ACTUALIZACION DE MODELOS DE ELECCION DESTINO/MODO MEDIANTE CONTEOS DE TRAFICO

Marcela Munizaga Muñoz*
Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Civil,
Casilla 228-3, Santiago, Chile. Fono: 56-2-6894206. Fax: 56-2-6712799

RESUMEN

El problema de actualización de modelos es un tema que, pese a despertar creciente interés para los usuarios de modelos de transporte en la práctica, ha sido poco tratado en la literatura. En este trabajo se analiza el problema de actualización de un modelo sencillo de elección de destino y modo, mediante información actualizada de conteos de flujo. Se propone un enfoque y se implementa computacionalmente un algoritmo de solución. El enfoque propuesto es fácilmente ampliable a modelos más complejos. Mediante un pequeño problema de laboratorio, en que se simula diversas situaciones, se prueba el modelo y se analiza diversos enfoques alternativos. Los resultados muestran que cuando las observaciones de flujo están exentas de error, el modelo se ajusta muy bien, incluso con muy poca información. En casos más realistas en que se incorpora error a las observaciones de flujo, se recupera bastante bien los parámetros aún cuando, como era de esperarse, hay alguna desviación. Se intentó mejorar la recuperación de parámetros simulados mediante el uso de información sobre la varianza de los errores y mediante información de la matriz a priori. Sin embargo, los valores obtenidos mediante estas modificaciones no resultaron ser significativamente distintos que los obtenidos con la función objetivo original.

* Actualmente realizando estudios de doctorado en la Pontificia Universidad Católica de Chile.

1. INTRODUCCION

Dado el alto costo de estimación de los modelos de demanda por transporte, el tema de la actualización de modelos ha despertado creciente interés. Sin embargo, se han publicado pocos trabajos sobre este tema; dentro de éstos se destaca Ortúzar (1989) y Cascetta y Nguyen (1988). En el primero de éstos se presentan varios problemas con un enfoque novedoso y se desarrollan hasta llegar a su planteamiento matemático. El segundo, en cambio, se concentra en desarrollar un marco teórico unificado para estimar matrices origen-destino de viajes en transporte público y privado, incluyendo la etapa de estimación de los modelos; y el tema de actualización es tratado sólo marginalmente.

Como contrapartida, se han reportado numerosos trabajos en el tema de estimación de matrices origen-destino con información limitada (Bell, 1991; Ben Akiva, 1987; Bierlaire y Toint,1995; Brenninger-Göthe y Jörnsten, 1989; Cascetta, 1984; De Cea y Cruz,1986; Nielsen, 1993;Sherali y otros, 1994; Van Zuylen y Willumsen, 1980; Watling, 1992, 1994; Willumsen, 1981; Yang y otros, 1992).

El objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo de actualización del problema de elección de destino-modo planteado en Ortúzar (1989) y proponer un algoritmo de solución. Dentro de este contexto, se analiza la teoría desarrollada para estimación de matrices origen-destino y su aplicabilidad en este problema que, pese a ser distinto, busca utilizar el mismo tipo de información y tiene la misma base teórica que los citados.

2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

Consideremos un problema simplemente acotado de elección de destino-modo de la siguiente forma logit[1]:

$$T_{ij} = O_i \cdot \frac{\exp(V_j)}{\sum_d \exp(V_d)} \tag{1}$$

con:

$$V_j = \phi_1 \cdot \log(S_j) + \phi_2 \cdot \widetilde{U}_{ij} \tag{2}$$

1 Esta forma funcional corresponde a distintos enfoques teóricos; Daly (1982) demostró que el modelo gravitacional convencional simplemente acotado a orígenes puede ser descrito sin pérdida de generalidad por la ecuación (1).

$$\widetilde{U}_{ij} = \ln\left(\sum_{k} \exp \overline{U}_{ij}^{k} \right) \tag{3}$$

$$\overline{U}_{ij}^{k} = \sum_{p} \theta_{p} \cdot X_{ijk}^{p} + M_{k} \tag{4}$$

en que S_j es una medida de la atractividad del destino j; $\widetilde{u}_{ij}$ es la máxima utilidad esperada del nido modal k; $\overline{u}_{ij}^{k}$ es la utilidad de viajar entre i y j en el modo k; X_{ijk} son variables de nivel de servicio o socioeconómicas de los individuos de la zona i en el modo k; M_k es la constante modal del modo k; λ, ϕ y θ son parámetros.

