ASIGNACION PARTICION MODAL CONJUNTA EN REDES COMBINADAS DE TRANSPORTE PUBLICO: FORMULACION MATEMATICA Y ALGORITMO DE SOLUCION

Joaquín de Cea Ch. y J.Enrique Fernández L.
Departamento de Ingeniería de Transporte
Pontificia Universidad Católica de Chile
Casilla 306, Santiago 22, CHILE
TELEFONO: (56-2) 686-4270
FAX: (56-2) 552 4054

RESUMEN

En este trabajo se formula un problema de asignación y partición modal conjunta para sistemas combinados de transporte público, con consideración explícita de redes compuestas y de las interacciones entre los usuarios de las diferentes subredes existentes. Los supuestos básicos del modelo consideran que en cada una de las subredes (bus, metro y bus-metro) los usuarios eligen sus rutas de acuerdo al primer principio de Wardrop y que la repartición de la demanda en transporte público (matriz de distribución de viajes) entre dichas subredes se realiza según un modelo logit. Evidentemente, en el equilibrio los niveles de servicio empleados para determinar las particiones modales son los mismos que resultan de asignar dichas demandas a las subredes correspondientes.

El modelo es planteado como una desigualdad variacional en la que el Jacobiano del vector de funciones de costo es asimétrico y el de las funciones de demanda es simétrico. Dada esta característica se propone usar el algoritmo de diagonalización como método de solución.

Luego de la presentación de la formulación matemática del problema y de un esbozo del algoritmo de solución propuesto, se discuten algunos aspectos relevantes de implementación, entre los que destaca el tema relacionado con el algoritmo de cálculo de rutas mínimas en redes combinadas metro-bus. Se enfatizan las diferencias que este algoritmo de cálculo de rutas mínimas presenta respecto del de determinación de rutas mínimas en redes combinadas auto-metro.

1. INTRODUCCION

El problema de elección de rutas en redes de transporte público de gran tamaño, con consideración de restricción de capacidad de los vehículos, ha sido un tema de preocupación bastante reciente entre los investigadores de transporte. En De Cea y Fernández (1993) se presenta un modelo de equilibrio de tráfico con demanda fija, basado en el concepto de ruta de transporte público, en el que la función de costo asociada a los arcos de viaje en vehículo depende de los flujos de pasajeros, considerándose en forma implícita, tal como se hace en el caso de redes viales, las restricciones de capacidad del sistema. Dado que el Jacobiano del vector de funciones de costo es asimétrico, el problema variacional que representa las condiciones de equilibrio de tráfico óptimo de usuarios no tiene un problema de optimización equivalente, por lo que se propone para su solución el algoritmo de diagonalización. Wu et al (1994) proponen un modelo de equilibrio óptimo de usuarios, basado en el concepto de estrategia, que también resuelven mediante un procedimiento de diagonalización.

Si bien es posible simular con ambos modelos la elección de rutas en redes de transporte público con diferentes clases de servicio (por ejemplo bus, metro y combinaciones metro-bus) es evidente que suponer que dicha elección es el resultado del equilibrio de los costos generalizados de viaje constituye un enfoque inocente y limitado del problema que se desea resolver. Por esto, los dos modelos citados tienen su campo de aplicación más adecuado en la asignación de viajes sobre redes puras de transporte público (buses o metro, por ejemplo).

Resulta bastante evidente que en un sistema con modos puros y combinados de transporte público el enfoque de modelación debe ser diferente al anterior. En general se supondrá que un viajero en este sistema enfrentará al menos dos decisiones al realizar su viaje entre un par dado de zonas. Debe elegir el modo puro o compuesto y luego su ruta sobre la red correspondiente. El modelo de equilibrio en este caso será uno de asignación-particion modal conjunta. En el caso de los modos combinados existe para los viajeros una tercera decisión posible, que es la del punto de transbordo entre los modos (ver modelo 3 propuesto en Fernández et al, 1994).

