde{f}_a^{(rs)}(i) + \sum_a \tilde{\lambda}_a^{n(rs)}(i+1) [\tilde{f}_a^{n(rs)}(i) + u_a^{n(rs)}(i) - g_a^{n(rs)}(i)]$$

Subpaso 4: Calcular el paso óptimo de avance θ^* . Para ello se debe resolver el siguiente problema de minimización unidimensional:

$$\theta^{(rs)} = \arg \min_{0 \leq \theta \leq 1} \sum_{i \in \Gamma} H[\tilde{f}^{(rs)}(i), \tilde{\lambda}^{(rs)}(i), \mu^{(r)}(i), \bar{u}(rs) + \theta d^{(rs)}(i)]$$

con $d^{(rs)} = \tilde{u}^{(rs)}(i) - \bar{u}^{(rs)}(i)$. Los valores de $\tilde{f}^{(rs)}(i)$ y $\tilde{\lambda}^{(rs)}(i)$, usados en la valoración de $\sum_{i \in \Gamma} H$ son recalculados para cada valor supuesto de θ , a partir de las ecuaciones de estado y adjuntas, usando los nuevos valores de las variables de control $\bar{u}^{(rs)}(i) + \theta d^{(rs)}(i)$ en cada caso.

Subpaso 5: Calcular los nuevos valores de las variables de control, usando el valor óptimo θ^* , obteniendo en el Subpaso 4:

$$\bar{u}_a^{(r,s+1)}(i) = \bar{u}_a^{(rs)}(i) + \theta^* d^{(rs)}(i)$$

Subpaso 6: Test de Convergencia Interno

$$\|\bar{u}^{(r,s+1)} \cdot L_{u_a}\| \leq \pi$$

con L_{u_a} dado por (22).



- i) Si es satisfecho, ir al Paso 3.
 ii) Si no, hacer $s = s + 1$ y volver al Subpaso 1.

Paso 3: Actualización de μ y Test de Convergencia Externa.

- i) calcular los nuevos valores de los multiplicadores μ^r :

$$\mu^{(r)}(i) = [\dots, \mu_j^{(r)}(i), \dots, \mu_j^{n(r)}(i), \dots], \quad \forall i \in \hat{T},$$

- ii) realizar el test de convergencia:

$$\|\mu^{(r)} - \mu^{(r-1)}\| \leq \omega$$

Si la condición se cumple: PARE;

En caso contrario, hacer $r = r + 1$ y regresar al Paso 2.

END

En la aplicación del algoritmo es importante considerar los siguientes procedimientos, que se basan en la estructura especial del problema y en la interpretación de los multiplicadores λ, μ .

1) En el Paso 1, para $r = 0$, los valores de $\mu_j^{n(0)}(i)$ se pueden determinar calculando las rutas mínimas dinámicas sobre la red, usando los valores de tiempo de viaje $\tau^{(0)}(i)$. Esto puede entregar un buen punto de partida cuando la congestión en la red no es muy elevada. Sin embargo, si no es posible calcular las rutas mínimas dinámicas directamente o el sistema está muy congestionado, se puede partir haciendo $\mu_j^{n(0)}(i) = 0$.

2) Para $r \geq 1$, una forma alternativa de actualizar $\mu_j^{n(r)}(i)$, es haciendo $\mu_j^{n(r)}(i) = \min_{a \in A(j)} \lambda_a^{n(r)}(i)$, donde $\lambda_a^{n(r)}(i)$, es el valor obtenido en la última iteración del Paso 2³.

3) La minimización del Hamiltoniano, en el Subpaso 4, se puede realizar muy eficientemente aplicando el siguiente simple procedimiento que hace uso de la estructura de redes del problema:

- Para cada nodo j de la red, calcular:

³ En este caso, se está haciendo uso de la interpretación especial de los multiplicadores dada en la sección 2

$$\sum_{a \in B(j)} g_a^{n(rs)}(i) = G_a^{n(rs)}(i)$$

- De entre los arcos que pertenecen al conjunto $A(j)$ seleccionar aquel, a^* , que posee el menor valor de $\bar{\lambda}_a^{n(rs)}(i+1)$.

-Asignar $u_{a^*}^{n(rs)} = G_{a^*}^{n(rs)}(i)$ y hacer $u_a^{n(rs)} = 0, \forall a \neq a^*, a \in A(j)$.

