

## FORMULACION DE MODELOS DE EQUILIBRIO SIMULTANEO EN REDES DE TRANSPORTE INTERURBANO DE CARGA

J. Enrique Fernández L., Joaquín de Cea Ch., Alexandra Soto O.  
Departamento Ingeniería de Transporte, Universidad Católica de Chile  
Casilla 306, FAX: (56-2) 552 4054 Santiago 22, CHILE.

### RESUMEN

En este trabajo se desarrollan nuevas formulaciones para la modelación de redes de transporte interurbano de carga. Se adopta un enfoque de equilibrio simultáneo oferta demanda en donde las decisiones de despachadores y operadores se integran simultáneamente en una sola formulación matemática variacional. Las decisiones propias de los despachadores se representan a través de una estructura jerárquica de modelos de elección discreta conjuntamente con un modelo de distribución entrópico. Estas decisiones incluyen la elección de destino, modo (puro o combinado), operador en el caso de modos puros y punto de transbordo en el caso de modos combinados. Las decisiones de ruteo se simulan sobre las redes pertinentes a los modos considerados en los modelos de demanda. Se formulan diferentes modelos dependiendo de las percepciones de costo supuestas para despachadores y operadores. Finalmente se demuestra que las soluciones correspondientes a los modelos formulados reproducen las condiciones de equilibrio supuestas para cada caso.

### 1. INTRODUCCION

La modelación de sistemas interurbanos de transporte de carga, ha sido históricamente menos estudiada que el caso urbano de transporte de pasajeros. Los principales modelos presentados en la literatura, suponen simplificaciones importantes en su formulación.

El primer desarrollo significativo en cuanto a modelos de redes para planificación de transporte interurbano, corresponde al llamado Modelo de Harvard (Roberts, 1966, y Kresge y Roberts, 1971), aplicado al caso de la red de transporte de Colombia como una herramienta para la elaboración de un plan de desarrollo del sistema de transporte interurbano de ese país. En términos generales, se trata de un modelo multimodal y multiproducto. Sus principales limitaciones radican en que no modela congestión, no considera restricciones de flota y modela el comportamiento de un único tipo de agente en el sistema de transporte.

Entre este primer modelo y los desarrollos considerados actualmente como estado del arte en el tema (modelos FNEM y STAN), cabe destacar cuatro desarrollos intermedios, que, a pesar de presentar serias limitaciones, introducen conceptos importantes, como la modelación de la congestión o la consideración de dos agentes independientes interactuando entre sí en el sistema:

el modelo de Peterson (Peterson y Fullerton, 1975), el modelo de Princeton (Kornhauser et al., 1979), el modelo CACI (Bronzini, 1980), y el modelo de Lansdowne (1981).

El modelo FNEM (Friesz et al., 1981), es un modelo multimodal y multiproducto, que considera explícitamente el comportamiento de dos agentes, despachadores y operadores, en el sistema de transporte de carga, asociando la determinación de niveles de demanda a los despachadores (demanda elástica), y las decisiones de ruta sobre la red, a los operadores. Sin embargo, la modelación es secuencial, con los consiguientes problemas de posibles inconsistencias oferta-demanda en las soluciones obtenidas. Se suponen dos redes diferentes: la red real, separada en subredes percibidas por los distintos operadores, y una red agregada, percibida por los despachadores en su proceso de determinación de niveles de demanda. Las funciones de costo y demora usadas en este modelo, son no lineales, y varían con los volúmenes de carga transportada para modelar los efectos de la congestión, pero se trata de funciones separables, con lo que se restringe la consideración de interacciones asimétricas entre operadores que podrían compartir infraestructura. Finalmente, FNEM no considera restricciones de flota ni modela explícitamente el retorno de los vehículos vacíos.