En este trabajo se analizará en detalle el problema de asignación-partición modal conjunta y se supondrá que para el caso de las rutas sobre modos combinados el nodo de transbordo entre modos resulta del proceso de elección de rutas sobre la red compuesta (asignación). Se considerará explícitamente la existencia de modos compuestos, en forma similar a lo expuesto en Fernández et al (1994) para el caso de las redes compuestas auto-metro y se discutirán en detalle las particularidades de este problema.

Se supondrá que se tiene una red integrada de servicios (líneas) de bus y metro, sobre la que circulan (e interactúan, compitiendo por la capacidad de los servicios ofrecidos) diferentes tipos de viajeros: aquellos que utilizan sólo servicios de bus y sólo servicios de metro (usuarios de modos puros de transporte público) y aquellos que utilizan una combinación de servicios de bus y de metro (usuarios del modo compuesto bus-metro). La demanda origen destino se reparte entre los modos alternativos de acuerdo a un modelo logit y las demandas modales son asignadas a sus respectivas redes de manera tal que en el equilibrio se cumpla, en cada caso, el primer principio de Wardrop.

El artículo ha sido organizado de la siguiente manera. Luego de esta breve introducción, en el capítulo 1 se presentan algunas definiciones básicas. En particular se define la red subyacente al modelo, las funciones de costo asociadas a sus diferentes arcos y los modelos de partición modal entre servicios puros y combinados de transporte público. El capítulo 3 se dedica a la formulación matemática del problema. Se establecen las condiciones de equilibrio y a partir de ellas se plantea el problema como una desigualdad variacional. En el capítulo 4 se discute el algoritmo de solución y finalmente en el capítulo 5 se presentan comentarios referentes a la implementación computacional del modelo, haciendo especial énfasis en los algoritmos de cálculo de rutas mínimas en redes compuestas bus-metro.

2. DEFINICIONES PREVIAS

2.1 La red "multimodal"

La red multimodal de transporte público está dada por un grafo donde N es la unión de los conjuntos de nodos que representan los centroides de zonas , paradas de las líneas de transporte público de superficie (N_b) y estaciones de metro (N_m) y S es la unión de los conjuntos de arcos que corresponden a los arcos virtuales de viaje para servicios de bus (S_b) y de metro (S_m), a los arcos de acceso (egreso) y a los arcos de transbordo superficie-metro (S_a). La red que se muestra en la figura 1 representa una red compuesta (tipo bus-metro), codificada en términos de los arcos virtuales de viaje en transporte público que conforman cada una de las sub-redes. También están representados en ella los arcos de transbordo que unen la red de superficie con la red de metro y los arcos de acceso (egreso) que unen los centroides de zonas con los nodos de la red de buses. Es necesario considerar que un arco virtual de viaje está formado por un conjunto de líneas y tiene asociados atributos tales como un tiempo un esperado de viaje en vehículo, una tarifa, una frecuencia que corresponde a la suma de las frecuencias de las líneas que lo conforman, una capacidad correspondiente a la suma de las capacidades de dichas líneas, un tiempo de espera, un flujo, etc. (para mayores detalles sobre este tipo de redes se recomienda ver De Cea y Fernández, 1993).

En el modelo que se presenta en este trabajo se considerarán tres redes modales diferentes:

- Red de buses, que contiene sólo arcos virtuales de viaje del modo bus, arcos de transbordo entre servicios de buses y arcos de acceso.
- Red de metro, que contiene sólo arcos virtuales de viaje del modo metro, arcos de transbordo superficie-metro y arcos de acceso.
- Red compuesta bus-metro, que corresponde a la suma (superposición) de las dos redes anteriores.

Además, en términos de la disponibilidad para los viajeros de modos de transporte público se distinguen dos tipos distintos de pares de zonas origen-destino:

W_p : conjunto de pares O-D en los que los usuarios disponen de los modos metro y bus para realizar sus viajes. Estas son parejas en las que los centroides de origen y destino están conectados directamente al metro, por lo que se supone no relevante la alternativa combinada.

