

ANALISIS COMPARATIVO DE MODELOS DE ELECCION DISCRETA EN PRESENCIA DE HETEROSCEDASTICIDAD

Marcela Munizaga

Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile,

Casilla 228-3, Santiago, Chile. Fax: (56-2) 6718788.

e-mail: mamuniza@cec.uchile.cl

RESUMEN

Los modelos de elección discreta son ampliamente utilizados en la modelación de demanda por transporte, en particular para modelar la elección de modo. Dentro de estos, el más utilizado es el modelo Logit en varias de sus formas. Es bien sabido que el modelo Logit Simple asume que los errores son independiente e idénticamente distribuidos Gumbel, y que el modelo Logit Jerárquico permite modelar algunas estructuras de correlación; sin embargo, el problema de heteroscedasticidad ha recibido menos atención en la literatura. En este trabajo se discute las potenciales causas de heteroscedasticidad y las implicancias de ignorar este problema, se compara aquellos modelos de elección discreta que permiten recoger el efecto de la heteroscedasticidad y aquellos que no. Estas comparaciones se hacen, utilizando datos simulados, en términos de la recuperación de los parámetros con que se generó las observaciones, y en términos de la capacidad de respuesta a estímulos de política. Los modelos estudiados son el Logit Simple, Logit Jerárquico, Logit Jerárquico de Nido Individual, Logit Heteroscedástico de Valor Extremo y Probit General.

Los datos simulados corresponden a la existencia de dos tipos de heteroscedasticidad: entre alternativas y entre observaciones. Los resultados indican que en el primer caso, al aplicar cambios fuertes de política, los modelos de la familia Logit, con excepción del modelo Logit Heteroscedástico de Valor Extremo, arrojan errores significativos en la predicción de respuesta a cambios de política. Los parámetros estimados por todos los modelos son buenos, salvo las constantes modales en algunos modelos. Sorprendentemente, en el caso de heteroscedasticidad entre observaciones, ninguno de los modelos estimados arroja errores significativos. Las predicciones del modelo Probit General, que tiene la especificación correcta son muy similares a las del Logit Multinomial, que desconoce la presencia de heteroscedasticidad.

I. INTRODUCCION

La teoría de modelación de elecciones discretas se desarrolló fuertemente en la década del setenta - comienzos de los ochenta (ver por ejemplo Daganzo, 1979; Domencich y McFadden, 1975; Gaudry y Dagenais, 1979; McFadden, 1974; McFadden, 1981; Williams, 1977; Williams y Ortúzar, 1982), en que se discutió la génesis de los distintos modelos utilizados actualmente en la práctica desde

diversos puntos de vista. Lo que se utiliza mayoritariamente en la actualidad es la teoría de maximización de utilidad, en que la regla de elección es derivada a partir de consideraciones microeconómicas y la forma de los modelos estadísticos depende de la distribución del término de error de las funciones de utilidad asociadas. El modelo más utilizado es el Logit simple, que tiene una expresión analítica muy sencilla y fácil de interpretar. No obstante, el uso de este modelo impone restricciones a la estructura de la matriz de covarianza de las funciones de utilidad que en algunos casos constituyen supuestos poco razonables. Por otro lado, el modelo Probit general es el más flexible en esos términos, pero lamentablemente es más difícil de estimar, y hasta hace algunos años, era computacionalmente intratable en la práctica para más de tres alternativas. Sin embargo, avances recientes en simulación de probabilidades normal multivariada (Börsch-Supan y Hajivassilou, 1993; McFadden y Ruud, 1994; Bolduc, 1994) y en los equipos computacionales disponibles, han hecho que ahora el modelo Probit sea factible en la práctica. La aplicabilidad de modelos más sofisticados plantea la necesidad de re-evaluar los supuestos simplificatorios que son comúnmente aceptados.

Si aceptamos la génesis microeconómica de los modelos, debemos partir de la base de que cada individuo n elegirá aquella alternativa que maximice su función de utilidad subyacente U_{in} . En general se asume que no es posible modelar la función de utilidad con certeza, por lo cual se trata como una variable aleatoria que es la suma de una componente observable V_{in} y un término de error ε_{in} . El término de error intenta recoger la incapacidad del modelador para observar todas las variables que influyen en la decisión, errores de medición, las diferencias entre individuos, percepciones incorrectas de los atributos y la aleatoriedad inherente a la naturaleza humana. Dependiendo de la distribución de probabilidad que se asuma para ese término de error, es posible derivar distintos modelos de elección discreta.

Asimismo, si interpretamos el término de error de la forma descrita en el párrafo anterior, es posible identificar algunas fuentes de heteroscedasticidad. Entre las fuentes de distinta varianza entre alternativas se puede mencionar el hecho de que algunas pueden ser conocidas con mayor precisión por los individuos (por ejemplo la alternativa que usan con más frecuencia) o bien que los atributos de algunas alternativas sean modelados con mayor precisión, por ejemplo porque se dispone de mayor información. También es causa de heteroscedasticidad el hecho de que hay alternativas que son inherentemente más variables que otras, como lo es por ejemplo el modo bus en comparación con el metro, en el contexto de transporte urbano.

El problema de heteroscedasticidad entre observaciones ha sido tratado recientemente en la literatura, en el contexto de estimación con datos mixtos de Preferencias Reveladas (PR) y Preferencias Declaradas (PD). Por tratarse de un caso en que se está juntando dos bases de datos de distinta naturaleza, es claro que no se puede asumir que las observaciones de ambos tipos tengan la misma varianza. También se podría pensar en la presencia de este efecto cuando se está modelando a individuos que manejan distintos niveles de información sobre las alternativas, como por ejemplo en un caso de elección de ruta en que algunos individuos tengan acceso a sistemas de información en línea y otros no.

En términos de la matriz de covarianza, el primer caso corresponde a una matriz de covarianza diagonal, en que los elementos de la diagonal no son necesariamente iguales. El segundo caso,

corresponderá a uno en que cada observación tendrá una matriz de covarianza $\sigma_n^2 I$, es decir, para cada observación, el término de error es independiente e idénticamente distribuido, pero esta homoscedasticidad no se mantiene entre observaciones.

