

---

## CALIBRACION DE REDES DE TRANSPORTE: COMPARACION DE LOS METODOS BINIVEL Y HOOKS & JEEVES

René M. Alvarez Cárcamo

Ingeniero Civil de Industrias U.C.  
Estudios Econométricos Ingenieros Asociados  
Colón 3773, Depto 72. Fono: 206 31 62

### RESUMEN

La calibración de redes de transporte consiste en determinar los parámetros de las curvas flujo-velocidad de los arcos componentes de la red, de tal forma que luego de producida la asignación de equilibrio, los valores modelados de flujos en los arcos se aproximen tanto como sea posible a los conteos de tráfico efectuados a nivel de calles y avenidas. Para lo anterior se requiere contar con tres elementos fundamentales: una red de transporte modelada en base a arcos, nodos y centroides; una matriz Origen-Destino obtenida a través de encuestas de preferencias, expandida y corregida en forma independiente a la red; y conteos de tráfico independientes de la matriz y los parámetros de la red modelada.

En la literatura se han propuesto distintos métodos para calibrar redes, entre los que destaca el método *binivel* propuesto por *Suh et al.* para calibrar una red interurbana en Corea del Sur (*Suh, Park y Kim, 1990*) y utilizado en la calibración de la red estratégica de la Encuesta Origen Destino de Viajes de Santiago 1991.

Este trabajo muestra los resultados de calibración de una red de transporte privado a través de los métodos *binivel* y de *Hooks & Jeeves*. Luego de un análisis de resultados, se fundamenta la elección del método de *Hooks & Jeeves* para calibrar redes de transporte privado cuyas funciones de costo en los arcos son del tipo BPR.

La Metodología y resultados del presente trabajo fueron desarrollados como parte del estudio "*Análisis y Recalibración de los Modelos de ESTRAUS*" realizado por la empresa consultora Fernández y De Cea Ingenieros Ltda., por encargo de la Secretaría Ejecutiva de la Comisión de Planificación de Inversiones en Infraestructura de Transporte (SECTRA)



## 1. EL METODO BINIVEL

### 1.1 Descripción General del Método

El Problema Binivel consta de dos problemas de optimización resueltos secuencialmente. En el primero de ellos (P1), se determinan los parámetros de la función de costos de cada categoría de arcos, que minimizan las diferencias entre los *flujos observados* y los *flujos modelados*. En el segundo problema (P2), se modelan los flujos a través de una asignación de equilibrio utilizando los parámetros de la función de costos determinados en (P1). El Problema Binivel así descrito se plantea como:

$$(P1) \quad \text{Min}_{\alpha, \beta} \sum_a (f_a^0 - f_a(\alpha, \beta))^2 \quad (1.1)$$

$$\alpha, \beta \geq 0 \quad (1.2)$$

donde  $f_a(\alpha, \beta)$  es tal que resuelve:

$$(P2) \quad \text{Min}_{f_a} \sum_a \int_0^{f_a} c_a(f_a, \alpha, \beta) df \quad (1.3)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{p \in P_w} h_p = T_w \quad \forall \quad T_w \quad (1.4)$$

$$f_a = \sum_{p \in P} h_p \cdot \delta_{ap} \quad (1.5)$$

$$f_a \geq 0 \quad (1.6)$$

donde:

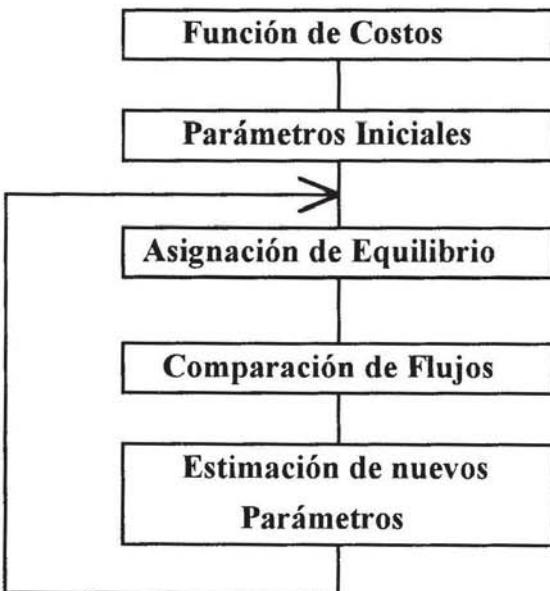
- $c_a$  : Función de costo del arco  $a$
- $\alpha, \beta$  : Parámetros de la función de costos
- $T_w$  : Demanda entre el par  $w$
- $w$  : Par Origen-Destino (i,j)
- $f_a^0$  : Flujo observado en el arco  $a$
- $f_a$  : Flujo modelado en el arco  $a$
- $\delta_{ap}$  : toma el valor 1 si el arco  $a$  está en la ruta  $p$ , y 0 si no
- $P$  : Conjunto de todas las rutas sobre la red
- $P_w$  : Conjunto de rutas que unen el par  $w$
- $p$  : Elemento de  $P$
- $h_p$  : Flujo en la ruta  $p$