El modelo de Análisis Estratégico de Transporte (STAN), actualmente comercializado a través de la empresa canadiense INRO Consultants Inc., es un modelo de redes, multimodal y multiproducto, que sólo modela las características de la oferta derivadas del comportamiento de los operadores en el sistema de transporte. En base a una formulación y enfoque más sencillos, STAN se adapta bastante bien a la mayor parte de las necesidades de modelación de un sistema de transporte interurbano, entregando resultados robustos y confiables. Este modelo considera congestión, modela el retorno de los vehículos vacíos, permite imponer restricciones de flota, pero no considera explícitamente restricción de capacidad en los arcos de la red. La demanda es determinada exógenamente (matrices de viaje origen-destino para cada producto transportado), y se asume que los productos se transportan a mínimo costo total, según el segundo principio de Wardrop, por lo que el resultado obtenido corresponde a un equilibrio óptimo del sistema. La elección de modo puede ser especificada externamente o decidida por el modelo como consecuencia de la asignación de viajes sobre una red multimodal adecuadamente definida. En cuanto a la formulación del modelo, es muy general, permitiendo, en principio, funciones de costo no convexas y asimétricas.

Algunos desarrollos recientes, posteriores a los modelos FNEM y STAN, son: la formulación matemática de un modelo simultáneo para despachadores y operadores, propuesto por Friesz, Viton y Tobin (Friesz y Harker, 1985), que aún no ha sido implementado computacionalmente y que presenta los mismos problemas que FNEM en cuanto a definición de redes agregadas y suposición de interacciones simétricas; el modelo simultáneo de Hurley y Petersen (Hurley y Petersen, 1994), que introduce un interesante enfoque para la modelación de las tarifas cobradas por los operadores, pero adolece de las limitaciones que implica un enfoque de asignación para la elección de modos de transporte; finalmente, el sistema de información geográfica para redes de transporte de carga (B. Jourquin y M. Beuthe, 1995), desarrollado especialmente para el análisis del transporte de carga de larga distancia, pero que modela sólo las decisiones de asignación sobre la red (tomadas por los operadores), y lo hace ignorando cualquier modelación de congestión en el sistema.

## 2. DESCRIPCION GENERAL DE UN MERCADO DE TRANSPORTE INTERURBANO DE CARGA

En un mercado de transporte interurbano participan diversos agentes que deciden el movimiento de carga sobre las redes de transporte. Entre estos agentes podemos mencionar a los **productores**, agentes económicos que producen bienes, y a los **consumidores**, que demandan dichos bienes (Harker, 1987). Ahora bien, estos productores y consumidores, que se comunican entre sí mediante un conjunto de precios de bienes y servicios que ellos venden y compran, respectivamente, pueden localizarse geográficamente en zonas distintas dentro de la región que se desea analizar. Para que se produzca efectivamente intercambio entre estos agentes, las zonas en que se ubican deben estar unidas a través de un sistema de transporte con un conjunto de **operadores** que producen los servicios y un conjunto de agentes, que denominaremos **despachadores**, cuya función es administrar el movimiento de carga (bienes y servicios), entre orígenes y destinos del sistema.

En general, los despachadores toman decisiones sobre distribución de viajes y partición modal, es decir, determinan a grandes rasgos los orígenes y destinos de las cargas y el conjunto de modos de transporte que se usarán para movilizarlas. Se supone que los despachadores tratan de minimizar el costo de transporte, sujetos a las restricciones de orígenes y destino.

Los operadores, a su vez, tienen por función transportar la carga desde su origen a su destino, a través de la red de transporte en la que operan. En general, se supone que estos agentes buscan maximizar el beneficio neto de su operación.

De este análisis del mercado de transporte de carga, podemos observar que **despachadores y operadores** son los oferentes y demandantes en el mercado de servicios de transporte. En efecto, los despachadores, determinan la demanda por servicios de transporte y los operadores, satisfacen esta demanda, generando una oferta de servicios que lleva aparejado un conjunto de niveles de servicio sobre la red.