2. MODELOS

2.1. Modelo Probit

Tal como fuera mencionado en la Introducción, para derivar un determinado modelo es preciso hacer algún supuesto relativo a la distribución conjunta de los términos de error. Ben-Akiva y Lerman (1985) sostienen que un supuesto razonable es considerarlos como la suma de una gran cantidad de componentes no observadas independientes. En este caso, por el Teorema Central del Límite, la distribución de los errores tenderá a ser Normal y el modelo resultante será el Probit con una probabilidad de elección dada por

$$\begin{aligned} P(i|C_n) &= \Pr[\varepsilon_{jn} - \varepsilon_{in} \leq V_{in} - V_{jn}] \\ &= \int_{-\infty}^{V_{in}-V_{1n}} \int_{-\infty}^{V_{in}-V_{2n}} \dots \int_{-\infty}^{V_{in}-V_{jn}} N(\varepsilon, \Sigma_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}) d\varepsilon \end{aligned} \quad (1)$$

en que $N(\varepsilon, \Sigma_{\varepsilon_i - \varepsilon_j})$ es la función densidad Normal multivariada, con media cero y matriz de covarianza $\Sigma_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$. Desafortunadamente, esta integral no se puede resolver y para evaluarla correctamente es preciso utilizar simulación o alguna aproximación.

Gracias a avances recientes en técnicas de simulación y al continuo mejoramiento de la eficiencia de equipos y programas computacionales, estimar modelos Probit mediante simulación es ahora factible en un tiempo razonable.

El uso de la aproximación de Clark (Daganzo *et al*, 1977) está prácticamente abandonado, ya que se ha demostrado que sufre de severos sesgos ante la presencia de heteroscedasticidad, variaciones en los gustos o tamaños de muestra pequeños (Horowitz *et al*, 1984). Por otro lado, ha resurgido el enfoque de Lerman y Manski (1981), conocido como Máxima Verosimilitud Simulada, que consiste en reemplazar la función de verosimilitud por un simulador de probabilidades Normal multivariada en cada iteración del proceso de estimación. El método original fue aplicado utilizando un simulador de frecuencias, lo cual implicaba dos problemas serios: para un número de repeticiones y tamaño de muestra finitos existe siempre la probabilidad de contar cero éxitos, siendo necesario que ambas variables tiendan a infinito para obtener estimadores consistentes; además, como el simulador no es continuo, un cambio en los parámetros induce cambios discretos en las frecuencias, y por lo tanto para obtener buenos estimadores de probabilidades pequeñas es preciso un gran número de repeticiones.

Sobre la base de algunos avances en técnicas de integración basadas en simulación de Monte Carlo, Börsch-Supan y Hajivassiliou (1993) proponen el simulador GHK (Geweke-Hajivassiliou-Keane), en que se reduce recursivamente la dimensión de la integral hasta llegar a un problema equivalente en que se requiere generar repeticiones de variables distribuidas Normal truncada unidimensional. Este simulador produce probabilidades insesgadas, continuas y diferenciables. Está garantido que los valores se encontrarán en el intervalo (0,1). El tiempo de procesamiento crece sólo del orden de lineal con el número de alternativas, y es independiente de las probabilidades de elección verdaderas.

2.2. Modelo logit simple

Debido a las inconveniencias del modelo Probit, se derivó un modelo mucho más sencillo. El modelo Logit se obtiene a partir de suponer que los términos de error son independiente e idénticamente distribuidos (iid) Gumbel. Este supuesto implica que los términos de error no están correlacionados y tienen la misma varianza tanto a nivel de alternativas (j) como individuos u observaciones (n). El modelo es similar al Probit iid, ya que la distribución Gumbel aproxima a la Normal. La forma funcional en este caso es:

$$P(i|C_n) = \frac{\exp(\mu V_{in})}{\sum_{j \in C_n} \exp(\mu V_{jn})} \quad (2)$$

en que μ es un factor de escala relacionado con la varianza del término de error ($\mu = \frac{\pi}{\sqrt{6}\sigma}$). Este parámetro no es identificable en general, y puede ser fijado en cualquier valor sin afectar el modelo; usualmente se asume igual a uno.

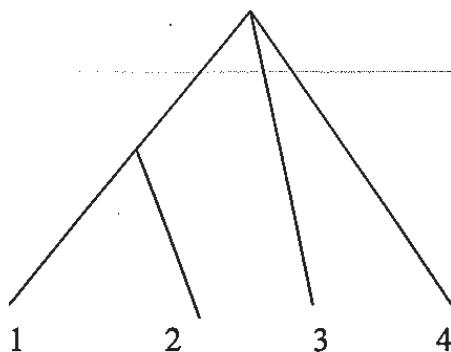
El fijar el valor de μ corresponde al escalamiento o normalización de la matriz de covarianza, que también se requiere en el modelo Probit. En este último, usualmente la matriz de covarianza es dividida por el elemento en la primera celda de la matriz. Si no se realiza este escalamiento el modelo no es identificable.

2.3. Modelo logit jerárquico

El modelo Logit simple es ampliamente utilizado en varias áreas, aunque el supuesto iid impone que los términos de error no estén correlacionados y tengan la misma varianza. Esto se traduce en la propiedad de Independencia de Alternativas Irrelevantes (IAI), que ha sido criticada en muchos casos, como por ejemplo la conocida paradoja del Bus Azul - Bus Rojo (Mayberry, 1973). Este problema ha sido tomado en cuenta, y otras formas del modelo Logit han sido propuestas para enfrentarlo.

El modelo Logit Jerárquico permite modelar elecciones discretas en el caso en que hay correlación entre los términos de error de las alternativas; así, no requiere el supuesto de errores iid, pero impone algunas restricciones en las elasticidades cruzadas entre alternativas (Williams, 1977; McFadden, 1981; Daly, 1987). La génesis de este modelo es el reconocimiento del hecho

que algunas alternativas pueden ser percibidas como más similares entre sí que otras. Las alternativas "similares" son agrupadas en "nidos" dentro de los cuales el supuesto iid se cumple. La jerarquización en nidos implica una determinada estructura de la matriz de covarianza; si dos o más alternativas están agrupadas en un nido, los elementos no diagonales correspondientes serán distintos de cero (ver Figura 1).