Tal como se desprende de (1.3), (1.4), (1.5) y (1.6), (P2) es un problema de equilibrio de usuarios que puede ser resuelto por ejemplo, a través del algoritmo de Frank-Wolfe.

El proceso iterativo del algoritmo binivel, se muestra en la Figura 1.1.



**Figura 1.1**  
**Proceso Iterativo Algoritmo Binivel**



## 1.2 Función de costo

La función de costo utilizada en este trabajo es la BPR (BPR 1964) :

$$c_a(f_a, \alpha, \beta) = T_0 \left[ 1 + \alpha \left( \frac{f_a}{k_a} \right)^\beta \right] \quad (1.7)$$

## 1.3 Expresión de los Flujos en Función del Costo en el Arco

El (**P1**) requiere expresar los flujos modelados en (**P2**) como una función lineal de los costos de equilibrio  $c_a(f_a, \alpha, \beta)$ .

Esta función lineal debe ser del tipo:

$$f_a(c_a, \alpha, \beta) = u(\alpha, \beta) \cdot x(c_a, \alpha, \beta) + v(\alpha, \beta) \quad (1.8)$$

A partir de la ecuación (1.7), y despejando de ella el flujo asignado  $f_a$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\left( \frac{f_a}{k_a} \right)^\beta = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{c_a}{T_0} - 1 \right) \quad (1.9)$$



sacando logaritmo y reordenando se obtiene:

$$\ln\left(\frac{f_a}{k_a}\right) = \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{c_a - T_0}{T_0}\right) - \frac{1}{\beta} \ln(\alpha) \quad (1.10)$$

finalmente haciendo los siguientes cambios de variables:

$$z = \ln\left(\frac{f_a}{k_a}\right) \quad (1.11)$$

$$u = \frac{1}{\beta} \quad (1.12)$$

$$x = \ln\left(\frac{c_a - T_0}{T_0}\right) \quad (1.13)$$

$$v = -\left(\frac{1}{\beta} \cdot \ln(\alpha)\right) \quad (1.14)$$

resulta la función de una recta:

$$z = u \cdot x + v \quad (1.15)$$

donde  $z$  es una función de la variable  $f_a$ .

Dado lo anterior, el **(P1)** de la ecuación (1.1) se puede plantear como:

$$\text{Min} \quad \sum_a (z_a - \hat{z}_a)^2 \quad (1.16)$$

donde:

$$z_a = \ln\left(\frac{f_a^0}{k_a}\right) \quad (1.17)$$

$$\hat{z}_a = \ln\left(\frac{f_a}{k_a}\right) \quad (1.18)$$

lo que es equivalente a plantear el **(P4)**:

$$\text{(P4)} \quad \text{Min} \quad \sum_i \left( \ln\left(\frac{f_a^0}{f_a}\right) \right)^2 \quad (1.19)$$

El **(P4)** encuentra su mínimo cuando los flujos observados y los modelados se igualan.