## 3. ENFOQUE DE MODELACION PROPUESTO

Como marco de referencia de la modelación propuesta, se han tomado como punto de partida los principales trabajos desarrollados para modelar equilibrios oferta-demanda en sistemas de transporte interurbano de carga. A diferencia de los modelos existentes, cuyo enfoque tradicional se centra en una modelación secuencial, en este trabajo se plantea un nuevo enfoque basado en la modelación simultánea de los procesos de oferta y demanda, relacionados con el comportamiento de operadores y despachadores. Las decisiones de ambos agentes, son modeladas en forma simultánea y regidas por principios de comportamiento que buscan representar de la mejor forma posible la realidad actualmente observada, considerando el compromiso existente entre complejidad y realismo de los modelos generados.

La red utilizada, consiste en una red única y multimodal, en que, para los distintos modos de transporte, puede existir uno o más operadores compitiendo por una infraestructura común. En

esta red, se representan modos de transporte puros y también combinados. Se supone que la elección de punto de transbordo la realiza el despachador y, por lo tanto, no se modela como una decisión de asignación a la red (operadores), sino como un decisión de demanda (despachadores). La congestión se modela suponiendo demoras variables con el flujo en los arcos de la red y efectos asimétricos entre distintos operadores.

#### 4. HIPOTESIS DE COMPORTAMIENTO

En términos generales, los supuestos de comportamiento considerados para los agentes del sistema se basan en que:

- i) los despachadores se limitan a escoger modos, contratar operadores y escoger puntos de transbordo importantes (por ejemplo, puertos), basando sus decisiones en el valor de las tarifas pactadas y otras características del servicio y de los productos a transportar, como tiempo medio de viaje, porcentaje de pérdidas de la carga y varianza en el tiempo de viaje;
- ii) los operadores, en tanto, eligen la ruta sobre la red por la que realizarán el transporte de la carga que les ha sido encomendada, basándose en la minimización de sus propios costos privados totales, pudiendo también considerar en esta elección aspectos que determinan el nivel de servicio ofrecido a los despachadores, para lograr así mejores contratos con estos agentes.

#### 5. SEGMENTACION Y NIVEL DE DETALLE DE LA MODELACION

La modelación propuesta considera un nivel de detalle que representa las siguientes decisiones de demanda: distribución de viajes, elección de modo de transporte, operador y punto de transbordo. En cuanto a la oferta, las decisiones representadas corresponden al ruteo de los vehículos sobre las redes modales.

Tomando en consideración la forma en que opera un sistema interurbano de transporte de carga, conviene desagregar el análisis en distintos aspectos a considerar en forma explícita en la modelación. Por ejemplo, desde el punto de vista de la demanda, se usará una desagregación por productos ( $p$ ), tipo de intercambio en cuanto a importación o exportación ( $t$ ) y tamaño del envío ( $s$ ). Desde el punto de vista de la oferta, se desgrega por tipo de vehículo ( $v$ ) usado por los operadores.

#### 6. REPRESENTACION DE LA RED Y FUNCIONES DE COSTO

El modelo considera un conjunto de modos  $M$  que contiene dos tipos de elementos relevantes:  $m$ , modos puros, por ejemplo modo carretero o ferroviario, con operadores  $r \in R_m$ , y  $\hat{m}$ , modos combinados, formados por modos puros unidos por puntos de transbordo  $d \in D_{\hat{m}}$ . Los modos combinados y los puntos de transbordo son definidos a priori. El conjunto  $P_w \in P$  de todas las rutas que unen un par origen destino  $w \in W$ , está compuesto por: los subconjuntos

$P_{wmr}$ , correspondientes a cada operador  $r$  de un modo puro  $m$ , y los subconjuntos  $P_{w\hat{m}d}$ , correspondientes a las rutas que usan cada punto transbordo  $d$  de un modo combinado  $\hat{m}$ . En el caso que exista sólo una ruta en alguno de estos subconjuntos, ésta podrá denominarse como  $P_{wmr}$  o  $P_{w\hat{m}d}$ , según corresponda.