4. CARACTERISTICAS DE LAS SOLUCIONES DINAMICAS

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos con dos redes de prueba que han sido usadas para estos mismos efectos por otros autores (ver Wie, Tobin y Friesz, 1994).

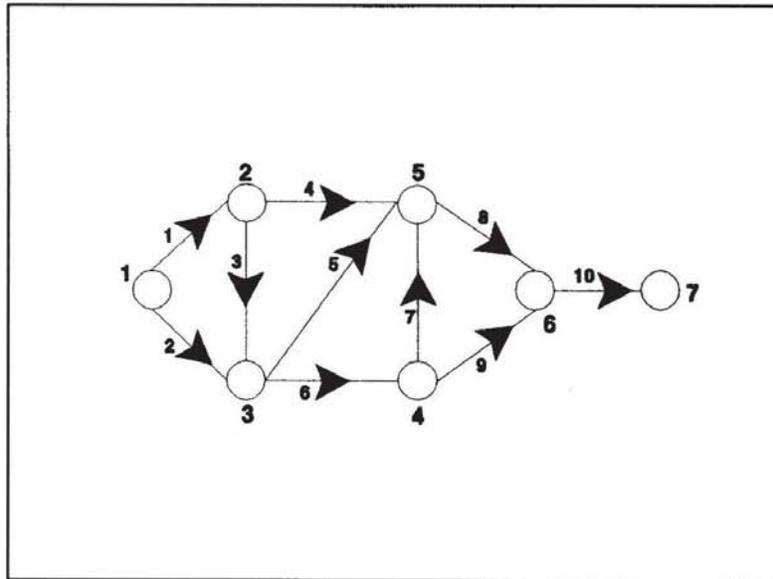


Figura1. Esquema de la Red Chica



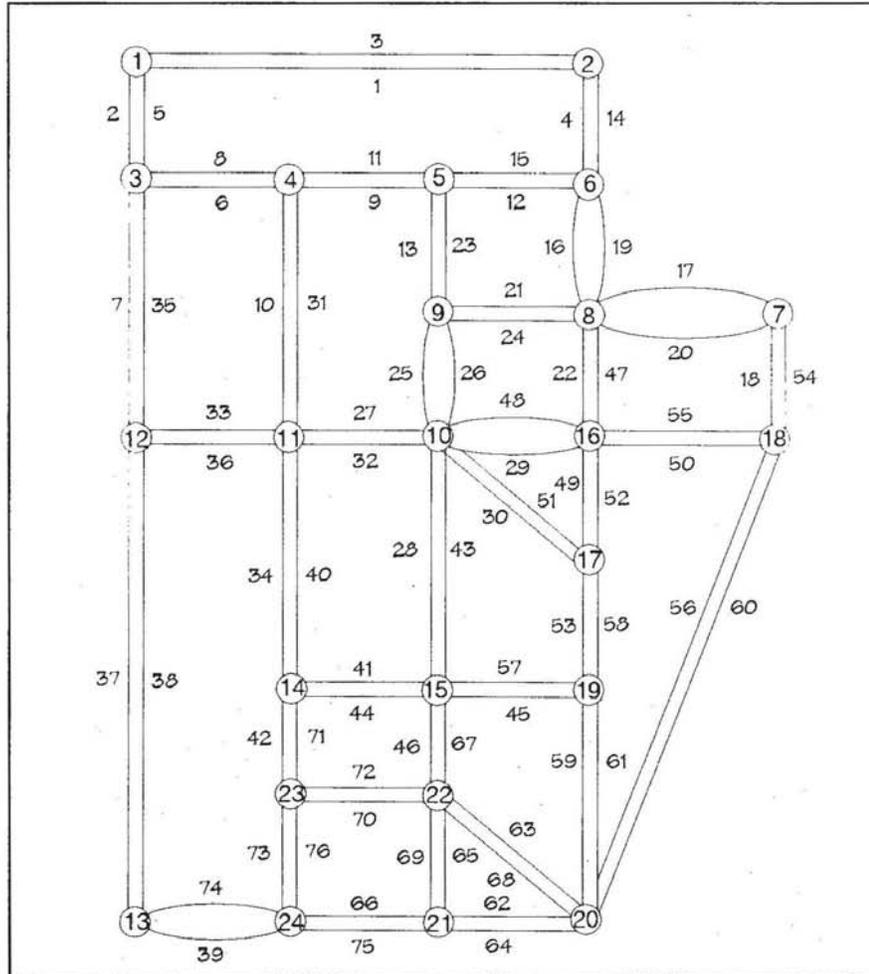


Figura 2. Esquema de la Red Grande

El primer caso corresponde a una pequeña red de 10 arcos y 7 nodos. El segundo, a una red de tamaño medio de una ciudad americana (Sioux Falls), que ha sido utilizada en la literatura desde hace más de dos décadas para probar algoritmos de redes (LeBlanc et al., 1975); ella consta de 24 nodos y 76 arcos direccionales.