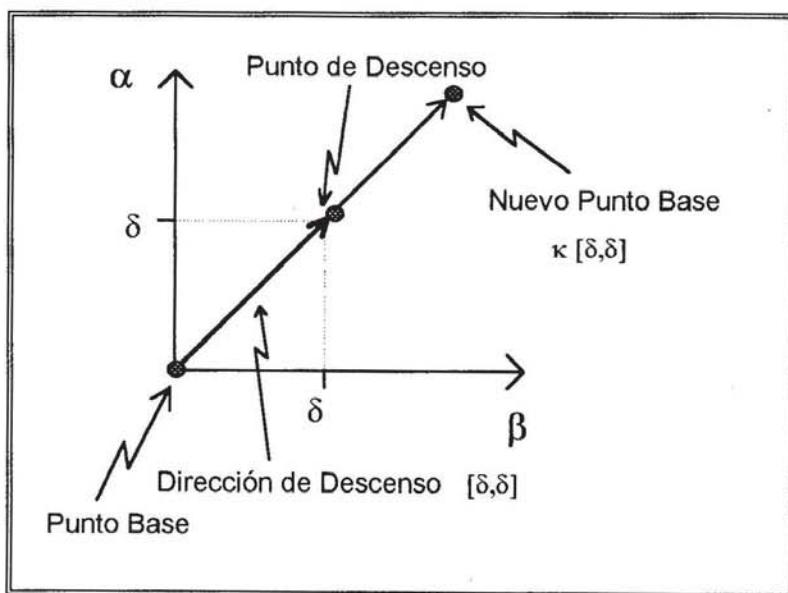
## 2. EL METODO DE HOOKS & JEEVES

### 2.1 Descripción del Método

La aplicación del método de Hooks & Jeeves a la calibración de la red vial, permite determinar los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de la función de costos (1.7) para cada categoría de arcos a través de un proceso de prueba y error. Este proceso consiste en efectuar una búsqueda exploratoria a través de cada una de las coordenadas del espacio de soluciones (parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de las funciones de costo) a fin de encontrar una dirección de descenso local de la función objetivo (1.19).

En la Figura 2.1 se describe el proceso en dos dimensiones:

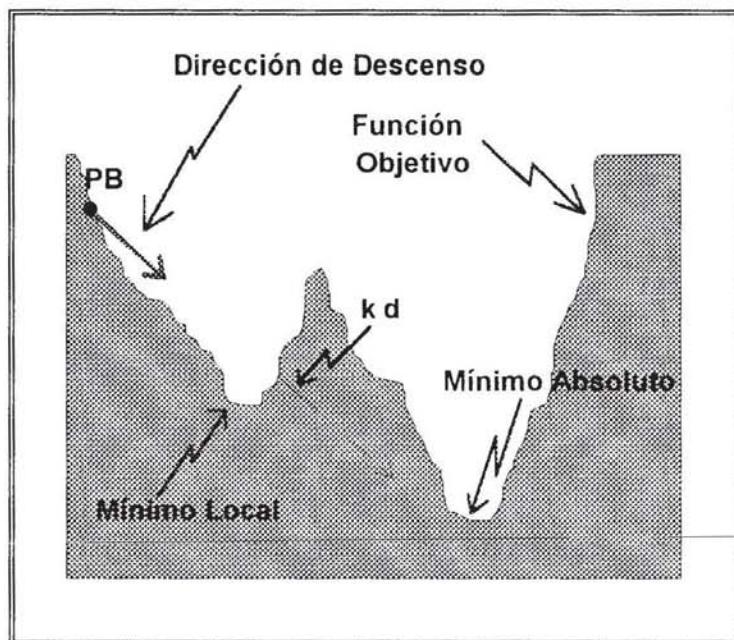
**Figura 2.1**  
Método de Hooks & Jeeves en 2 Dimensiones



La idea de establecer un nuevo *Punto Base* a una distancia  $\kappa \cdot \vec{d}$  del *Punto Base* original, es permitir al proceso "salir" de posibles mínimos locales de la función objetivo, tal como se muestra en la Figura 2.2



**Figura 2.2**  
**Método de Hooks & Jeeves**



Las etapas del proceso de Hooks & Jeeves son las siguientes:

i) **Exploración desde el Punto de Base y obtención de la Dirección de Descenso**

Se efectúan cambios individuales de magnitud  $\pm\delta$  en los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de cada categoría de arcos y se evalúa la función objetivo en cada nuevo punto a través de una asignación de equilibrio.