El flujo en cada arco de la red, equivale a la suma de los flujos de todos los operadores de modos puro que utilizan el arco, más los flujos correspondientes a los viajes a través de los distintos puntos de transbordo de modos combinados que también usan el arco:

$$f_a = \sum_{m \in M} \sum_{r \in R_m} f_{amr} + \sum_{\hat{m} \in M} \sum_{d \in D_{\hat{m}}} f_{a\hat{m}d}.$$

El costo medio de operación en cada arco  $a$  de la red, asociado a cada tipo de vehículo  $v$ ,  $c_a^v$ , es constante y depende del largo del arco y de las características de diseño de la infraestructura disponible. Se supone un tipo de vehículo  $v$  asociado a cada operador  $r$  y a cada operador de punto de transbordo  $d$ , con lo que los costos de operación por arco pueden expresarse como  $c_{amr}$  para cada operador  $r$  de un modo puro  $m$  sobre el arco  $a$ , y  $c_{a\hat{m}d}$  para cada transbordo  $d$  de un modo combinado  $\hat{m}$ . El tiempo medio en cada arco  $a$  de la red, asociado a cada tipo de vehículo  $v$ , en caso de no ser constante (modelación de la congestión), depende sólo del flujo  $f_a$  en dicho arco:  $t_a^v(f_a)$ . Al igual que en el caso de los costos de operación, suponiendo una relación uno a uno entre operadores y tipos de vehículos, los tiempos medios pueden expresarse como  $t_{amr}(f_a)$  y  $t_{a\hat{m}d}(f_a)$ , para modos puros y combinados, respectivamente.

## 7. MODELOS DE LA DEMANDA

### 7.1. Generación de viajes

La modelación propuesta corresponde a un equilibrio de mercado de corto plazo, por lo que se asume constante tanto los precios de los productos, como las demandas y ofertas de ellos en cada zona del territorio analizado. Es así como se supone que las cantidades ofrecidas y demandadas de cada producto  $p$  en cada centroide de la red, por tipo de intercambio  $t$  y tamaño del envío  $s$ ,  $O_i^{pts}$  y  $D_j^{pts}$ , respectivamente, son datos conocidos de entrada a los modelos.

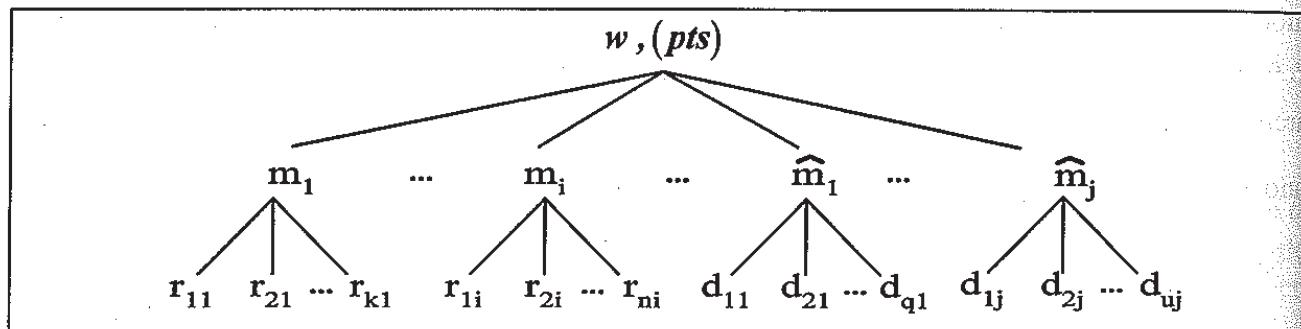
### 7.2. Estructura del proceso de elección

Las decisiones de los despachadores con respecto a la elección de modo de transporte, de operador en el caso de modos puros y de punto de transbordo en el caso de modos combinados, para cada par origen-destino de la red, se representan a través de un modelo lógit jerárquico. Este modelo consta de dos niveles:

- un nivel inferior que representa la elección de operador en el caso de modos puros y la elección de punto de transbordo en el caso de modos combinados;
  - un nivel superior que representa la elección de modo de transporte.