Si ambos ϕ se asumen iguales a 1, obtenemos una especificación logit multinomial con

$$V_{j} = \ln\left(S_{j} \cdot \sum_{k} \exp \overline{U}_{ij}^{k} \right) \tag{5}$$

Por lo tanto

$$T_{ij} = \frac{O_{i} \cdot S_{j} \cdot \exp\left(\sum_{p} \theta_{p} \cdot X_{ijk}^{p} + M_{k} \right)}{\sum_{d} S_{d} \sum_{m} \exp\left(\sum_{p} \theta_{p} \cdot X_{idm}^{p} + M_{m} \right)} \tag{6}$$

en que, al agregar la componente de partición modal se obtiene:

$$T_{ijk} = T_{ij} \cdot P_{ij}^{k} = \frac{O_{i} \cdot S_{j} \cdot \exp\left(\sum_{p} \theta_{p} \cdot X_{ijk}^{p} + M_{k} \right)}{\sum_{d} S_{d} \sum_{m} \exp\left(\sum_{p} \theta_{p} \cdot X_{idm}^{p} + M_{m} \right)} \tag{7}$$

Este enfoque es fácilmente generalizable a supuestos menos restrictivos sobre ϕ, con la única implicancia de mayor complejidad en las formas funcionales a optimizar. En este caso, la expresión de la demanda estaría dada por

$$T_{ijk} = \frac{O_{i} \cdot S_{j}^{\phi_{1}} \left(\sum_{m} \exp\left(\sum_{p} \theta_{p} X_{ijm}^{p} + M_{m} \right) \right)^{\phi_{2}-1} \cdot \exp\left(\sum_{p} \theta_{p} X_{ijk}^{p} + M_{k} \right)}{\sum_{d} S_{d}^{\phi_{1}} \left(\sum_{m} \exp\left(\sum_{p} \theta_{p} X_{idm}^{p} + M_{m} \right)^{\phi_{2}} \right)} \tag{8}$$

La idea de actualización de este modelo es estimar un número reducido de parámetros con el objeto de reproducir cambios pequeños en la valoración de los atributos.

El caso a desarrollar en este trabajo corresponde a:

$$T_{ijk} = \frac{O_i \cdot \exp(\ \theta_s \cdot \ln S_j + \lambda \cdot \sum_p \theta_p \cdot X^p_{ijk} + M_k\ )}{\sum_d \sum_m \exp(\ \theta_s \cdot \ln S_d + \lambda \cdot \sum_p \theta_p \cdot X^p_{idm} + M_m\ )} \tag{9}$$

en que los parámetros a actualizar son λ y las constantes {Mk}. No se considera en este caso la actualización del parámetro θ_v de atractividad del destino; sin embargo, su incorporación tiene la única implicancia de aumentar el número de variables. Por tratarse de un experimento exploratorio, se privilegió la sencillez.

El problema se desarrolla suponiendo que se dispone de un modelo antiguo, como el de la ecuación (7), y de datos actuales de conteos de flujo independientes. La idea es comparar los flujos observados con las predicciones hechas por la ecuación (9) en conjunto con un modelo de asignación.

Ortúzar (1989) plantea resolver el problema de estimación minimizando la suma del cuadrado de las diferencias normalizadas entre los flujos observados y los predichos.

$$FO: \underset{\lambda, \{M_k\}}{\text{Min}} \sum_k \sum_l ((\ \hat{F}^k_l - F^k_l\ ) \ /\ F^k_l\ )^2 \tag{10}$$

s.a.

$$F_{lk} = \sum_i \sum_j \hat{T}_{ijk} \cdot p^l_{ijk} \tag{11}$$

en que p_{ijk}^l corresponde a la proporción del flujo entre i y j en el modo k que utiliza el arco l, y viene dada por el modelo de asignación.