$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & & \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & & \\ & & \sigma^2 & \\ & & & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Figura 1: Estructura de nidos y matriz de covarianza modelo Logit Jerárquico

Para formalizar este caso en términos de ecuaciones, utilizaremos la nomenclatura de Ortúzar y Willumsen (1994), en combinación con la de Daly (1987). En el caso de dos niveles jerárquicos, en que el subíndice i representa una alternativa o nido del nivel superior, y j representa una alternativa del nivel inferior, la función de utilidad se puede representar como:

$$U(i,j) = U_i + U_{ij} \quad (3)$$

$$U(i,j) = V(i,j) + e(i,j) \quad (4)$$

$$V(i,j) = V_i + V_{j/i} \quad (5)$$

$$e(i,j) = e_i + e_{j/i} \quad (6)$$

Se puede demostrar que en este caso la probabilidad de elegir el nido i , y dentro de este la alternativa j , está dada por:

$$P_{ij} = P_i \cdot P_{j/i} \quad (7)$$

con

$$P_{j/i} = \frac{\exp(V_{j/i})}{\sum_{k \in C(i)} \exp(V_{k/i})}$$

$$P_i = \frac{\exp(V_i)}{\sum_{l \in R} \exp(V_l)}$$

en que $V_{j/i}$ es la utilidad representativa de la alternativa j al interior del nido i , en que se considera sólo aquellos atributos que presentan variación al interior del nido. La utilidad de las alternativas o nidos del nivel superior está dada por

$$V_i = X_i + \phi_i \cdot \ln \sum_{k \in C(i)} \exp(V_{k/i}) \quad (8)$$

en que X_i representa la componente de la utilidad asociada a los atributos que son comunes a todas las alternativas del nido. El término que ϕ_i corresponde a la utilidad máxima esperada en el nido (EMU); esta expresión se deriva calculando la esperanza de la distribución de V_{im} . Se ha demostrado que este parámetro debe ser mayor que cero y menor que uno, ya que si no implica inconsistencias en el modelo. En el caso límite en que $\phi_i=1$ el modelo colapsa al caso Logit Simple.

2.4. Modelo logit jerárquico de nido individual

Un caso particular de estructura jerárquica fue propuesto por Bradley y Daly (1991) para estimar un modelo usando dos bases de datos de distinta varianza en el marco conceptual desarrollado por Ben-Akiva y Morikawa (1990a; 1990b). La estimación incluye el identificar un parámetro de escala que corresponde a la razón entre ambas varianzas y multiplica todas las funciones de utilidad en una de las bases de datos. Este es un caso de heteroscedasticidad entre observaciones. Bradley y Daly (1991) demostraron que este modelo puede ser estimado como un modelo jerárquico en que para una de las bases de datos, cada alternativa es ubicada en un nido individual (ver Figura 2).

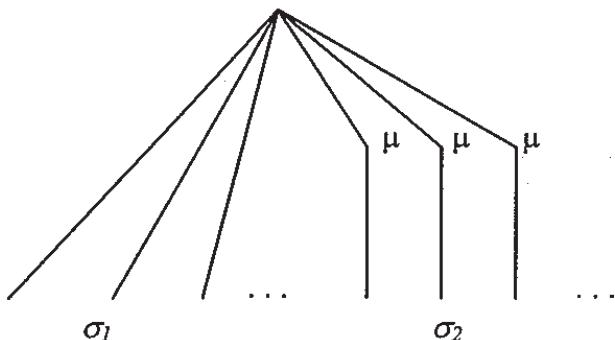


Figura 2: Estructura de nidos modelo Logit Jerárquico de Nido Individual

A pesar de que este modelo fue creado para tratar el problema de heteroscedasticidad entre observaciones, también se ha intentado usarlo para modelar decisiones de elección entre alternativas heteroscedásticas. La diferencia radica en que en la estructura de árbol de la Figura 2, cada observación de elección corresponderá a una decisión tomada entre un conjunto de alternativas iid, es decir, cuando las alternativas que tienen asociado σ_1 están disponibles, las que tienen σ_2 no lo están y *vice-versa*. En el otro caso mencionado, en cambio, la decisión de elección se realiza entre alternativas de distinta varianza, lo cual corresponde por ejemplo a un caso como el de la Figura 2, pero en que todas las alternativas están disponibles simultáneamente.

En términos de ecuaciones, este modelo LJNI puede ser descrito en base a la siguiente representación de la función de utilidad para los datos de preferencias reveladas (U^{PR}) y de preferencias declaradas (U^{PD}).

$$U^{PR} = \beta X^{PR} + \alpha W + \varepsilon \quad (9)$$

$$U^{PD} = \beta X^{PD} + \gamma Z + \nu \quad (10)$$

en que X representa a aquellas variables que han sido medidas en ambos experimentos y β su valoración. Asimismo, αW y γZ representan para PR y PD respectivamente, el producto entre las variables observadas sólo en uno de los experimentos y el parámetro que representa su valoración por parte de los usuarios. Finalmente, ε y ν son los términos de error para cada caso.

Sin pérdida de generalidad, se puede plantear que la relación entre la varianza de ambos términos de error se puede representar como:

$$\theta^2 = \frac{\text{var}(\varepsilon)}{\text{var}(\nu)} \quad (11)$$

con lo cual la función de utilidad para el caso PD puede ser re-escrita como:

$$\theta U^{PD} = (\theta\beta) X^{PD} + (\theta\gamma) Z + (\theta\nu) \quad (12)$$

y por supuesto ahora $\theta\nu$ tiene la misma varianza que ε .

Aplicando las ecuaciones del modelo logit jerárquico al caso descrito, en que cada nido consta de sólo una alternativa, se obtiene:

$$V^{nido} = \theta \ln \Sigma \exp (V^{PD}) \quad (13)$$

como $V^{PD} = (U^{PD} - \nu)$, esto se traduce en:

$$V^{nido} = \theta V^{PD} = (\theta\beta) X^{PD} + (\theta\gamma) Z \quad (14)$$

Como las alternativas de PR no están nunca disponibles simultáneamente con las alternativas de PD, esto corresponde a un “truco” para estimar dos modelos, en que se fuerza a que la valoración de las variables comunes por parte de los individuos sea la misma en ambos experimentos, salvo

una diferencia en el factor de escala que se debe a la distinta naturaleza de los términos de error, y cuya razón es estimada al mismo tiempo que se estima los parámetros del modelo. Se puede ver entonces que el modelo LJNI tiene la capacidad de representar el caso de heteroscedasticidad entre observaciones.