W_c : conjunto de pares O-D en los que los usuarios disponen del modo compuesto bus-metro y del modo bus para realizar sus viajes. Estas son parejas en las que sólo uno de los centroides (origen o destino) o ninguno de ellos están conectados directamente al metro. En este último caso el modo compuesto tendrá rutas del tipo bus-metro-bus.

2.2 Funciones de costo

Las funciones de costo para los arcos virtuales de viaje (que como se ha dicho representan conjuntos atractivos de líneas) en una red de transporte público tienen, en términos generales, la siguiente forma (ver De Cea y Fernández, 1993):

$$c_s = \bar{t}_s + \left(\frac{\alpha}{d_s}\right) + \beta\left(\frac{V_s + \tilde{V}_s}{K_s}\right)^n \tag{1}$$

donde:

$\bar{t}_s$	:	tiempo de viaje en vehículo más tarifa para el arco s.
d_s	:	frecuencia total del arco s.
V_s	:	flujo de pasajeros en el arco s.
$\tilde{V}_s$	:	flujo de otros arcos de viaje, que contienen alguna línea de las que pertenecen al arco s, que compite por la capacidad del arco s.
K_s	:	capacidad del arco s.
α, β, n	:	parámetros de calibración.

Observando la expresión (1), es fácil ver que aun cuando los parámetros de las funciones anteriores (α, β, n) fueran los mismos para todos los arcos de viaje el Jacobiano de las funciones de costo no será, en general, simétrico, dado que diferentes líneas tienen diferentes capacidades.

Para el problema de partición modal y asignación conjunto, en que los arcos de las redes de bus y metro son compartidos por pasajeros que utilizan estos modos simples para realizar sus viajes y por pasajeros que utilizan el modo compuesto bus-metro, las funciones de costo deben considerar esta interacción de flujos. No obstante se supondrá que los costos percibidos por un usuario de modo puro o modo compuesto, sobre un arco de bus (o de metro), serán idénticos. Por lo tanto, las funciones de costo tendrán la siguiente forma:

$$c_s = c_s^b = c_s^c = \bar{t}_s + \left(\frac{\alpha_1}{d_s}\right) + \beta_1 \left(\frac{V_s^b + V_s^c + \tilde{\bar{V}}_s}{K_s}\right)^{n_1} \qquad \forall\, s \in S_b \tag{2}$$

$$c_s = c_s^m = c_s^c = \bar{t}_s + \left(\frac{\alpha_2}{d_s}\right) + \beta_2 \left(\frac{V_s^m + V_s^c + \tilde{\bar{V}}_s}{K_s}\right)^{n_2} \qquad \forall\, s \in S_m \tag{3}$$

donde:

c_s : costo del arco s.

c_s^c : costo del arco s para usuarios del modo c (b=bus, m=metro, c=compuesto).

V_s^b : flujo de pasajeros de bus que utilizan el arco $s \in S_b$.

V_s^m : flujo de pasajeros de metro que utilizan la el arco $s \in S_m$.

V_s^c : flujo de pasajeros del modo compuesto bus-metro, que utilizan el arco s, sea de bus o de metro.

Si se llama $\bar{V}_s^b$ a la suma $\left(V_s^b + V_s^c\right)$ y $\bar{V}_s^m$ a la suma $\left(V_s^m + V_s^c\right)$, se tienen las siguientes expresiones para las funciones de costo:

$$c_s = \bar{t}_s + \left(\frac{\alpha_1}{d_s}\right) + \beta_1 \left(\frac{\bar{V}_s^b + \tilde{\bar{V}}_s}{K_s}\right)^{n_1} \qquad \forall\, s \in S_b \tag{4}$$

$$c_s = \bar{t}_s + \left(\frac{\alpha_2}{d_s}\right) + \beta_2 \left(\frac{\bar{V}_s^m + \tilde{\bar{V}}_s}{K_s}\right)^{n_2} \qquad \forall\, s \in S_m \tag{5}$$

Los arcos de acceso y arcos de transbordo tienen un costo constante y equivalente al tiempo de caminata sobre ellos.