La topología de las dos redes se muestra gráficamente en las figuras 1 y 2.

En la primera red se supone una demanda triangular de viajes entre el par O-D=(1,7). El número de viajes demandado empieza en cero en el período cero y aumenta linealmente hasta máximo de 20 en el período 50, para después decaer linealmente hasta cero en el período 100; entre los períodos 100 y 120 la demanda es nula. Los resultados de este ejemplo se muestran en las Figuras 3, 4 y 5; la dos primeras muestran la evolución de los valores de las variables de control u_a y las variables de estado f_a , para los distintos arcos de una ruta típica (formada por los arcos 2,5,8,10=) y la tercera muestra la evolución de los valores de los multiplicadores: μ_5 correspondiente al nodo 5 y λ_7, λ_9 correspondientes a los arcos que salen del nodo 5.

En el caso de la red grande se suponen demandas entre los siguientes cuatro pares 0-D: (1,10), (2,10), (13,10), (20,10). las demandas son en este caso también triangulares entre los periodos 0 y 100 con máximos en el periodo 50 de 12,5,5; 10 y 12,5 respectivamente. Los resultados correspondientes a una ruta típica formada por los arcos: 2,7,36 y 32 se presentan en las figuras 6,7 y 8. Las dos primeras muestran la evolución de las variables de control y de estado correspondientes a los distintos arcos de la ruta; la tercera muestra la evolución de los multiplicadores: μ_3 correspondiente al nodo 3 y λ_5, λ_6 y λ_7 correspondientes a los arcos que salen del nodo 3.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado las características de los resultados numéricos obtenidos de la aplicación de un nuevo algoritmo a un modelo de asignación dinámica recientemente propuesto. (Fernández y De Cea, 1994 y 1995).

Los resultados obtenidos en los ejemplos de prueba analizados en la sección 4, son mas realistas que los recientemente publicados por otros autores (Wie, Tobin y Friesz, 1994 y Wie et al. 1995). En particular ellos no adolecen el típico problema de propagación instantánea del flujos, los que en nuestro caso avanzan a través de las distintas rutas de la red a una velocidad finita, determinada por las condiciones de operación en cada arco y sus respectivos tiempos de viaje, que son considerados explícitamente en nuestro modelo y son función del nivel de congestión.

Los resultados obtenidos presentan también características interesantes no intuitivas, en especial en lo que respecta al comportamiento oscilatorio de los flujos. Será interesante en el futuro encontrar las razones de dicho comportamiento, no observado en la realidad cuando los flujos no son socialmente óptimos.

El algoritmo utilizado se comporta eficientemente en comparación con otros propuestos en la literatura anteriormente, lo que muestra la utilidad de hacer uso de la estructura especial del problema.

Figura 3. Red Chica. Variables de Control en Ruta: (2,5,8,10)