2.5. Modelo Logit Heteroscedástico de Valor Extremo

Varias otras generalizaciones al modelo Logit simple han sido propuestas en la literatura, como por ejemplo el Logit con correlación cruzada de Williams y Ortúzar (1982), el modelo Dogit de Gaudry y Dagenais (1979) entre otros. Dado que ninguno de estos ha sido utilizado masivamente con posterioridad a su formulación, no serán considerados en el análisis. Por otro lado, se decidió incorporar un modelo de implementación muy reciente, que ha recibido cierto interés en la literatura. Se trata del modelo Logit Heteroscedástico de Valor Extremo (Bhat, 1995; Bhat, 1997; Hensher, 1996). Este modelo se basa en suponer que los errores se distribuyen independiente, pero no idénticamente, Valor Extremo de Tipo I, que tiene parámetros de localización (media) y de escala (varianza), en contraposición con la distribución de Valor Extremo de Tipo I iid o Gumbel, en que todos los parámetros de escala son iguales. Su forma es la siguiente:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\theta_i} e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_i}} e^{-e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta_i}}} \quad y \quad F_i(z) = \int_{\varepsilon_i=-\infty}^z f(\varepsilon_i) d\varepsilon_i = e^{-e^{-\frac{z}{\theta_i}}} \quad (15)$$

en que θ_i es el parámetro de escala y el parámetro de localización es igual a cero.

Al formular la probabilidad de elección de cada alternativa, en base a la Teoría de la Utilidad Aleatoria, y suponiendo esta distribución para el término de error, se obtiene:

$$P_i = \int_{w=-\infty}^{w=+\infty} \prod_{j \in J, j \neq i} \Lambda\left[\frac{V_i - V_j + \theta_i w}{\theta_j}\right] \lambda(w) dw \quad (16)$$

$$\text{en que } \lambda(t) = e^{-t} e^{-e^{-t}} \quad y \quad \Lambda(t) = e^{-e^{-t}}$$

Esta integral no puede ser evaluada directamente, pero puede ser re-escrita de modo de evaluarla utilizando cuadratura de Gauss-Laguerre (Press *et al.*, 1992); estos aspectos operacionales se analizarán en el capítulo de estimación de modelos. Bhat (1995) demuestra que en este modelo las probabilidades de todas las alternativas disponibles suman uno, y que la propiedad de Independencia de Alternativas Irrelevantes (IAI) no rige, a menos que todos los parámetros de escala sean iguales a uno. Por el contrario, un cambio marginal en la utilidad directa de una alternativa provocará cambios en las particiones de mercado de otras alternativas, que serán mayores mientras menor sea el parámetro de escala de esa alternativa. Este resultado concuerda con la intuición en el sentido de que es lógico asumir que en las alternativas que tienen una mayor componente aleatoria (de mayor varianza), el individuo que tiene que tomar la decisión será

menos sensible a las diferencias de utilidad entre alternativas. En el límite, si una alternativa tiene varianza infinita, la participación de mercado de ésta no dependerá de los atributos representados en la diferencia de la función de utilidad. Finalmente, cabe mencionar que en este modelo, al igual que en sus homólogos, es preciso fijar uno de los parámetros de escala en un valor arbitrario (usualmente igual a uno), para que el modelo sea identificable.

3. EXPERIMENTOS DE SIMULACION

Para la implementación de los experimentos de simulación se utilizó un enfoque similar al de Williams y Ortúzar (1982), considerando conocidas las variables explicativas y la alternativa elegida en cada observación. Los atributos fueron generados en forma aleatoria con distribución Normal para las variables costo y tiempo, y distribución Binomial para la variable muda ingreso alto. Los valores de la media y la varianza fueron obtenidos de una base de datos reales para la ciudad de Santiago (Gaudry *et al.*, 1989). El proceso de elección fue simulado asumiendo valores para los parámetros de gusto de la función de utilidad, los cuáles también fueron tomados del caso de datos reales, y agregando un término de error distribuido Normal o Gumbel. Los modelos fueron estimados por máxima verosimilitud usando GAUSS (Aptech Systems, 1994). Se implementó un modelo Logit flexible que permite estimar todas las variantes descritas en el punto 2, y para validar la implementación los resultados fueron contrastados con modelos estimados con ALOGIT (Daly, 1992) y LIMDEP (Greene, 1995) en aquellos casos en que esto era posible. El modelo Probit se implementó mediante el enfoque de máxima verosimilitud simulada de Lerman y Manski (1981) utilizando el simulador GHK (Hajivassiliou *et al.*, 1993; Börsch-Supan y Hajivassiliou, 1993) para las probabilidades de elección. Los resultados aquí reportados corresponden a los más interesantes luego de probar distintos tamaños muestrales y distintas configuraciones de la matriz de covarianza. Algunos aspectos que vale la pena destacar, pero que no analizaremos en detalle por escapar a los objetivos del artículo son que en el caso de errores iid, no hay diferencias significativas entre los modelos Probit y Logit estimados con una misma base de datos, y tampoco hay diferencias significativas entre los modelos estimados para bases de datos generadas con términos de error distribuidos Normal o Gumbel con la misma varianza (ver Munizaga, 1997).

Para evaluar las consecuencias de utilizar los distintos modelos, se realizó un análisis de capacidad de respuesta, en que se compara las predicciones de cambios en la demanda ante variaciones en las variables explicativas con los valores "verdaderos" dados por la simulación. Los estímulos de política aplicados se describen en la Tabla 1; estos fueron elegidos de modo de que afecten a alternativas de ambos grupos de varianza para el caso de heteroscedasticidad entre alternativas, en el caso de cambios en más de una alternativa, se eligieron de manera que fuesen no compensatorios, para que el cambio a predecir fuese mayor. Se puede ver que estos van desde cambios muy pequeños en las variables costo y tiempo hasta algunos en que se duplica o disminuye a la mitad estas variables.

Como medida de error se considera la diferencia porcentual entre las predicciones y los valores de referencia obtenidos de la simulación; el nivel mínimo que podría considerarse como error está dado por la variación que se encuentra al realizar varias repeticiones de la simulación con distintas

semillas, en este caso ese umbral es del orden de 10%. Además se calcula un índice chi-cuadrado que toma en cuenta la magnitud relativa de las observaciones y es calculado como:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\hat{N}_i - N_i)^2}{N_i} \quad (17)$$

en que \hat{N}_i es el número de individuos que elige la alternativa i según la predicción hecha por el modelo, y N_i es el número de individuos que elige la alternativa i según la simulación. Este es un índice útil, ya que permite recoger el efecto de errores en la predicción de todas las alternativas, sin embargo, el valor que puede considerarse aceptable depende de la magnitud o escala de los valores, y de la varianza de las estimaciones.