En la elección de punto de transbordo en el caso de los modos combinados, sólo se modela el transbordo más importante y probablemente el único que se puede elegir (puertos, grandes patios de transbordo ferroviario, etc.). En caso de existir transbordos adicionales, se supone que estos son escogidos directamente por el operador encargado de transportar la carga, sin decisión del despachador de por medio. Esto significa que si existen más transbordos, su elección es modelada a través de la elección de ruta en la red; para ello las redes deben ser apropiadamente definidas. Por último, es importante definir correctamente el conjunto de modos y operadores disponibles para cada tipo de producto (*pts*).

La figura 1 esquematiza el modelo de elección de modos, operadores y puntos de transbordo, para un tipo de producto  $pts$ , entre un par origen-destino  $w$ , en que  $m_i$  corresponde al modo puro número  $i$ ,  $\hat{m}_j$  al modo combinado número  $j$ ,  $r_{ki}$  al operador número  $k$  del modo puro  $i$  y  $d_{qj}$  al punto de transbordo número  $q$  del modo combinado  $j$ .



**Figura 1 : Estructura general del modelo de elección**

### 7.3. Distribución

Para la modelación de la distribución de viajes en el sistema se usa un modelo de tipo gravitacional doblemente acotado de la siguiente forma general:

$$T_w^{pts} = A_i^{pts} O_i^{pts} B_j^{pts} D_j^{pts} \exp \left( \beta^{pts} L_w^{pts} + q^{pts} P_i^p \right) \quad (1)$$

El parámetro  $\beta^{pts}$  permite calibrar el modelo para distintas combinaciones de producto, tipo de intercambio y tamaño del envío. Además, por construcción,  $\beta^{pts}$  corresponde al parámetro “phi” del modelo logit jerárquico asociado al proceso de elección.  $P_i^p$  representa el precio del producto  $p$  en el origen  $i$ , en tanto  $q$  corresponde a un parámetro de calibración para transformar a utiles el precio expresado en la unidad de moneda correspondiente. Otra posible expresión para el

exponente de la función de distribución, en el caso que los despachadores sean exportadores, es:  $(\beta^{pts} L_w^{pts} - q^{pts} P_j^P)$ , con  $P_j^P$  como el precio del producto  $p$  en el destino  $j$ .

$L_w^{pts}$  corresponde al logsum de las utilidades compuestas (EMU) de cada modo:

$$L_w^{pts} = \ln \sum_{k \in M} \exp \left( \beta_k^{pts} \tilde{V}_{wk}^{pts} + \alpha_k^{pts} \right) \quad (2)$$

La expresión de los factores de balance  $A_i^{pts}$  y  $B_j^{pts}$  está dada por:

$$A_i^{pts} = \frac{1}{\sum_j B_j^{pts} D_j^{pts} \exp \left( \beta^{pts} L_w^{pts} \right)} \quad (3)$$

$$B_j^{pts} = \frac{1}{\sum_i A_i^{pts} O_i^{pts} \exp \left( \beta^{pts} L_w^{pts} \right)} \quad (4)$$