Es claro que para alimentar el modelo se requiere además de información sobre las variables de nivel de servicio (atributos). Para que el enfoque sea interesante, debe tratarse de un modelo agregado, ya que si se dispone de información desagregada es preferible re-estimar el modelo completamente. Información agregada de tiempos y costos de viaje es, en general, relativamente fácil de conseguir.

Un tema más delicado es el supuesto de que se dispone de un modelo de asignación como el descrito en la ecuación (11); es decir, que entregue las proporciones de los flujos entre cada par origen-destino que utilizarán cada arco de la red, en forma independiente de los flujos. Este tema ha sido tratado en la literatura (ver por ejemplo Bierlaine y Toint, 1995, para el caso de transporte privado; De Cea y Cruz, 1986, para el caso de transporte público). Parece haber consenso en que lo más adecuado es utilizar las proporciones obtenidas al asignar a la red la matriz de flujos a priori de la cual se dispone.

El error de esta aproximación será mayor mientras más difiera la situación anterior de la actual, ya que las proporciones de los flujos origen-destino son obtenidas en condiciones de flujo, y por consiguiente costo por arco, muy diferentes. En casos en que este error no pueda ser despreciado, se sugiere iterar, aunque no hay seguridad de que el proceso converja. Los modelos de asignación utilizados en las referencias citadas son SATURN (Van Vliet, 1982) para el caso de transporte privado y MADITUC (De Cea y Chapleau, 1984) para transporte público.

3. ENFOQUES DE SOLUCION ALTERNATIVOS

Entre los diversos enfoques presentados en estudios recientes para afrontar el problema de estimación de matrices origen-destino de viaje, y en particular de elección de destino, con información de bajo costo (Bell, 1991; Bierlaire y Toint, 1995; Nielsen, 1993; Thill y Horowitz, 1991; Nielsen, 1993; Sherali y otros, 1994; Van Zuylen y Willumsen, 1980; Watling, 1992, 1994; Yang y otros, 1992) se destacan algunos cuya base teórica puede ser utilizada para enfrentar el problema objeto de este trabajo. En varios de los artículos citados se utiliza alguna de las formas tradicionales que corresponden a máxima verosimilitud o máxima entropía sujeto a restricciones que tienen que ver con la información disponible (reproducir flujos observados por ejemplo).

Este tipo de enfoque presenta un problema que es discutido en la literatura; dado que la información (por ejemplo conteos de flujo) no es perfecta, y que los modelos utilizados (por ejemplo el de asignación) también están sujetos a errores y simplificaciones, es usual que se produzcan inconsistencias. Por los mismos motivos, ya no parece tan razonable imponer que las restricciones se cumplan en forma estricta. Una de las formas en que se ha intentado resolver este problema, para poder usar el método tradicional, es revisar la base de datos y eliminar todas las inconsistencias. Por otro lado, el enfoque de máxima verosimilitud tiene la dificultad adicional de requerir suponer una distribución de probabilidad para el modelo.

Bell (1991) desarrolla, para el caso lineal, un modelo de estimación que utiliza Mínimos Cuadrados Generalizados para, aprovechando la propiedad de este método de incorporar las varianzas-covarianzas de los datos, incorporar distintos tipos de datos (en ese caso, encuesta origen-destino y conteos de flujo). Con una idea similar, Brenninger y otros (1989) proponen incorporar los distintos tipos de información en una función multiobjetivo ponderada por la confiabilidad de los datos.

Un enfoque más tradicional es la incorporación de información de la matriz anterior o a priori. En los últimos estudios se propone incorporar en la función objetivo la diferencia entre los elementos de la matriz a priori y los predichos (ver por ejemplo, Bierlaire y Toint, 1995; Sherali et al., 1994; Yang et al., 1992).