Tabla 1
Estímulos de política
Variaciones porcentuales a las variables tiempo (t_i) y costo (c_i)
para la alternativa i que constituyen el estímulo de política P_i

	t_1	t_2	t_3	t_4	c_1	c_2	c_3	c_4
P_1								+20%
P_2		+10%						
P_3		+30%						
P_4			+20%					
P_5							-20%	
P_6							+40%	
P_7		+60%						
P_8			+40%					
P_9							-40%	
P_{10}		+100%						
P_{11}			+100%					
P_{12}		-50%						
P_{13}			-50%					
P_{14}							+100%	
P_{15}							-50%	
P_{16}		+100%	-50%			+100%	-50%	
P_{17}	-50%	+100%			-50%	+100%		

Se simuló por separado los dos tipos de heteroscedasticidad descritos anteriormente: entre alternativas y entre observaciones. El primero, que es causado por ejemplo por distintos niveles de precisión en la información de las alternativas, fue simulado agregando a la utilidad de las alternativas 1 y 2 términos de error iid Normal (0; 1,2²) y del mismo modo se agregó términos de error con desviación estándar igual a 0,6 a las restantes alternativas. En el segundo, que se presenta por ejemplo cuando los datos son recolectados de distinta forma (PR y PD), se simuló agregando términos de error iid Normal (0; 1,2²) a todas las alternativas de las primeras 1000 observaciones y términos de error iid Normal (0; 0,6²) a las restantes observaciones.

En la Tabla 2 se resume algunos de los resultados de estimación de modelos para el caso de heteroscedasticidad entre alternativas. Estos resultados son representativos de gran cantidad experimentos de simulación realizados para este caso, variando el número de observaciones, los valores de los parámetros, el número de repeticiones para la estimación de modelos Probit y la razón entre las varianzas.

Tabla 2
Modelos con heteroscedasticidad entre alternativas
estimados a partir de 2000 observaciones. Coeficientes estimados y (test-t).

	Ref.	MNL	LJNI	MNP	LJ1	LJ2	LJ3	LHVE
Modo 1	-0,2	0,3800 (2,4)	0,2953 (0,6)	-0,1437 (-0,7)	0,4853 (1,6)	0,7627 (2,2)	0,2565 (1,4)	-0,1389 (-0,5)
Modo 2	0,6	1,1292 (15,2)	1,0469 (2,3)	0,5081 (3,4)	1,1990 (4,8)	1,4894 (5,4)	0,9907 (9,4)	0,6194 (2,5)
Modo 3	0,4	0,5060 (5,0)	0,4939 (4,3)	0,3511 (5,2)	0,4975 (4,9)	0,5316 (5,2)	0,4753 (4,8)	0,4258 (4,9)
Tiempo	-0,01	-0,0119 (-3,6)	-0,0117 (-3,3)	-0,0084 (-3,4)	-0,0108 (-3,3)	-0,0129 (-3,7)	-0,0100 (-3,2)	-0,0098 (-3,2)
Costo	-0,004	-0,0059 (-5,7)	-0,0058 (-5,4)	-0,0045 (-5,3)	-0,0058 (-5,6)	-0,0062 (-5,8)	-0,0055 (-5,5)	-0,0053 (-5,4)
Ingreso	1,5	1,8401 (16,2)	1,8395 (16,2)	1,5089 (15,0)	1,7462 (14,2)	1,8419 (16,2)	1,7351 (14,2)	1,7539 (14,6)
μ (LJNI)			1,0766 (2,6)					
σ_2^2 (MNP)	0,36			0,3433 (1,6)				
ϕ_1 (LJ)					1,3309 (7,1)	1,0 (7,2)	1,3646 (7,2)	
ϕ_2 (LJ)					0,1248 (0,2)	0,0845 (0,2)	1,0 (0,2)	
θ_2 (LHVE)								0,6486 (3,9)
L-Verosim								
Promedio		-1,22208	-1,22208	-1,21965	-1,22049	-1,22140	-1,22098	-1,22109

Se puede ver que el modelo Logit Simple (MNL) arroja valores razonables para los atributos pero presenta grandes errores en la estimación de las constantes modales. Los resultados del modelo Logit Jerárquico de Nido Individual (LJNI) son similares a los del MNL y consecuentemente el parámetro μ es cercano a uno. El modelo Probit (MNP) tiene una log-verosimilitud levemente mejor y mejor recuperación de parámetros, especialmente para las constantes específicas. Similares resultados arroja el modelo Logit Heteroscedástico de Valor Extremo (LHVE).

Pese a no ser teóricamente válidos para tratar heteroscedasticidad, se incluyó la estimación de modelos Logit Jerárquico, para efectos comparativos, especialmente para validar la evidencia empírica reportada por Borsch-Supan (1990) que indica la conveniencia de estos para tratar heteroscedasticidad. Los modelos Logit Jerárquico estimados corresponden estructuras con las alternativas 1 y 2 agrupadas en un nido (LJ1), las alternativas 3 y 4 agrupadas en un nido (LJ2) y agrupación simultánea de las alternativas 1 y 2 en un nido, y 3 y 4 en otro (LJ3). Los resultados obtenidos (ver Tabla 2) son incorrectos, ya que arrojan valores mayores que uno para el parámetro jerárquico asociado a las alternativas uno y dos (ϕ_1) y valores que no son significativamente distintos de cero para el parámetro asociado a las alternativas tres y cuatro (ϕ_2). Ninguna de estas situaciones es aceptable teóricamente (ver Ortúzar y Willumsen, 1994). Debido a esto, estos modelos no fueron considerados para el análisis de respuesta.

Con respecto al análisis de respuesta, la información *in extenso* está presentada en el Anexo, y los valores del índice chi-cuadrado obtenidos al aplicar los estímulos de política P_i son sintetizados en la Tabla 3 para los modelos Logit Multinomial (MNL), Probit Multinomial (MNP) y Logit Heteroscedástico de Valor Extremo (LHVE). La fila rotulada SP, corresponde a los valores obtenidos para la muestra de calibración sin aplicar ninguna política; se espera que estos valores sean iguales a cero. Se puede ver que los resultados del modelo MNP son significativamente mejores que todo el resto, siendo relativamente cercanos los del LHVE. El modelo MNL falla considerablemente al intentar estimar cambios en la demanda debidos a estímulos de política fuertes.