#### 7.4. Partición modal

Las desutilidades que perciben los despachadores al escoger un operador  $r$  de un modo puro  $m$ , o un punto de transbordo  $d$  de un modo combinado  $\hat{m}$ , tienen las siguientes expresiones generales, respectivamente:

$$V_{wmr}^{pts} = - \left( \alpha_{mr}^{pts} + R_{wmr}^{pts} + \theta^{pts} t_{wmr} + \gamma_l^{pts} l_{wmr} + \gamma_\sigma^{pts} \sigma_{wmr} \right) \quad (5)$$

$$V_{w\hat{m}d}^{pts} = - \left( \alpha_{\hat{m}d}^{pts} + R_{w\hat{m}d}^{pts} + \theta^{pts} t_{w\hat{m}d} + \gamma_l^{pts} l_{w\hat{m}d} + \gamma_\sigma^{pts} \sigma_{w\hat{m}d} \right) \quad (6)$$

Los términos incluidos en estas expresiones corresponden a las constantes modales  $\alpha$ , las tarifas  $R$ , los tiempos medios de viaje  $t$ , porcentajes de pérdidas de la carga transportada  $l$  y varianzas en el tiempo medio de viaje  $\sigma$ , respectivamente. La tarifa  $R$ , corresponde a la suma de los costos generalizados privados de los operadores ( $C$ ), más la ganancia neta exigida por estos agentes ( $\varepsilon$ ).

Para calcular la proporción de viajes que usan un cierto operador en un modo puro y un cierto punto de transbordo en un modo combinado, se utilizan los siguientes modelos:

$$G_{wmr}^{pts} \left( \vec{V}_{wm}^{pts} \right) = \frac{\exp \left( \gamma_m^{pts} V_{wmr}^{pts} \right)}{\sum_{k \in R_m} \exp \left( \gamma_m^{pts} V_{wmk}^{pts} \right)} \quad (7)$$

$$G_{wm\hat{m}}^{pts}(\tilde{V}_{wm\hat{m}}^{pts}) = \frac{\exp(\gamma_{\hat{m}}^{pts} V_{wm\hat{m}}^{pts})}{\sum_{k \in D_{\hat{m}}} \exp(\gamma_{\hat{m}}^{pts} V_{wmk}^{pts})} \quad (8)$$

Las expresiones EMU asociadas los nidos correspondiente a los modos  $m$  y  $\hat{m}$ , son:

$$\tilde{V}_{wm}^{pts} = \frac{1}{\gamma_m^{pts}} \ln \sum_{r \in R_m} \exp(\gamma_m^{pts} V_{wmr}^{pts}) \quad (9)$$

$$\tilde{V}_{w\hat{m}}^{pts} = \frac{1}{\gamma_{\hat{m}}^{pts}} \ln \sum_{d \in D_{\hat{m}}} \exp(\gamma_{\hat{m}}^{pts} V_{w\hat{m}d}^{pts}) \quad (10)$$

Las proporciones de los viajes totales entre un par origen-destino  $w$  que utilizan el modo  $m$  y el modo  $\hat{m}$ , respectivamente, están dadas por:

$$G_{wm}^{pts}(\tilde{V}_w^{pts}) = \frac{\exp(\beta_m^{pts} \tilde{V}_{wm}^{pts} + \alpha_m^{pts})}{\sum_{k \in M} \exp(\beta_k^{pts} \tilde{V}_{wk}^{pts} + \alpha_k^{pts})} \quad (11)$$

$$G_{w\hat{m}}^{pts}(\tilde{V}_w^{pts}) = \frac{\exp(\beta_{\hat{m}}^{pts} \tilde{V}_{w\hat{m}}^{pts} + \alpha_{\hat{m}}^{pts})}{\sum_{k \in M} \exp(\beta_k^{pts} \tilde{V}_{wk}^{pts} + \alpha_k^{pts})} \quad (12)$$