2.3 Modelos de partición modal

La distribución de viajes se considera fija, es decir, se supone conocida la matriz de viajes totales en transporte público, la que se denominará $\{\overline{g}_w\}$. Por lo tanto, el análisis de la demanda se centra, únicamente, en los modelos de partición modal.

Se pueden distinguir dos situaciones de elección modal entre pares de zonas origen-destino, suponiendo, como se ha mencionado, que el modo compuesto bus-metro no es relevante cuando el viaje puede realizarse sólo en metro. Estas situaciones son las siguientes:

- Bus v/s bus-metro, para $\forall\ w \in W_c$
- Bus v/s metro, para $\forall\ w \in W_p$

i) Bus versus Bus-Metro

Suponiendo que en este caso la partición modal se explica por un modelo logit binomial, éste puede expresarse de la siguiente forma:

$$G_w^b\left(u_w^{c*} - u_w^b\right) = \frac{1}{1 + \exp\left(\theta_1\left(u_w^{c*} - u_w^{b*}\right) - \varphi_1\right)} \tag{6}$$

de donde:

$$u_w^{c*} - u_w^{b*} = G_w^{-1}\left(g_w^{b*}\right) \quad \forall\ w \in W_c \tag{7}$$

La notación utilizada es la siguiente:

G_w^b	:	proporción de viajes que utilizan el modo bus para viajar entre el par $w \in W_c$.
g_w^{b*}	:	viajeros que utilizan el modo bus para viajar entre el par $w \in W_c$.
u_w^{c*}, u_w^{b*}	:	percepción por parte de los usuarios de los modos bus-metro y bus, respectivamente, del costo generalizado de viaje entre el par $w \in W_c$ en el equilibrio.
θ_1, φ_1	:	parámetros a calibrar usando información de elecciones modales.

ii) Bus versus Metro

En este caso, en forma similar al caso anterior, se puede expresar el modelo de partición modal mediante:

$$G_w^b\left(u_w^{m*} - u_w^b\right) = \frac{1}{1 + \exp\left(\theta_2\left(u_w^{m*} - u_w^{b*}\right) - \varphi_2\right)} \tag{8}$$

con:

$$u_w^{m*} - u_w^{b*} = G_w^{-1}\left(g_w^{b*}\right) \qquad \forall\, w \in W_p \tag{9}$$

donde:

G_w^b	:	proporción de viajes que utilizan el modo bus para viajar entre el par $w \in W_p$.
u_w^{m*}, u_w^{b*}	:	percepción por parte de los usuarios de los modos metro y bus, respectivamente, del costo generalizado de viaje entre el par $w \in W_p$ en el equilibrio.
θ_2, φ_2	:	parámetros a calibrar usando información de elecciones modales.

Las matrices de viajes obtenidas de los modelos de partición modal anteriores son las siguientes:

Modo bus	:	$\left\{g_w^b = G_w^b \cdot \bar{g}_w\right\}$
Modo metro	:	$\left\{g_w^m = G_w^m \cdot \bar{g}_w\right\}$
Modo bus-metro	:	$\left\{g_w^c = G_w^c \cdot \bar{g}_w\right\}$

Estas matrices deben ser asignadas sobre las redes modales correspondientes: bus, metro, bus-metro.

3. FORMULACION MATEMATICA DEL PROBLEMA

Antes de plantear las condiciones de equilibrio y formular matemáticamente el problema, conviene definir los diferentes conjuntos de rutas existentes sobre la red multimodal y las subredes puras. estos conjuntos son los siguientes:

R_w^b	:	conjunto de rutas entre pares w sobre la red de buses.
R_w^m	:	conjunto de rutas entre pares w sobre la red de metro.
R_w^c	:	conjunto de rutas entre pares w sobre la red compuesta.