4. PLANTEAMIENTO MATEMATICO DEL PROBLEMA Y ALGORITMO DE SOLUCION

El problema original corresponde a:

$$\text{Min} \sum_k \sum_l ((\hat{F}_{lk} - F_{lk}) / F_{lk})^2 \tag{12}$$

s.a.

$$F_{lk} = \sum_i \sum_i T_{ijk} \cdot p_{ij}^k \tag{13}$$

$$T_{ijk} = \frac{O_i \cdot \exp(\phi \cdot \ln S_j + \lambda \cdot \sum_p \theta_p \cdot X_{ijk}^p + M_k)}{\sum_d \sum_m (\phi \cdot \ln S_d + \lambda \cdot \sum_p \theta_p \cdot X_{idm}^p + M_m)} \tag{14}$$

Reemplazando las restricciones en la función objetivo, se obtiene un problema no lineal irrestricto. Explorando las condiciones de primer y segundo orden, no se logró demostrar que se trate de un problema convexo (de hecho, aparentemente no lo es). Sin embargo en este caso se puede aplicar métodos tradicionales de resolución de problemas no lineales (por ejemplo método del gradiente) siempre y cuando se cuente con un buen punto inicial que reduzca la probabilidad de caer en un óptimo local. Dado que el problema que se quiere resolver es un problema de actualización, el modelo original representa un buen punto de partida, salvo en el caso en que se trate de cambios mayores, en que una actualización comienza a perder sentido.

Un algoritmo general de optimización para un problema no lineal irrestricto es el siguiente (Luenberger, 1989)

Sea X^0, punto inicial dado

Etapa k+1

Si X^k es un punto estacionario o crítico, FIN
($\|\nabla f(X^k)\| \leq \varepsilon$)

Definir dirección de descenso d^k
($d^k = -\nabla f(X^k)$ para Método del Gradiente)

Definir el paso de descenso t^k

Definir $X^{k+1} = X^k + t^k \cdot d^k$

Hacer $k \leftarrow k+1$, continuar

En el caso de problemas de convergencia, debido por ejemplo a que se dispone de muy pocos datos de conteos de flujo, se puede utilizar una función multiobjetivo en que se incorpore las matrices a priori por modo con una ponderación pequeña. Esto hace que al haber, por ejemplo, varias soluciones luego de optimizar sobre los flujos observados, el modelo arroje resultados lo más parecido posible a los resultados del problema original, dando así estabilidad a la solución. En este caso tendríamos:

$$\underset{\lambda,\{M_k\}}{\mathrm{Min}} \ (1-\alpha) \bullet \sum_k \sum_l ((\hat{F}_{lk} - F_{lk}) / F_{lk})^2 + \alpha \bullet \sum_i \sum_j \sum_k ((\hat{t}_{ijk} - t_{ijk}) / t_{ijk})^2 \tag{15}$$

Asimismo, se puede incorporar la confiabilidad de los datos de flujo estimando la matriz de varianzas-covarianzas y optimizando una función objetivo como la de mínimos cuadrados generalizados. En Bell (1991) se sugiere que un intervalo de confianza de 96% para flujos contados manualmente es del orden de 10%. Asumiendo muestreo normal, la varianza puede ser calculada como $(0{,}1\cdot\text{número de vehículos observados}/1{,}96)^2$. La función a minimizar en este caso corresponde a:

$$FO:\ \mathrm{Min}(1-\alpha) \bullet (\hat{F}-F)'W^{-1}(\hat{F}-F) + \alpha \bullet (\hat{T}-T)'Q^{1}(\hat{T}-T) \tag{16}$$

en que F corresponde al vector de flujos, T a la matriz origen destino; W y Q corresponden a las matrices de varianza-covarianza de los flujos observados, y de las matrices origen-destino por modo respectivamente. Notar que si ambas matrices son iguales a la identidad, se obtiene una función objetivo equivalente a la de mínimos cuadrados ordinarios.

5. PROBLEMA DE PRUEBA

Con el objeto de probar las hipótesis planteadas y analizar la factibilidad de actualizar un modelo de este tipo, se diseñó un pequeño problema de prueba basado en una ciudad virtual constituida por nueve zonas origen destino, unidas por una red de 24 arcos. Las zonas de mayor atractividad tienen menor densidad poblacional y vice-versa (ver Figura 1).