La *dirección de descenso* está determinada por un vector de dimensión  $n$  (número de parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ ) cuyos componentes registran el resultado de cada exploración individual. Si luego de modificar un parámetro se produce una mejora en la función objetivo, se registra en el vector de descenso un  $\pm\delta$ . Si la función objetivo no mejora, se registra un 0. Dado esto, el vector de descenso es del tipo:

$$\vec{d} = [0 \quad +\delta \quad +\delta \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad -\delta] \quad (2.1)$$

ii) **Evaluación en el Punto de Descenso**

Se modifican en forma conjunta todos aquellos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  que produjeron una mejoría de la función objetivo en la etapa de exploración, efectuándose una nueva asignación de equilibrio en este punto.

Si se produce una mejora en la función objetivo, se acepta esta dirección como una dirección en que la función objetivo disminuye y se continúa con el paso iii). El punto encontrado se denomina *Punto de Descenso*.

Si no se produce una mejoría en la función objetivo, se repite el paso i) con una magnitud de exploración  $\delta' = \delta / 2$ .

### iii) Avance

A partir del *Punto Base* se efectúa un avance  $\kappa \cdot \vec{d}$ . En este punto se efectúa una nueva evaluación de la función objetivo. Si mejora el valor de la función objetivo, se establece este punto como *nuevo Punto Base*, repitiéndose el proceso de exploración i).

Si no mejora la función objetivo, se efectúa un avance  $(\kappa / 2) \cdot \vec{d}$  desde el *Punto Base* original. Si mejora el valor de la función objetivo, se establece este punto como *nuevo Punto Base*, repitiéndose el proceso de exploración i).

Si no mejora la función objetivo, se establece el *Punto de Descenso* como nuevo *Punto Base* y se repite el proceso de exploración y).

El método finaliza cuando el  $\delta$  a través del cual son efectuadas las exploraciones en i), se hace arbitrariamente pequeño y la función objetivo no mejora en la dirección de descenso indicada.

## 3. COMPARACION DE LOS DOS METODOS DE CALIBRACION

### 3.1 Descripción de la Red, Conteos y Matriz Utilizadas

Con la finalidad de comparar los dos métodos de calibración de redes de transporte privado, se experimentó con una red, matriz y conjunto de conteos de prueba, especialmente preparados para tal efecto. La red de prueba utilizada consta de 3.081 arcos de viaje, 731 arcos de acceso, 988 nodos, y 264 zonas. Los arcos se encuentran divididos en 12 categorías cuyos parámetros de las función de costos (1.7) se muestran a continuación:

**Tabla 3.1**  
Parámetros de las Funciones de Costo de la Red de Prueba

Categoría	$\alpha$	$\beta$
1	2,0	6,0
2	1,5	5,5
3	1,4	5,5
4	2,1	5,1
5	2,1	5,4
6	2,3	4,6

Categoría	$\alpha$	$\beta$
7	1,9	4,5
8	2,4	4,5
9	0,2	6,0
10	0,8	4,0
11	2,5	5,2
12	0,2	4,0



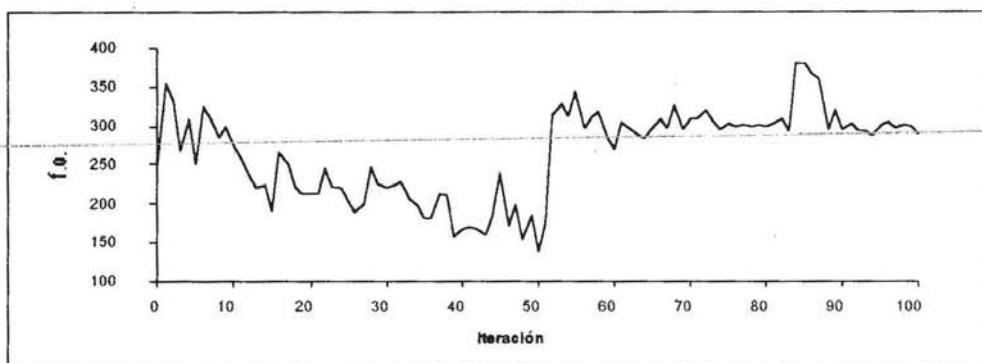
La matriz de prueba utilizada tiene un total de 169.735 viajes, distribuidos entre 264 zonas.

Los *conteos de prueba* fueron obtenidos a través de una asignación de equilibrio de la *matriz* sobre la *red de prueba*, seleccionándose en forma aleatoria un subconjunto de 565 arcos y sus respectivos flujos de equilibrio (para las categorías 11 y 12 no se obtuvo conteos).