$R^c_{w,c}$: conjunto de rutas compuestas entre pares w sobre la red compuesta.

Las condiciones de equilibrio del problema propuesto son entonces:

a) Para cada modo, sea éste puro o compuesto, no existe incentivo para que los usuarios cambien unilateralmente de ruta sobre la red correspondiente. En el caso de los modos puros (bus=b y metro=m), el principio de equilibrio (Wardrop, 1952) se expresa como:

$$\gamma_b \cdot C_r^{b*} \begin{cases} = u_r^{b*} / h_r^* > 0, \\ = u_r^{b*} / h_r^* = 0, \end{cases} \qquad r \in R_w^b, w \in W_p \tag{10}$$

$$\gamma_m \cdot C_r^{m*} \begin{cases} = u_r^{m*} / h_r^* > 0, \\ = u_r^{m*} / h_r^* = 0, \end{cases} \qquad r \in R_w^m, w \in W_p \tag{11}$$

Para el caso de los usuarios de modo compuesto bus-metro, las condiciones anteriores toman la forma siguiente:

$$\left\{\gamma_b \cdot C_r^{b*} + \gamma_m \cdot C_r^{m*}\right\} \begin{cases} = u_w^{c*} / h_r^* > 0, \\ \geq u_w^{c*} / h_r^* = 0, \end{cases} \qquad r \in R_{w,c}^c, w \in W_c \tag{12}$$

En la notación utilizada $C_r = \sum_s \delta_s^r \cdot c_s$ representa el costo de una ruta, con r perteneciente a alguno de los conjuntos de rutas definidos anteriormente. Los superíndices, cuando aparecen, indican el modo al que dicha ruta pertenece y el * denota costos en el equilibrio. En el caso del modo compuesto la tiene una parte en cada modo, lo que también sucede con el costo de la ruta compuesta. Los parámetros γ_b y γ_m deben ser calibrados a partir de datos observados, para ajustar la percepción que los usuarios tienen de los costos en los arcos de las redes de bus y metro respectivamente.

b) En el equilibrio ningún viajero tiene incentivo para cambiar unilateralmente de modo, puro o compuesto. Esto significa que la diferencia entre las desutilidades modales será igual a la inversa de las funciones de elección modal.

$$u_w^{c*} - u_w^{b*} = G_w^{-1}\left(g_w^{b*}\right) \qquad \forall\, w \in W_c \tag{13}$$

$$u_w^{m*} - u_w^{b*} = G_w^{-1}\left(g_w^{b*}\right) \qquad \forall\, w \in W_p \tag{14}$$

Las condiciones de equilibrio del problema de asignación/partición modal conjunta definidas por las ecuaciones (10) a (14) son equivalentes a la siguiente desigualdad variacional:

$$c(V^*)(V-V^*)-G^{-1}\left(g_w^{b*}\right)\left(g_w^b-g_w^{b*}\right)\geq 0 \qquad \forall\, g\in\Omega, \tag{15}$$

donde $c(V^*)$ representa el vector de funciones de costos en los arcos de la red multimodal, evaluadas en los flujos de equilibrio V^* y G^{-1} el vector de la inversas de las funciones de demanda modal evaluadas en las demandas $\left\{g_w^{b*}\right\}$. Los flujos V, V^* y las demandas g, g^* deben satisfacer las siguientes restricciones, que definen el conjunto factible Ω:

$$\bar{g}_w = g_w^b + g_w^c \qquad w\in W_c \tag{16}$$

$$\bar{g}_w = g_w^b + g_w^m \qquad w\in W_p \tag{17}$$

$$g_w^b = \sum_{r\in R_w^b} h_p \qquad w\in W_p \tag{18}$$

$$g_w^m = \sum_{r\in R_w^m} h_p \qquad w\in W_p \tag{19}$$

$$g_w^c = \sum_{r\in R_{w,c}^c} h_p \qquad w\in W_c \tag{20}$$

$$V_s = \sum_{w\in W}\left(\sum_{r\in R_w^b}\delta_{sr}\bullet h_r + \sum_{r\in R_{w,c}^c}\delta_{sr}\bullet h_r\right) \qquad s\in S_b \tag{21}$$