Usando las proporciones (11) y (12) y conocida la matriz de viajes origen-destino, se obtiene el número de viajes que utiliza cada modo de transporte:

$$T_{wm}^{pts} = T_w^{pts} \cdot G_{wm}^{pts} \quad (13)$$

$$T_{w\hat{m}}^{pts} = T_w^{pts} \cdot G_{w\hat{m}}^{pts} \quad (14)$$

Para el caso particular de dos modos de transporte en el sistema, la función inversa de la demanda por modos sería:

$$G_{wm}^{pts-1}(T_{wm}^{pts}) = \beta_m^{pts} \tilde{V}_{wm}^{pts} - \beta_{\hat{m}}^{pts} \tilde{V}_{w\hat{m}}^{pts} = -\ln\left(\frac{T_w^{pts}}{T_{wm}^{pts}} - 1\right) + \alpha_{\hat{m}}^{pts} - \alpha_m^{pts} \quad (15)$$

Usando las proporciones (7), (8), (11) y (12), y conocida la matriz de viajes origen-destino, se obtiene el número de viajes que utiliza cada operador en un modo de transporte puro y cada punto de transbordo en un modo combinado:

$$T_{wmr}^{pts} = T_w^{pts} \cdot G_{wm}^{pts} \cdot G_{wmr}^{pts} \quad (16)$$

$$T_{w\hat{m}d}^{pts} = T_w^{pts} \cdot G_{w\hat{m}}^{pts} \cdot G_{w\hat{m}d}^{pts} \quad (17)$$

## 8. MODELACION DE LA OFERTA

La forma general de los modelos de elección de ruta, estará dada por las siguientes condiciones, en que:  $U_{wmr}^*$  y  $U_{w\hat{m}d}^*$  son los valores de equilibrio para todas las rutas utilizadas, para cada operador  $r$  de un modo puro  $m$ , y para cada punto de transbordo  $d$  de un modo combinado  $\hat{m}$ , entre todo para  $w$ ;  $t_p$  es el tiempo de viaje sobre la ruta  $p$ ;  $\theta^{pts}$  es el valor del tiempo para los despachadores (dependiente, en forma general, del tipo de producto  $pts$ ); y  $C_p^*$  es una función a definir (paramétrica) de costo generalizado en la ruta  $p$ .

$$C_p^* + \Delta \theta^{pts} t_p^* \begin{cases} = U_{wmr}^* \text{ si } h_p^* > 0 & w \in W \\ \geq U_{wmr}^* \text{ si } h_p^* = 0 & r \in R_m \\ & p \in P_{wmr} \end{cases} \quad (18)$$

$$C_p^* + \Delta \theta^{pts} t_p^* \begin{cases} = U_{w\hat{m}d}^* \text{ si } h_p^* > 0 & w = (i, j) \in W \\ \geq U_{w\hat{m}d}^* \text{ si } h_p^* = 0 & d \in D_{\hat{m}} \\ & p \in P_{w\hat{m}d} = P_{(i,d)\hat{m}} \cup P_{(d,j)\hat{m}} \end{cases} \quad (19)$$

$$\Delta = \begin{cases} 1 & \text{si se considera el tiempo de viaje percibido} \\ & \text{por los despachadores para elegir rutas} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (20)$$

Cabe notar que en estos modelos de equilibrio de flujos en rutas, se supone que, tanto la elección de operador  $r$ , como de punto de transbordo  $d$ , se realiza a otro nivel por parte de los despachadores, y es sólo la ruta de origen a destino, en el caso de modos puros, y los segmentos de ruta del origen al punto de transbordo y del punto de transbordo al destino, en el caso de modos combinados, lo que escoge el operador. Como una forma de simplificar la notación, (19) incluye ambos segmentos de ruta en el caso de un punto de transbordo de un modo combinado. Este tipo de notación simplificada, se usará en todos los modelos planteados.

En las expresiones (18) y (19), el término paramétrico  $C_p^*$  corresponde al costo generalizado privado percibido por el operador. En él se incluye el costo de operación,  $c_p^*$ , y, dependiendo de los supuestos de comportamiento asumidos (ver sección 9), el tiempo percibido y valorado en  $\phi$  por el propio operador, valoración que, en general, está relacionada con los costos de capital de los vehículos. En caso de existir congestión en el sistema, este tiempo será variable, con lo que  $C_p^*$  corresponderá al costo marginal privado,  $\overline{CM}_p^* = c_p^* + \phi \overline{tM}_p^*$ , percibido por el operador.