Tabla 3
Indice Chi-cuadrado. Análisis de respuesta modelos
con heteroscedasticidad entre alternativas 2000 observaciones

	MNL	MNP	LHVE
SP	0,0	0,0	0,0
P_1	3,9	0,1	1,0
P_2	0,0	0,0	0,0
P_3	0,2	0,0	0,1
P_4	1,8	0,7	1,2
P_5	1,2	1,0	0,2
P_6	4,3	3,0	1,0
P_7	1,3	0,3	0,7
P_8	6,4	2,1	4,0
P_9	4,1	4,4	0,9
P_{10}	1,9	0,8	0,8
P_{11}	14,2	0,9	6,1
P_{12}	1,6	0,6	0,5
P_{13}	3,7	0,2	1,5
P_{14}	32,4	7,2	4,8
P_{15}	7,5	5,9	1,3
P_{16}	54,2	0,5	8,1
P_{17}	33,5	5,0	8,9

Los resultados de estimación de modelos para el caso de heteroscedasticidad entre observaciones son presentados en la Tabla 4. En primer lugar se estimó dos modelos Logit Simple por separado (MNL1, MNL2) que es lo que se haría en la práctica al contar con dos bases de datos, salvo que hubiese especial interés en unificar los coeficientes por algún motivo o en estimar la razón entre las varianzas de ambas muestras. El modelo MNL1 fue estimado con las primeras 1000 observaciones ($\sigma = 1,2$) y MNL con las restantes ($\sigma = 0,6$). Para comparar los parámetros con los valores de referencia es preciso escalarlos por $\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{6}\sigma}$, para el modelo MNL1 $\lambda=1,688$ y para MNL2 $\lambda=2,376$.

Al contrastar los valores escalados con los de referencia se puede ver que no son significativamente distintos en ningún caso. Tanto la verosimilitud como la estimación de los parámetros son mejores para MNL2, esto se debe a que esa muestra tiene menor varianza.

Tabla 4
Modelos con heteroscedasticidad entre observaciones
estimados a partir de 2000 observaciones. Coeficientes estimados y (test-t).

	Ref.	MNL1	MNL2	MNL	LJNI	MNP
Modo 1	-0,2	-0,3001 (-1,3)	-0,4294 (-1,5)	-0,3110 (-1,8)	-0,2362 (-1,9)	-0,1418 (-1,4)
Modo 2	0,6	0,5913 (6,0)	1,2535 (12,0)	0,9121 (2,9)	0,6269 (9,8)	0,5798 (0,3)
Modo 3	0,4	0,3574 (2,7)	0,8175 (5,4)	0,5560 (5,6)	0,4313 (5,7)	0,3557 (6,0)
Tiempo	-0,01	-0,0101 (-2,1)	-0,0221 (-4,5)	-0,0156 (-4,6)	-0,0110 (-4,7)	-0,0105 (-5,1)
Costo	-0,004	-0,0048 (-3,2)	-0,0106 (-6,1)	-0,0072 (-6,4)	-0,0053 (-6,4)	-0,0046 (-6,5)
Ingreso Alto	1,5	1,8552 (10,9)	3,5053 (15,4)	2,5545 (19,3)	1,7910 (12,3)	1,5252 (12,6)
θ (LJNI)					1,9709 (11,0)	
σ^2 (MNP)	0,36					0,3690 (5,7)
Log Verosim. Promedio		-1,28920	-1,08936	-1,20585	-1,18945	-1,18794
Número de Observaciones		1000	1000	2000	2000	2000

La estimación de un modelo Logit Simple para la unión de ambas muestras (MNL) arroja parámetros que están en algún punto intermedio entre los de MNL1 y los de MNL2, sin mayor posibilidad de interpretación. Sin embargo, el análisis de respuesta (ver Tabla 5 y Tabla A.2) indica que este modelo es sorprendentemente robusto, arrojando errores similares a los de los modelos estimados por separado. Los coeficientes estimados para LJNI debidamente escalados son similares a los obtenidos con MNL1 y MNL2, y la razón entre las varianzas (θ) es bien recuperada. La verosimilitud es levemente mejor que la del MNL, pero no hay diferencias significativas en los errores del análisis de respuesta. Lo mismo se puede decir del modelo MNP,

en que ninguno de los parámetros estimados es significativamente distinto del valor de referencia pero la capacidad de respuesta no es mejor que la del MNL.

Cabe mencionar que se descartó la hipótesis de que este sorprendente resultado fuese causado por el tamaño relativo de las sub-muestras; esto se hizo repitiendo el experimento para otras muestras con distintos números de observaciones, y las conclusiones que se puede obtener de esos experimentos son las mismas que se puede obtener de los resultados reportados.

Tabla 5
Indice Chi-cuadrado. Análisis de respuesta modelos
con heteroscedasticidad entre alternativas 2000 observaciones

	MNL	LJNI	MNP
SP	0,0	0,1	0,1
P ₁	0,2	0,4	0,2
P ₂	0,2	0,3	0,2
P ₃	1,0	1,0	0,7
P ₄	0,5	0,5	0,4
P ₅	0,3	0,1	0,4
P ₆	0,4	0,9	0,9
P ₇	2,5	2,3	1,4
P ₈	0,9	1,1	0,4
P ₉	0,2	0,2	0,3
P ₁₀	0,7	0,6	0,1
P ₁₁	0,3	0,7	0,2
P ₁₂	0,2	0,7	1,0
P ₁₃	1,3	1,2	0,6
P ₁₄	0,3	0,6	1,1
P ₁₅	0,1	1,2	0,7
P ₁₆	2,4	6,2	2,4
P ₁₇	3,1	1,9	7,4

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Utilizando simulación se ha comparado, en términos de la recuperación de parámetros y de su capacidades de predicción de respuesta, varias formas del modelo Logit, y el modelo Probit estimado mediante el uso del simulador GHK. Estas comparaciones son hechas en el contexto de muestras en que no se cumple el supuesto que los errores sean independiente e idénticamente distribuidos, incorporando dos tipos de heteroscedasticidad: entre alternativas y entre observaciones. Para el primer caso, los modelos Probit y Logit Heteroscedástico de Valor Extremo son teóricamente correctos; para el segundo caso, los son el modelo Probit y el Logit Jerárquico de Nido Individual. Pese a que se varió todos aquellos aspectos considerados relevantes, para descartar el hecho de que los resultados obtenidos sean efecto de las particulares condiciones de estos

experimentos de simulación, no se puede generalizar las conclusiones obtenidas más allá de los aspectos aquí considerados.

Los resultados muestran que la presencia de heteroscedasticidad entre observaciones es recogida de alguna forma por el modelo Logit Simple, pese a no ser teóricamente correcto para este caso. El análisis de respuesta muestra que este modelo puede predecir bien el efecto de cambios fuertes en las variables explicativas. Cabe mencionar que el caso analizado corresponde a la presencia de este tipo de heteroscedasticidad en estado puro, es decir, todos los otros supuestos se cumplen. Este hecho explica algunas diferencias encontradas con casos de datos reales, en que la diferencia entre los modelos estimados para ambas bases de datos no es tan sólo el factor de escala.