$$V_s = \sum_{w\in W}\left(\sum_{r\in R_w^m}\delta_{sr}\bullet h_r + \sum_{r\in R_{w,c}^c}\delta_{sr}\bullet h_r\right) \qquad s\in S_m \tag{22}$$

$$V_1^s = \frac{f_1\bullet V_s}{f_s} \qquad \forall\, 1\, A_s, s\in(S_b, S_m) \tag{23}$$

$$\delta_{sr} = \begin{cases}1, & si \quad s\in r,\\ 0, & si \quad s\notin r,\end{cases} \qquad s\in(S_b, S_m), \forall\, r \tag{24}$$

$$h_r \geq 0 \qquad \forall\, r \tag{25}$$

4. ALGORITMO DE SOLUCION

Dado que, como se ha mencionado, el vector de funciones de costo $c(V)$ tendrá en general Jacobiano asimétrico, no existe en este caso un problema de optimización equivalente. Así, un enfoque de solución podría usar algún método para resolver directamente (15), como el algoritmo de planos cortantes propuesto en Nguyen y Dupuis (1984), o cualquier otro método para resolver desigualdades variacionales (ver Harker y Pang, 1987).

Uno de los enfoques más usados para resolver problemas de redes con costos asimétricos es, debido a la simplicidad de implementación, el algoritmo de diagonalización (ver Florian, 1977 y Abdulaal y LeBlanc, 1979). Este es un procedimiento iterativo similar al método general de Jacobi para resolver ecuaciones no lineales (ver Pang y Chang, 1982). En este caso, dada una solución inicial factible, deberán diagonalizarse las funciones de costos de operación en los arcos de buses y metro, y al interior de cada diagonalización deberá resolverse un problema de optimización similar al propuesto en Fernández et al (1994) para el caso de modos combinados auto-metro. Estas funciones de costo diagonalizadas, en la iteración k, son de la forma:

$$\hat{c}_s = \bar{t}_s + \left(\frac{\alpha_1}{d_s}\right) + \beta_1\left(\frac{V_s + \tilde{\bar{V}}_s^k}{K_s}\right)^{n_1} \qquad \forall\, s \in S_b \tag{26}$$

$$\hat{c}_s = \bar{t}_s + \left(\frac{\alpha_2}{d_s}\right) + \beta_2\left(\frac{V_s + \tilde{\bar{V}}_s^k}{K_s}\right)^{n_2} \qquad \forall\, s \in S_m \tag{27}$$

en las que V_s representa el flujo de pasajeros sobre el arco de viaje s (suma de los pasajeros del modo puro, bus o metro según sea el caso, y de los pasajeros del modo compuesto). Los flujos compitentes son dejados constantes (evaluados para la solución factible de la iteración k) por lo que los costos $\hat{c}_s$ son separables, esto es, dependen sólo de su propio flujo.

La convergencia del algoritmo de diagonalización tiene como condición de suficiencia la monotonicidad de $c(V)$ (ver Florian y Spiess, 1982). Sin embargo en la práctica los algoritmos de diagonalización han mostrado muy buenas características de convergencia aun en casos en que dicha condición no se satisface.

Al interior de una iteración del algoritmo de diagonalización se debe resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\{V,g\}} z = \gamma_b \sum_{s \in S_b} \int_0^{V_s} \hat{c}_s(x)dx + \gamma_m \sum_{s \in S_m} \int_0^{V_s} \hat{c}_s(x)dx - \sum_{\substack{w \notin W_c \\ w \notin W_p}} \int_0^{g_w^b} G_w^{-1}(y)dy \tag{28}$$

$$\text{s.a} \quad \{V, g\} \in \Omega \tag{29}$$

El problema (28)-(29) tiene solución única si las funciones de costo son monótonas crecientes y los modelos de partición modal son funciones estrictamente decrecientes de las diferencias entre las desutilidades modales (Florian y Spiess, 1983) y puede resolverse fácilmente usando el algoritmo propuesto en Evans (1976), que es una adaptación del algoritmo de Frank-Wolfe.