Se generó una matriz de coeficientes p_{ijk}^{l} para la red que sirve a esta ciudad virtual. Además se consideró un modelo de partición modal que incluye las variables tiempo y costo, y se supuso que éstas se distribuyen Normal truncada (no se permite valores negativos ni demasiado pequeños). Los valores medios fueron obtenidos de datos reales reportados en Ivelic (1988).

Para implementar la solución se utilizó el programa computacional PENAMOR (Contesse, 1987), que resuelve problemas no lineales de optimización y tiene la posibilidad de incluir restricciones en caso necesario. El programa se basa en un método tipo Newton, en que se relaja las restricciones no lineales y se resuelve un problema reducido (iteraciones menores) utilizando una adaptación del método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno. Las iteraciones mayores corresponden a re-actualizaciones del problema; en el caso sin restricciones, esto se traduce en recalcular la matriz Hessiana.

Para realizar la implementación en PENAMOR, se programó una subrutina en Fortran que evalúa la función objetivo. No se le entregó al programa las derivadas de la función objetivo ya que, por su complejidad, el incorporarlas aumentaría las posibilidades de error; se utilizó, en cambio, una de las potencialidades del programa que es calcular las derivadas numéricamente. Se intentó utilizar herramientas más modernas para reducción de ecuaciones matemáticas (SML interface), pero ésta demostraron no ser adecuadas para problemas de esta magnitud.

Figura 1

Atractividad

50	100	200
110	300	700
220	720	1500

Población (miles de habs.)

30	20	15
20	15	10
15	10	5

Los parámetros con que se alimentó el modelo original están descritos en la Tabla 1. Para generar los datos de flujo se supuso una modificación de este modelo como la descrita en la ecuación (9) en que λ y M(2) toman los valores 1,1 y 0,9 respectivamente.

Tabla 1
Parámetros del modelo

ϕ	1.2
θ_1 (costo)	-0,0001
θ_2 (tiempo)	-0,01
M(1)	0
M(2)	0,5

Utilizando este modelo como los datos "reales" que se pretende recuperar con el modelo de actualización, se realizó varias corridas modificando la función objetivo, el porcentaje de error de las observaciones y el número de observaciones. La función objetivo original (FO1) es la que se deriva directamente de lo propuesto por Ortúzar (1989). La segunda función objetivo (FO2) corresponde a utilizar el enfoque de mínimos cuadrados generalizados; es decir, incorporar información acerca de la matriz de varianza-covarianza. Finalmente, FO3 considera información de la matriz a priori.

Tabla 2
Resultados de las corridas del modelo

	λ estimado	M(2) estimado	Función Objetivo	$\|\nabla\|$	Numero Iterac.
FO1					
Datos sin error 24 observaciones	1,10002	0,89999	$0{,}12\cdot10^{-9}$	$0{,}63\cdot10^{-4}$	2 - 7
Datos sin error 6 observaciones	1,09986	0,89998	$0{,}17\cdot10^{-9}$	$0{,}25\cdot10^{-4}$	2 - 7
10% error ambos modos	0,96982	0,93404	$0{,}49\cdot10^{-4}$	$0{,}49\cdot10^{-4}$	2 - 10
10% autos 20% buses	1,03405	0,93605	$0{,}66\cdot10^{-4}$	$0{,}66\cdot10^{-4}$	2 - 10
30% autos 60% buses	1,35670	0,93913	0,983	$0{,}60\cdot10^{-5}$	1 - 11
FO2					
10% error ambos modos	0,974876	0,93423	$0{,}47\cdot10^{-4}$	$0{,}48\cdot10^{-4}$	2 - 10
10% autos 20% buses	1,03685	0,93649	$0{,}45\cdot10^{-4}$	$0{,}45\cdot10^{-4}$	2 - 10
30% autos 60% buses	1,24439	0,94997	0,637	$0{,}45\cdot10^{-5}$	1 - 10
FO3					
10% error ambos modos	1,01983	0,84439	$0{,}11\cdot10^{1}$	$0{,}12\cdot10^{-3}$	2 - 5
10% autos 20% buses	1,01988	0,84393	$0{,}11\cdot10^{1}$	$0{,}10\cdot10^{-3}$	2 - 5
30% autos 60% buses	1,09259	0,83561	1,419	$0{,}39\cdot10^{-4}$	2 - 5

La incorporación de error en las observaciones de flujo fue modelada agregando un término aleatorio de distribución Normal y media cero, y tomando el promedio de diez observaciones como valor modelado. La varianza utilizada para FO2 corresponde a la varianza observada en las diez mediciones realizadas en cada punto, lo cual es concordante con la forma de hacerlo en la práctica.