En el caso de heteroscedasticidad entre alternativas, que se puede encontrar por ejemplo en experimentos de Preferencias Declaradas del tipo ranking, el modelo Logit simple arroja resultados menos precisos. Aún cuando el modelo estima bien los parámetros de las variables explicativas, este falla en estimar las constantes modales. Por otro lado, sólo los cambios debidos a aplicación de políticas suaves fueron reproducidos dentro de los límites de precisión aceptables.

Los modelos Logit Jerárquico no ofrecen ninguna mejoría sobre los resultados del Logit Simple. Esto contradice la evidencia empírica reportada por Börsch-Supan (1990), en que se asigna a este tipo de modelos ciertas capacidades para recoger heteroscedasticidad, pero está de acuerdo con cualquier análisis teórico, ya que salvo por el hecho de agregar un grado de libertad, no existe ningún motivo para que los modelos Jerárquicos puedan recoger los efectos de la presencia de Heteroscedasticidad.

Una excepción a lo señalado en el párrafo anterior es el modelo Logit Jerárquico de Nido Individual, construido deliberadamente para representar heteroscedasticidad entre observaciones. Precisamente en ese caso, arroja mejor recuperación de parámetros que el modelo Logit Simple, pese a no ser significativamente mejor en el análisis de respuesta.

Asimismo, en el caso de heteroscedasticidad entre alternativas, el modelo Logit Heteroscedástico de Valor Extremo es significativamente mejor que el Logit Simple, tanto en la recuperación de parámetros como en la capacidad de predicción de respuesta.

El modelo Probit se comporta de acuerdo a lo esperado, recuperando bien los parámetros en ambos casos, y con capacidades de respuesta que son significativamente mejores que las del Logit Simple en el caso de heteroscedasticidad entre alternativas, pero no en el de heteroscedasticidad entre observaciones. Por otro lado, el tiempo de procesamiento requerido para llegar a estas estimaciones fue del orden de una hora en un computador personal para cada modelo, lo cual es muy superior a lo que se requiere para estimar modelos Logit Simple y Jerárquicos, pero no es para nada prohibitivo; menos aún si se considera que aquí se hizo una implementación experimental no optimizada. El modelo Logit Heteroscedástico de Valor Extremo, implementado de igual forma, requiere tiempos de procesamiento similares.

La principal conclusión que se puede obtener de los resultados aquí reportados es que el modelo Logit Simple es sorprendentemente robusto, y puede ser usado para evaluar variaciones en la

demandas debidas a cambios fuertes en las variables explicativas. En el caso de heterocedasticidad entre alternativas, sólo los modelos Logit Heteroscedástico de Valor Extremo y Probit pueden reproducir adecuadamente el fenómeno, siendo ambos igualmente intensivos en uso de computador, y mucho más flexible el último. Sobre la base de estos antecedentes, parece sensato recomendar una mayor incorporación del modelo Probit a la práctica común, ya que presenta ventajas sobre el Logit en algunos casos, y su uso ya no es difícil, incorporando las técnicas de simulación apropiadas y los computadores actuales.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Juan de Dios Ortúzar y Ben Heydecker, que participaron en la discusión e interpretación de resultados, y que me han servido de inspiración luego de participar en la escritura de algunos artículos en conjunto.

REFERENCIAS

- Aptech Systems (1994) GAUSS User's Manuals. Maple Valley.
- Ben-Akiva, M.E. y S.R. Lerman (1985) *Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand*. The MIT press, Cambridge, Mass.
- Ben-Akiva, M.E. y T. Morikawa (1990a) Estimation of travel demand models from multiple data sources. En Kosh, M. (Ed.), *Transportation and Traffic Theory*. Elsevier, Nueva York..
- Ben-Akiva, M.E. y T. Morikawa (1990b) Estimation of switching models from revealed preferences and stated intentions. *Transportation Research* 24A(6), 485-495.
- Bhat, C.R. (1995) A heteroscedastic extreme value model of intercity travel mode choice. *Transportation Research* 29B(6), 471-483.
- Bhat, C.R. (1997) Covariance heterogeneity in nested logit models: econometric structure and application to intercity travel. *Transportation Research* 31B(1), 11-21.
- Bolduc, D. (1994) A practical technique to estimate multinomial probit models in transportation. Documento de Trabajo, Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques, Quebec.
- Börsch-Supan, A. (1990) Recent developments in flexible discrete choice models: nested logit analysis versus simulated moments probit analysis. En Fisher, M.M., P. Nijkamp y Y.Y. Papageorgiou (Eds.), *Behavioral Modelling of Spatial Choices and Processes*. North-Holland, Amsterdam.

- Börsch-Supan, A. y V.A. Hajivassiliou (1993) Smooth unbiased multivariate probability simulators for maximum likelihood estimation of limited dependent variable models. *Journal of Econometrics* 58(3) 347-368.
- Bradley, M.A. y A.J. Daly (1991) Estimation of logit choice models using mixed stated preference and revealed preference information. *Preprints 6th International Conference on Travel Behaviour*, 23-24 Mayo, 1991, Quebec, Canada.
- Daganzo, C.F. (1979) **Multinomial Probit: The Theory and its Applications to Demand Forecasting**. Academic Press, Nueva York..
- Daganzo, C.F., F. Bouthelier y Y. Sheffi (1977) Multinomial probit and qualitative choice: a computationally efficient algorithm. *Transportation Science* 11(4), 338-358.
- Daly, A.J. (1987) Estimating “tree” logit models. *Transportation Research* 21B(4), 251-267.
- Daly, A.J. (1992) **ALOGIT 3.2. User's Guide**. Hague Consulting Group, The Hague.
- Domencich, T. y D. McFadden (1975) **Urban Travel Demand - A Behavioural Analysis**. North Holland, Amsterdam.
- Gaudry, M.J.L. y M.G. Dagenais (1979) The Dogit model. *Transportation Research* 13B(2), 105-111.
- Gaudry, M.J.L., S.R. Jara-Díaz y J. de D. Ortúzar (1989) Value of time sensitivity to model specification. *Transportation Research* 23B(2), 151-158.
- Greene, W.H. (1995) **LIMDEP Version 7.0 User's Manual**. Econometric Software Inc. Bellport, NY.
- Hajivassiliou, V.A., D. McFadden y P. Ruud (1993) Simulation of multivariate normal rectangle probabilities and their derivatives: theoretical and computational results. Working Paper, Cowles Foundation, Yale University.
- Hensher, D. (1996) Extending valuation to controlled value functions and non-uniform scaling with generalised unobserved variances. Working Paper ITS-WP-96-9, Institute of Transport Studies, The University of Sydney.
- Horowitz, J.L., J.M Sparmann y C.F. Daganzo (1984) An investigation of the accuracy of the Clark approximation for the multinomial probit model. *Transportation Science*, 16(3), 383-401.
- Lerman, S. y C. Manski (1981) On the use of simulated frequencies to approximate choice probabilities. En Manski, C. y D. McFadden (Eds.), **Structural Analysis of Discrete Data With Econometric Applications**. The MIT Press, Cambridge, Massachussets.