En la fase de aproximación lineal (búsqueda de dirección) es necesario calcular rutas mínimas sobre las redes puras y la red compuesta, con lo que se obtienen los niveles de servicio (desutilidades) requeridos para calcular particiones modales y así obtener flujos origen-destino por modos. Dichas demandas son asignadas a las rutas mínimas en cada red, con lo se obtiene una solución auxiliar (flujos en arcos y flujos O/D), que junto a la solución inicial de la iteración definen la dirección de máximo cambio factible de la función objetivo (28). Hecho esto se pasa a la etapa de minimización unidimensional, que indica cuanto avanzar en la dirección anterior.

5. ASPECTOS DE IMPLEMENTACION

El algoritmo de diagonalización esbozado en el capítulo anterior requiere un algoritmo eficiente de cálculo de rutas mínimas y de asignación a rutas mínimas en redes puras y compuestas de transporte público. Para el caso de las redes puras (bus y metro) se ha implementado un algoritmo (ver De Cea y Fernández, 1989) que ha resultado muy eficiente tratando redes de transporte público de gran tamaño, como la red de buses de Santiago. Es necesario, sin embargo, desarrollar un algoritmo eficiente de cálculo de rutas mínimas y de asignación de viajes a redes compuestas de transporte público.

En Malbrán (1994) se realiza una detallada revisión de los algoritmos de cálculo de rutas mínimas más usados en el caso de las redes de transporte. Se propone además un algoritmo de dos fases para calcular rutas mínimas en redes combinadas. Dicho algoritmo, sin embargo, está principalmente orientado a tratar redes combinadas auto-metro, caso en el que los viajes tratados y, en consecuencia, las rutas que deben ser calculadas tienen una etapa en auto y una etapa en metro. Esto no es necesariamente así para las rutas combinadas bus-metro. En este caso, si bien una parte importante de las rutas combinadas son de una estructura como la de las rutas auto-metro (una etapa en bus y una etapa en metro) existe una proporción de ellas con tres etapas: una primera etapa en bus, una segunda etapa en metro y una etapa final en bus. Ni el algoritmo de dos fases de Malbrán (1994) ni los algoritmos de cálculo de rutas mínimas en redes combinadas implementados en ESTRAUS (ver SECTU, 1989) consideran la existencia de este tipo de rutas. Probablemente la poca importancia relativa de los viajes observados en Santiago sobre rutas de este tipo (bus-metro-bus) para la encuesta origen-destino de 1991 han llevado a los modeladores a olvidarlos. No obstante, en redes integradas, con una mayor cobertura de la red de metro, como las que se analizan para planes futuros de la ciudad de Santiago, la importancia de este tipo de viajes aumentará sustancialmente, por lo que un algoritmo de rutas mínimas sobre redes combinadas de transporte público debe considerar su existencia. En un trabajo de investigación en curso se ha desarrollado e implementado la versión preliminar de un algoritmo más general que los disponibles que está en etapa de prueba y promete ser eficiente.