### 3.2 Calibración con Método Binivel

Como punto de partida, se tomó los valores  $\alpha = 0,2$  y  $\beta = 4$  (Recomendados por el *Bureau of Public Roads* para autopistas, 1964) para las 12 categorías de arcos de la red. En la figura 3.1, se muestra la evolución de la función objetivo (1.19) luego de 100 iteraciones del algoritmo.

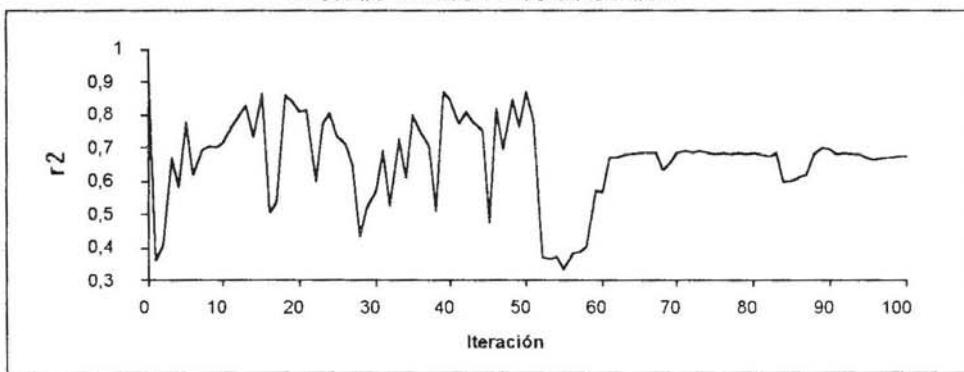
**Figura 3.1**  
**Método Binivel: Evolución de la Función Objetivo**



En el mencionado gráfico, se aprecia que el proceso iterativo posee características oscilantes. En un principio la función objetivo tiende a disminuir pero a partir de la iteración 50 se produce un ascenso que estabiliza su valor en torno a 300.

En la Figura 3.2 se muestra la evolución del *coeficiente de determinación de la muestra* o *correlación al cuadrado* ( $r^2$ ) entre flujos totales observados y modelados, a lo largo de las 100 iteraciones.

**Figura 3.2**  
**Método Binivel: Evolución de  $r^2$**



El *coeficiente de determinación* se calculó a partir de la siguiente expresión:

$$r^2 = \frac{\left( \sum_a (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \right)^2}{\sum_a (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_a (y_i - \bar{y})^2} \quad (3.1)$$

En la Figura 3.2, se aprecia que a partir de la iteración 50 se produce un brusco descenso coincidente con el ascenso del valor de la función objetivo mostrado para dicha iteración en la figura 3.1.

Finalmente, el valor de  $r^2$  se estabiliza en torno a 0,7.

Los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  alcanzados luego de las 100 iteraciones son mostrados en la Tabla 3.2

**Tabla 3.2**  
Parámetros Finales del Método Binivel luego de 100 iteraciones

<b>Correlación</b>				0,6752
<b>Función Objetivo</b>				289,63
Categoría	Alfa	Beta	$r^2$	
1	10.300,0	5,1	0,7428	
2	57,0	8,6	0,4356	
3	993,0	2,1	0,6613	
4	1.590,0	3,9	0,7189	
5	203.000.000,0	8,9	0,1087	
6	144.000,0	8,2	0,3224	
7	4.970,0	5,8	0,9319	
8	65,0	0,6	0,9909	
9	1.000,0	5,7	0,4669	
10	136.000,0	4,5	0,5365	

Es fácil apreciar que los valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , obtenidos luego de 100 iteraciones del proceso difieren substancialmente de los valores con que fueron generados los conteos.

Finalmente, es relevante señalar que el proceso fue detenido arbitrariamente en la iteración 100; toda vez que no se aprecia convergencia hacia ningún valor claro de la función objetivo, de  $r^2$  o de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

### 3.3 Calibración con Método de Hooks & Jeeves

En esta sección se describen los resultados de calibrar la red de prueba descrita en la sección 3.1, a través del método Hooks & Jeeves, utilizando la misma matriz, conteos y punto de partida utilizados en 3.2.