Mayberry, J.P. (1973) Structural requirements for abstract-mode models of passenger transportation. In Quandt, R.E. (Ed.), **The Demand for Travel: Theory and Measurement**. Heath and Co., Lexington, Mass.

McFadden, D. (1974) Conditional logit analysis of qualitative choice behavior. In Zarembka, P. (Ed), **Frontiers in Econometrics**. Academic Press, New York.

McFadden, D. (1981) Econometric models of probabilistic choice. En Manski, C. y D. McFadden (Eds), **Structural Analysis of Discrete Data with Econometric Applications**. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

McFadden, D. y P.A. Ruud (1994) Estimation by simulation. **The Review of Economics and Statistics** 76(4), 591-608.

Munizaga, M. (1997) Implicancias de la naturaleza de los datos en la modelación de elecciones discretas. Tesis de Doctorado, Departamento de Ingeniería de Transporte, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Ortúzar, J. de D. y L.G. Willumsen. (1994) **Modelling Transport**: Second Edition. John Wiley and Sons, Chichester.

Press, W.H., S.A. Teukolski, W.T. Vetterling y B.P. Flannery (1992) **Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing**. Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge.

Williams, H.C.W.L. (1977) On the formation of travel demand models and economic measures of user benefit. **Environment and Planning** 9A(3), 285-344.

Williams, H.C.W.L. y J. de D. Ortúzar (1982) Behavioural theories of dispersion and the mis-specification of travel demand models. **Transportation Research** 16B(3), 167-219.

Tabla A.1. Análisis de respuesta heteroscedástica entre alternativas, $\alpha_1=1.2$; $\alpha_2=0.6$. Error porcentual.

Referencia	M 1	M 2	M 3	M 4	Logit Simple				LJNI				Probit				LHVE			
					Modo1	Modo2	Modo3	Modo4	Modo1	Modo2	Modo3	Modo4	Modo1	Modo2	Modo3	Modo4	Modo1	Modo2	Modo3	Modo4
NP	497	849	344	310	495,5	850,3	343,7	310,4	497,2	848,8	344,1	309,9	496,1	848,7	345,6	309,5	497,7	846,6	344,3	310,3
P1	516	872	266	346	- 0,3	0,2	- 0,1	0,1	0,3	- 0,2	0,1	- 0,2	- 0,2	- 0,0	0,5	- 0,2	0,1	- 0,3	0,1	0,1
P2	502	830	351	317	- 1,3	1,0	- 8,6	- 7,1	- 0,8	1,0	- 7,6	- 7,1	- 0,9	0,9	- 0,3	- 0,8	- 0,6	0,9	3,4	- 4,3
P3	514	793	366	327	0,4	- 0,2	-	-	0,7	- 0,4	0,1	3,8	- 0,4	0,1	0,3	-	0,4	- 0,5	0,2	0,0
P4	506	864	302	328	- 0,9	- 0,2	6,4	- 4,0	- 0,6	- 0,3	6,1	- 4,1	- 1,0	- 0,3	4,2	- 1,6	- 0,5	- 0,6	5,4	- 3,0
P5	477	818	421	284	- 1,1	2,0	7,8	- 8,3	- 0,5	2,2	5,7	- 8,2	- 0,1	1,7	- 10,7	- 2,7	- 0,2	- 2,2	- 3,0	- 3,4
P6	527	888	224	361	- 2,6	- 2,8	- 0,9	3,3	2,8	- 2,8	- 1,1	2,9	- 0,2	- 0,7	- 0,7	2,8	0,6	- 1,9	- 0,5	3,6
P7	530	742	390	338	- 2,0	0,1	12,9	- 7,2	- 1,6	0,1	12,1	- 7,2	- 1,6	- 0,2	7,8	- 3,0	- 1,5	- 0,3	10,4	- 5,4
P8	517	873	266	344	506,6	874,0	300,3	319,1	508,9	873,8	298,2	319,1	508,6	871,0	286,7	333,6	509,0	870,8	293,6	325,4
P9	454	783	505	258	- 1,5	- 0,7	- 5,4	9,9	1,3	- 1,5	- 3,5	9,1	- 0,4	- 1,6	7,0	- 8,3	0,8	- 2,5	2,5	1,1
P10	554	657	427	362	573,2	640,4	413,1	373,4	573,8	642,2	412,2	371,7	548,7	665,1	413,9	372,3	554,7	654,2	415,3	375,0
P11	531	899	200	370	520,8	904,7	244,1	330,4	523,8	905,8	239,5	330,9	524,1	898,3	212,0	365,5	523,1	901,4	229,2	345,0
P12	473	951	310	266	452,4	963,1	307,2	277,3	454,8	959,6	308,2	277,4	467,0	944,7	310,7	277,7	465,2	951,1	306,5	275,9
P13	473	813	436	278	479,7	816,9	405,4	298,1	480,3	813,3	409,5	296,9	477,8	816,1	428,9	277,2	481,2	812,0	416,5	289,3
P14	551	990	95	424	547,3	963,0	137,9	351,9	551,0	965,5	130,6	352,9	551,2	946,3	72,7	429,7	550,2	961,6	101,1	385,0
P15	445	762	552	241	- 0,7	- 2,7	45,2	- 17,0	- 2,5	37,5	- 16,8	0,0	- 4,4	- 23,5	1,3	- 0,1	- 2,9	6,4	- 9,2	- 6,8
P16	496	317	928	259	545,5	299,8	804,9	350	537,6	298,5	822,1	341,9	494,6	305,8	937,9	261,6	504,7	308,1	888,4	298,4
P17	900	371	387	342	1009,0	286,3	369,9	334,3	1003,2	291,7	370,8	334,3	933,9	334,2	385	346,1	950,1	324,2	380,7	346,7
					12,1	- 22,8	- 4,4	- 2,3	11,5	- 21,4	- 4,2	- 2,3	3,8	- 9,9	- 0,5	1,2	5,6	- 12,6	- 1,6	