En una primera corrida se alimentó al modelo con información perfecta sobre los flujos en los 24 arcos. Los resultados fueron muy alentadores, ya que en dos iteraciones mayores y siete iteraciones menores, el programa convergió a la solución óptima (ver Tabla 2, FO1). Sin embargo, no es mucho lo que se puede concluir de este resultado, la principal implicancia es que el problema está bien formulado y no hay errores de programación. Tal como se esperaba, los valores del parámetro λ y la constante modal son recuperados, la función objetivo tiene un valor muy cercano a cero, el gradiente del lagrangeano también es muy cercano a cero. Se verificó además que la matriz Hessiana era definida positiva; esto implica que se ha encontrado al menos un mínimo local, que resultó ser el punto buscado. Al reducir a seis el número de observaciones, que es un caso más realista, los resultados obtenidos fueron igualmente buenos.

Al simular un caso menos ideal, incorporando un término de error en las observaciones de flujo, se encontró que los resultados sufrían alguna desviación con respecto a los valores verdaderos, aún cuando, en este caso particular, seguían siendo una aproximación bastante buena. Estos resultados mejoran en la medida que se considera un mayor número de observaciones en cada punto.

Los resultados obtenidos utilizando FO2, que considera información de la varianza de las observaciones son levemente mejores en la estimación de λ, especialmente en los casos en que el error es mayor. El número de iteraciones es en general el mismo que en el caso anterior.

Al incorporar información de la matriz anterior, se obtiene mejores resultados en la estimación de λ, aún cuando la estimación de la constante modal empeora. Los resultados parecen tener un sesgo hacia valores más parecidos al modelo original (λ=1,0; M(2)=0,5), lo cual es concordante con el efecto que se esperaría provoque este tipo de información. En este caso se observa además una convergencia mucho más rápida que en los dos casos anteriores. No se pudo probar la hipótesis planteada de que la incorporación de información de una matriz anterior tenga la propiedad de resolver problemas de convergencia, ya que en ninguno de los casos simulados hubo problemas de convergencia. Esto puede deberse a que se trata de un ejemplo muy sencillo.

6. CONCLUSIONES

Se ha recuperado un tema no tratado por mucho tiempo en la literatura (actualización de modelos) y se ha probado su factibilidad de implementación mediante un pequeño ejemplo de prueba.

Se ha mostrado la importancia de la calidad y cantidad de observaciones. Además de los casos reportados, se probó casos con menos observaciones, incluyendo aquel en que se toma sólo una medición de flujo en cada arco, y los resultados fueron considerablemente inferiores, no logrando mejorarse esta situación con los enfoques alternativos. En caso de tener datos con mucha varianza, parece ser conveniente tomar mayor cantidad de observaciones en cada punto.
La aplicabilidad de este modelo en particular está sujeta a que se disponga de un buen modelo de asignación y que no se pretenda modelar un cambio demasiado fuerte, ya que en este último caso, todos los supuestos comienzan a perder validez. El enfoque, sin embargo, es aplicable a otros casos de actualización de modelos.

El programa computacional utilizado (PENAMOR) tiene grandes ventajas por su flexibilidad y robustez, permitiendo resolver gran cantidad de problemas de diversas formulaciones. El usuario puede incorporar todos los efectos que quiera mediante la programación de subrutinas de Fortran.