Gruesamente, la parte del algoritmo (que es una adaptación del algoritmo de Dijkstra, 1959) que determina rutas mínimas del tipo bus-metro y bus-metro-bus consiste en calcular y almacenar, en primer lugar, los árboles de rutas mínimas desde las estaciones de metro (nodos de metro en la red multimodal) hacia todos los centroides, exigiendo sólo para el primer pivot (origen del arco) que el etiquetaje a nodos vecinos se realice sólo para nodos de metro, imponiendo así la restricción de buscar rutas mínimas desde el metro, usando al menos un arco de metro. Hecho esto se calculan árboles de rutas mínimas desde los centroides de origen no conectados a la red de metro hasta las estaciones de metro (no existen en este caso los arcos de metro). Cada vez que un nodo de metro llega a ser pivot, todos los centroides de destino (todos menos el origen del árbol que se está calculando) se etiquetan con un tiempo que se obtiene sumando al tiempo hasta el pivot el tiempo de la ruta mínima desde la estación de metro al centroide de destino y con un predecesor que corresponde al pivot. El esfuerzo de cálculo adicional respecto al de un algoritmo de Dijkstra convencional (red pura) se relaciona principalmente con el cálculo de árboles adicionales. En el caso convencional se calcula un árbol por cada centroide de origen. En este caso, además de ésos se debe calcular un árbol por cada nodo de metro. Por otro lado, el etiqutaje directo de los centroides a partir de los pivots nodos de metro introduce implícitamente un número no despreciable de arcos ficticios a la red. Esto es, exactamente $|N_m|(|N_z|-1)$.

REFERENCIAS

ABDULAAL, M. y LeBLANC, L. (1979) Methods for combining modal split and equilibrium assignment models. **Transportation Science, Vol. 13**, 292-314.

DE CEA, J. y FERNANDEZ, J.E. (1989) Transit assignment to minimal routes: an efficient new algorithm. **Traffic Engineering and Control 29 (10)**, 520-526.

DE CEA, J. y FERNANDEZ, J.E. (1993)Transit assignment for congested public transport systems: an equilibrium model. **Transportation Science, Vol. 27 (2)**, 133-147.

DIJKSTRA, E. (1959) A note on two problems in connexion with graphs. **Numerishe Mathematik 1**, 269-271.

EVANS, S.P. (1976) Derivation and analysis of some methods for combining trip distribution and assignment. **Transportation Research 10**, 37-57.

FERNANDEZ, J.E., DE CEA, J., FLORIAN, M. y CABRERA, E. (1994) "Network equilibrium models with combined modes". **Transportation Science, Vol. 28**, 182-192.

FLORIAN, M. (1977) A traffic equilibrium model of travel by car and public transit modes. **Transportation Science, 8**, 166-179.

FLORIAN, M. y SPIESS, H. (1982) The convergence of diagonalization algorithms for asymmetric network equilibrium problems. **Transportation Research, 16B**, 447-483.

FLORIAN, M. y SPIESS, H. (1983) On binary mode choice/assignment models. **Transportation Science, 17**, 32-47.

FRANK, M. y WOLFW, P. (1956) An algorithm for quadratic programming. **Naval Research LogisticsQuarterly 3**, 95-110.

HARKER, P.T. y PANG, J-S. (1987) Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications. Department of Decision Sciences, The Wharton School, ersity of Pennsylvania, 87-12-06.

MALBRAN, H. (1994) Un algoritmo de rutas mínimas para redes combinadas de transporte. Tesis de Magister, Escuela de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.

NGUYEN, S. y DUPUIS, C. (1984) An efficient method for computing traffic equilibria in networks with asymmetric transportation costs. **Transportation Science** 18, 185-202.

PANG, J.M. y CHANG, D. (1982) Iterative methods for variational and complementarity problems. **Math. Program, 24**, 284-313.

SECTU (1989) Estudio de evaluación y desarrollo del sistema de transporte urbano de santiago (ESTRAUS). Secretaría Ejecutiva de la Comisión de Transporte Urbano, Chile.

WARDROP, P.G. (1952) Some theoretical aspects of road traffic research. Proceedings of the **Institute of Civil Engineers, Part II**, 325-378.

WU, J.H., FLORIAN M. y MARCOTTE, P. (1994) Transit equilibrium assignment: a model and solution algorithms. **Transportation Science**, Vol. 28, 193-203.

Figura 1
Representación de una Red de Compuesta Bus-Metro