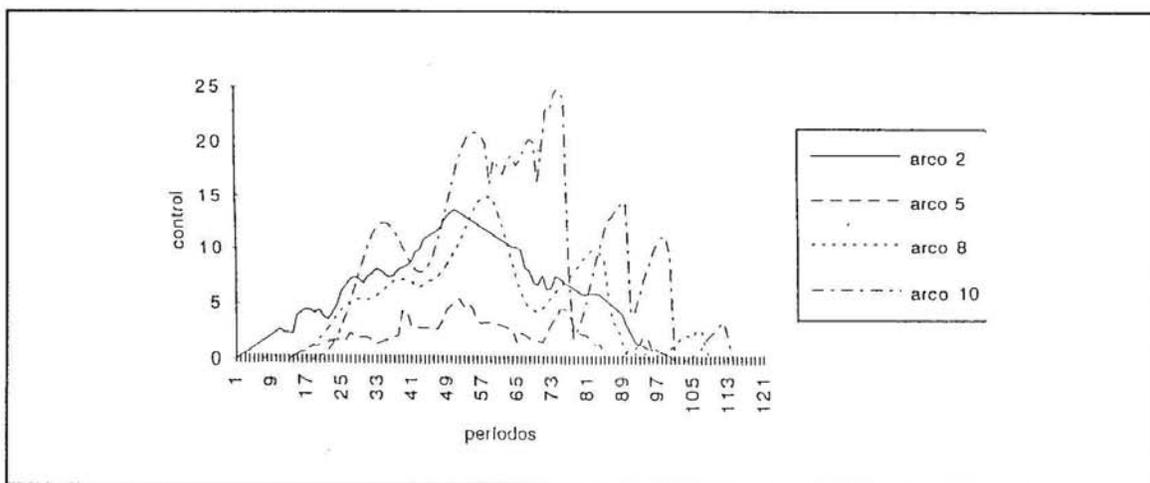


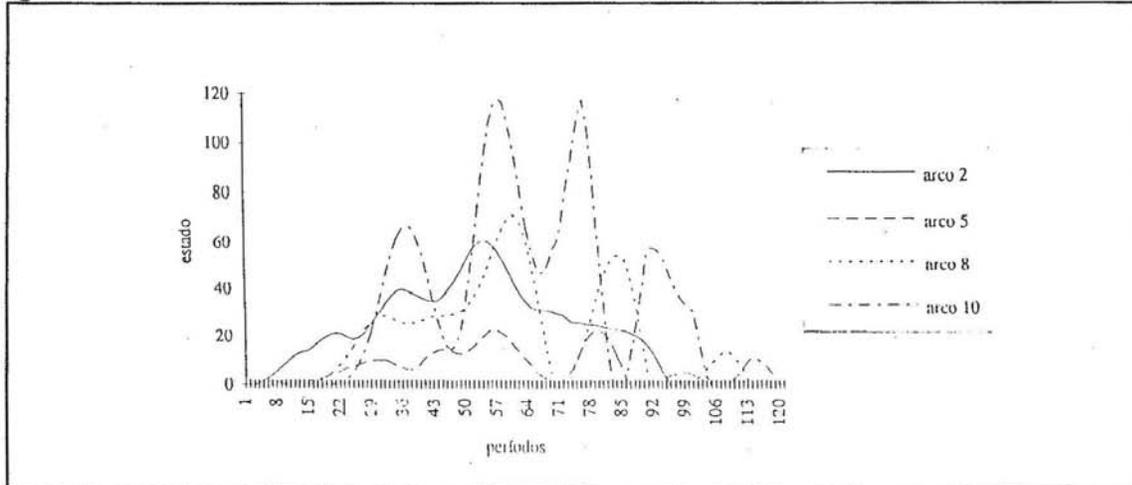
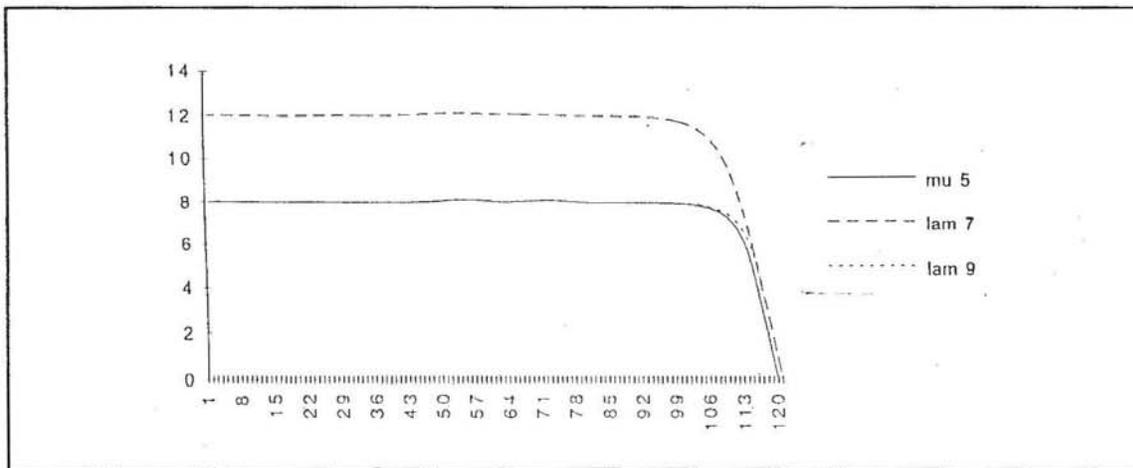
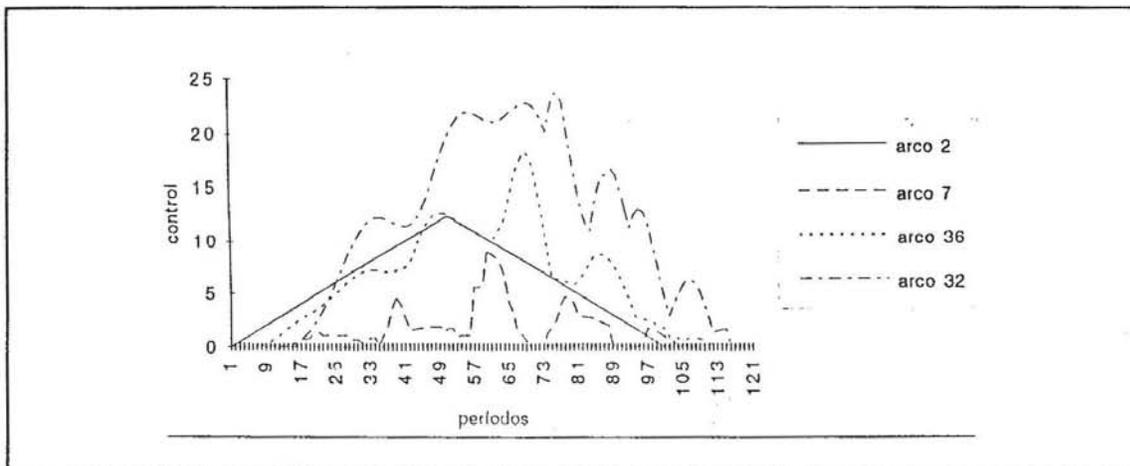
Figura 4. Red Chica. Variables de Estado en Ruta: (2,5,8,10)**Figura 5. Red Chica. Condición de optimalidad en nodo 5****Figura 6. Red Gande. Variables de Control en Ruta: (2,7,36,32)**