Cabe señalar que las conclusiones obtenidas de este problema de prueba (en términos de confiabilidad de las estimaciones y rapidez de convergencia) no son aplicables a casos reales. Tal como se mencionó anteriormente, sólo se ha demostrado la factibilidad de implementación. Se debe probar el modelo con datos reales para obtener conclusiones más definitivas.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fué parcialmente financiada por Fondecyt, proyecto 194-0711. Deseo expresar mi agradecimiento a los profesores Sergio Jara, Enrique Fernández y Luis Contesse por sus valiosos comentarios a una versión preliminar de este trabajo. Finalmente, y en forma muy especial, agradezco a Juan de Dios Ortúzar por su ayuda en la preparación de la versión final de este artículo, que incluyó una observación fundamental que permitió resolver un problema encontrado sistemáticamente en los resultados preliminares.

REFERENCIAS

Bell, M. G. H. (1991) The estimation of origin-destination matrices by constrained generalised least squares. **Transportation Research 25B,** 13-22.

Ben-Akiva, M. (1987) Methods to combine deifferent data sources and estimate origin-destination matrices. En Gartner, N. H. y Wilson, N. H. M. (eds.), **Transportation and Traffic Theory.** Elsevier, Nueva York.

Bierlaire, M. y Toint, Ph. (1995) MEUSE: an origin destination matrix estimator that exploits structure. **Transportation Research 29B,** 47-60.

Brenninger-Göthe, M. y Jörnsten, K. (1989) Estimation of origin-destination matrices from traffic counts using multiobjective programming formulations. **Transportation Research 23B,** 257-269.

Cascetta, E. (1984) Estimation of trip matrices from traffic counts and survey data: a generalised least squares approach estimator. **Transportation Research 29B,** 47-60.

Cascetta, E. y Nguyen, S. (1988) A unified framework for estimating or updating origin/destination matrices from traffic counts. **Transportation Research 23B,** 437-455.

Contesse, L. (1985) Método de penalización lagrangeana amortiguada para la resolución de modelos no lineales. **Apuntes de Ingeniería 26**, 33-61.

Daly, A. (1982) Estimating choice models containing attraction variables. **Transportation Research 16B,** 5-15.

De Cea, J. y Chapleau, R. (1984) MADITUC: un modelo de asignación de itinerarios de transporte urbano colectivo. **Segundo Congreso Latinoamericano de Investigación Operativa e Ingeniería de Sistemas.** Centro Cultural San Martín, 20-24 Agosto 1984, Buenos Aires.

De Cea, J. y Cruz, G. (1986) ESMATUC: un modelo de estimacion de matrices de viajes en transporte urbano colectivo. **Apuntes de Ingeniería 24,** 109-126.

Ivelic, A. M. (1988) **Impacto de la Agregación de Atributos en la Estimación y Estabilidad de Modelos Logit de Partición Modal**. Tesis de Magister, Departamento de Ingeniería de Transporte, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Luenberger, D. (1989) **Programación lineal y no lineal**. Addison Wesley Iberoamericana, México.

Nielsen, O. (1993) A new method for estimating trip matrices from traffic counts. **Documento de Trabajo 1993-3**, Institute of Roads, Transport and Town Planning, Technical University of Denmark.

Ortúzar, J. de D. (1989) Estimation of trip matrices and mode choice models integrating flow information and other data types. **Nota Técnica,** Transport Studies Group, University College London.

Sherali, H., Sivanandan, R. y Hobeika, A. (1994) A linear programming approach for synthesizing origin-destination trip tables from link traffic volumes. **Transportation Research 26B,** 171-193.

Van Vliet, D. (1982) SATURN, a modern assignment model. **Traffic Engineering and Control 23,** 578-581.

Van Zuylen, H. y Willumsen, L. (1980) The most likely trip matrix estimated from traffic counts. **Transportation Research 14B**, 281-293.

Watling, D. (1992) A statistical procedure for estimating a mean origin-destination matrix from a partial registration plate survey. **Transportation Research 26B,** 213-233.

Watling, D. (1994) Maximum likelihood estimation of an origin-destination matrix from a partial registration plate survey. **Transportation Research 28B,** 289-314.

Willumsen, L. (1981) Simplified transport models based on traffic counts. **Transportation 10**, 257-278.

Yang, H., Sasaki, T., e Iida, Y. (1992) Estimation of origin destination matrices from link traffic counts on congested networks. **Transportation Research 26B,** 417-434.