Tal como se aprecia en la Tabla 3.3, el valor de la función objetivo en el punto de convergencia es 2,72, sensiblemente inferior al 289,63 alcanzado al utilizar el método binivel. Además de lo anterior, el  $r^2$  alcanzado (99,78 %) es claramente cercano a uno, y notablemente mayor que el alcanzado al utilizar binivel (67,52 %).

**Tabla 3.3**  
**Resultados de la Calibración Hooks & Jeeves**

<b>Categoría</b>	<b>Parámetros H&amp;J</b>		<b><math>r^2</math> por Categoría</b>
	$\alpha$	$\beta$	
1	2,3	6,9	0,9978
2	3,1	9,2	0,9916
3	1,8	7,1	0,9966
4	2,2	4,9	0,9973
5	2,4	5,3	0,9843
6	2,1	4,4	0,9911
7	1,6	3,4	0,9988
8	3,4	6,2	0,9999
9	2,8	9,5	0,9803
10	2,2	4,9	0,9991
<b>Correlación</b>			0,9978
<b>Función Objetivo</b>			2,7200

En algunas categorías (por ejemplo 1, 4, 5 y 6) los parámetros obtenidos son bastante cercanos a los parámetros originales (ver Tabla 3.1). Para otras (por ejemplo 3 y 7), los valores son razonablemente similares. Sin embargo las categorías 2, 8, 9 y 10 presentan diferencias lo que hace suponer la existencia de múltiples óptimos locales.

## 4. ANALISIS DE RESULTADOS

### 4.1 Método Binivel

El método Binivel tiene un largo transiente en el cual el  $r^2$  y la función Objetivo se comportan en forma oscilante. Luego de aproximadamente 50 iteraciones se produce una relativa estabilidad de estos indicadores.



A pesar de lo anterior, es posible afirmar que el método no converge hacia valores razonables de la función objetivo, de  $r^2$  o de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . En efecto, los valores del parámetro  $\alpha$  (en especial para la categoría 5) aparecen claramente erróneos y fuera de rango.

Finalmente, es del caso señalar que a pesar de trabajarse con la misma red y la misma matriz con que fueron generados los conteos, se lograron valores de ajuste relativamente pobres ( $r^2=0,67$ ).

## 4.2 Método de Hooks & Jeeves

El método de Hooks & Jeeves, entregó valores razonables de  $r^2$  y de la función objetivo. En efecto la función objetivo alcanzó un valor de 2,7, cercano al valor ideal 0. Por su parte el  $r^2$  alcanzó un valor de 0,998 que es muy cercano al valor ideal 1, lo que indica que el proceso se comportó adecuadamente. Finalmente, los valores reportados para los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  están claramente dentro de rangos aceptables.

Llama la atención que a pesar de que los indicadores utilizados (valor de la función objetivo y  $r^2$ ) indican que la calibración se llevó a efecto con éxito, existan diferencias entre los parámetros con que fueron originados los conteos o "verdaderos", y los parámetros logrados luego de haberse logrado la convergencia del proceso. Lo anterior sugiere la existencia de múltiples óptimos locales.

## 5. CONCLUSIONES

De la experiencia descrita en este trabajo se puede concluir que el método binivel no es apropiado para calibrar redes de transporte privado, ya que no converge hacia valores adecuados de la función objetivo y de  $r^2$ , arrojando valores claramente fuera de rango para los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

Por su parte, el método de Hooks & Jeeves sí converge adecuadamente hacia valores apropiados de los parámetros calibrados, entregando buenos valores para la función objetivo y  $r^2$ .

Dada la existencia de múltiples óptimos locales se hace especialmente apropiada la utilización del método de Hooks & Jeeves para la calibración de redes de transporte privado.

Finalmente, es de interés señalar que el método de Hooks & Jeeves aquí descrito fue utilizado con éxito para la recalibración de la red estratégica de Santiago en 1994.

## REFERENCIAS

Bureau of Public Roads. (1964) **Traffic Assignment Manual**. U.S. Department of Commerce, Urban Planning Division, Washington D.C.

SECTRA (1994) **Recalibración de la Red Estratégica de Santiago**.

SECTRA (1991) **Encuesta Origen Destino de Viajes del Gran Santiago**.

Suh, Park y Kim. (1990) A highway capacity function in Korea: meseasurement and calibration. **Transportation Research A.**, Vol.24 A, Nº3, pp. 177-186.