Figura 7. Red Gande Variables de Estado en Ruta: (2,7,36,32)

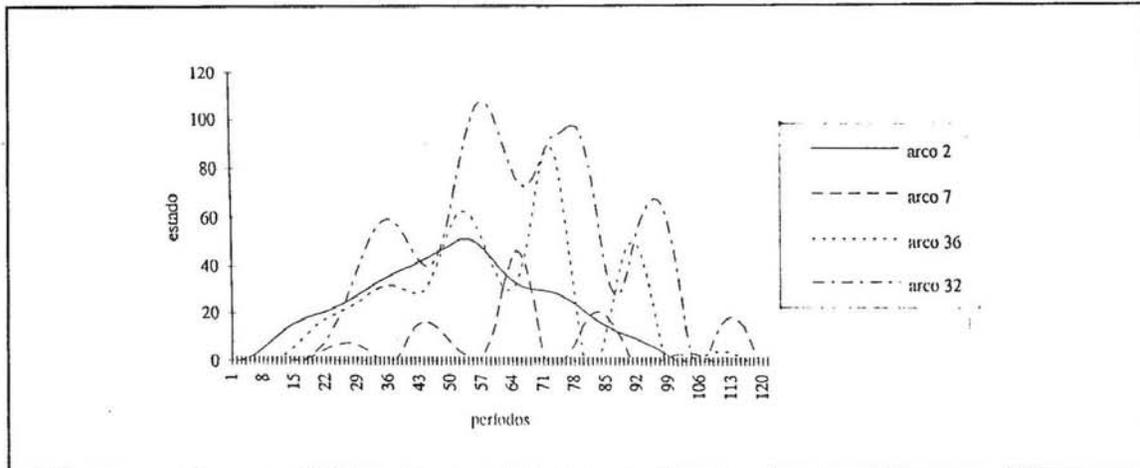
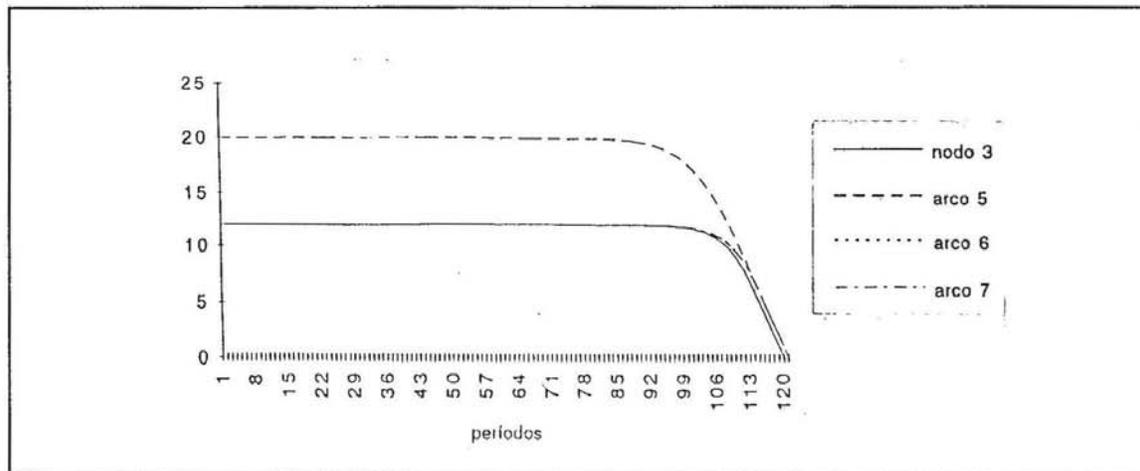


Figura 8. Red Gande. Condición de optimalidad en nodo 3



AGRADECIMIENTOS

La presente investigación ha sido parcialmente financiada por FONDECYT-Chile y la Pontificia Universidad Católica de Chile.

REFERENCIAS

BUDELIS, J.J. Y BRYSON, A.E. (1970) Some Optimal Control Results for Differential-Difference Systems **IEEE Transactions on Automatic Control**, Short papers, April, 237-241.



- DREW, D.R., Deterministic aspects of freeway operation and control. **Freeway characteristics operation and accidents**. Highway Research Record, 99, 48-58, Washington D.C., 1965.
- CAREY, M. (1992) Nonconvexity of the dynamic traffic assignment problem. **Transp. Res.**, **26B**, N° 2, 127-133.
- CAREY, M. (1987) Optimal time-varying flows on congested networks. **Op. Res.** **35**, N° 1, 58-69.
- CAREY, M. (1986) A constraint qualification for a dynamic traffic assignment model. (technical note) **Transp. Sc.** **20**, N° 1, 55-58.
- FERNANDEZ, J.E. Y DE CEA, J. (1994) A dynamic network assignment model formulation and solution algorithm. **VII WCTR'95**, Sydney, Australia, July 16-22.
- FERNANDEZ, J.E. Y DE CEA, J. (1995) A dynamic network assignment model with realistic flow propagation. **Submitted to Transportation Research B**.
- FRIESZ, T.L., LUQUE, J., TOBIN, R.L. Y WIE, B-W., (1989) Dynamic network traffic assignment considered as a continuous time optimal control problem. **Op. Res.** **37**, N° 6, 893-901.
- JANSON, B.N. (1991a) Dynamic traffic assignment for urban road networks. **Transp. Res.** **25B**, Nos. 2/3, 143-161.
- JANSON, B.N. (1991b) Convergent algorithm for dynamic traffic assignment, **Transp. Res. Rec.** **1328**, 69-80.
- MERCHANT, D.K. Y NEMHAUSER, G.L. (1978-a) A model and an algorithm for the dynamic traffic assignment problem. **Trans. Sc.** **2**, N° 3, 183-199.
- LEBLANC, L.J., MORLOK, E. Y PERSKALLA, W. (1975) An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem. **Transp. Sc.** **9**, 309-318.
- MERCHANT, D.K. Y NEMHAUSER, G.L. (1978-B) Optimality conditions for a dynamic traffic assignment model. **Transp. Sc.** **2**, N° 3, 200-207.
- RAN, B., BOYCE, D. E., Y LEBLANC, L.J. (1993) A new class of instantaneous dynamic user-optimal traffic assignment models. **Op. Res.**, **Vol. 41**, N° 1, pp. 192-201.
- WIE, B-W, FRIESZ, T.L. Y TOBIN, R.G. (1990) Dynamic user optimal traffic assignment on congested multidestination networks. **Transp. Res.** **24B**, N° 6, 431-442.



WIE, B-W., TOBIN, R.L. Y FRIESZ, T.L. (1994) The augmented lagrangian method for solving dynamic network traffic assignment models in discrete time. **Transp. Sc.** **28-3**, 204-220.

WIE, B-W., TOBIN, R.L., FRIESZ, T.L. Y BERNSTEIN, D. (1995) A Discrete Time, Nested Cost Operator Approach to the Dynamic Network User Equilibrium Problem. **Transp. Sc.** **29-1**, 79-92.