En las expresiones anteriores, el parámetro  $\Delta$  identifica a aquellos modelos en que los operadores consideran el tiempo percibido y valorado por los despachadores, como una más de sus variables de decisión al momento de escoger rutas de viaje.

## 9. FORMULACIONES ALTERNATIVAS

Se consideran tres tipos de modelos alternativos que hacen diferentes supuestos respecto del fenómeno de congestión:

- i) no      se considera la congestión en el sistema y, por lo tanto, los tiempos de viaje son constantes, tanto para operadores como para despachadores;
- ii) se modela la congestión en forma parcial: los operadores no consideran los tiempos de viaje en sus decisiones de ruteo, sino sólo sus costos de operación; sin embargo, los despachadores perciben el efecto de estas decisiones de ruteo sobre los tiempos reales de viaje experimentados cuando hay congestión;
- iii) se modela congestión en el sistema, la que es percibida tanto por los operadores en sus decisiones de ruteo, como por los despachadores.

Dentro de esta agrupación mayor, se clasifican, a su vez, posibles submodelos en cuanto a las variables que consideran los operadores, además del costo constante de operación, al elegir rutas: costo de tiempo propio, y/o costo de tiempo para el despachador.

### 9.1. Modelo 1: sistemas sin congestión (caso general)

En un sistema sin congestión, los tiempos de viaje son constantes. En el caso general de este modelo, las condiciones de equilibrio de flujos de la formulación simultánea, están dadas por (21) y (22), e indican que la única ruta utilizada entre cada par origen-destino  $w$ , por cada operador  $r$  de un modo puro  $m$ , o a través de cada punto de transbordo  $d$  de un modo combinado  $\hat{m}$ , es aquella que presenta el mínimo costo compuesto, formado por la sumatoria entre costos de operación y costos de tiempo, ambos percibidos por los operadores, más el costo de tiempo de viaje para los despachadores ( $\Delta = 1$ ,  $C_p^* = c_p^* + \phi t_p^*$ ).

$$c_p^* + \phi t_p^* + \theta^{pts} t_p^* \begin{cases} = U_{wmr}^* \text{ si } h_p^* \geq 0 \text{ i.e. si } h_p^* = T_{wmr}^* & w \in W \\ > U_{wmr}^* \text{ si } h_p^* = 0 & r \in R_m \\ & p \in P_{wmr} \end{cases} \quad (21)$$

$$c_p^* + \phi t_p^* + \theta^{pts} t_p^* \begin{cases} = U_{w\hat{m}d}^* \text{ si } h_p^* \geq 0 \text{ i.e. si } h_p^* = T_{w\hat{m}d}^* & w \in W \\ > U_{w\hat{m}d}^* \text{ si } h_p^* = 0 & d \in D_{\hat{m}} \\ & p \in P_{w\hat{m}d} \end{cases} \quad (22)$$

### 9.2. Modelo 2: sistemas con percepción parcial de la congestión

La presencia de congestión en el sistema se traduce en tiempos variables con los flujos en los arcos de la red. Sin embargo, en este modelo los operadores no perciben estos tiempos como parte de sus costos, sino que basan sus decisiones de ruteo sólo en los costos de operación, que son constantes ( $\Delta=0$ ,  $C_p^*=c_p^*$ ).

El modelo exógeno de elección de rutas mínimas,  $p_{wmr}$  y  $p_{w\hat{m}d}$ , tiene, en este caso, las siguientes condiciones de equilibrio:

$$c_p^* \begin{cases} = U_{wmr}^* \text{ si } p = p_{wmr} & w \in W \\ \geq U_{wmr}^* \text{ si } p \neq p_{wmr} & r \in R_m \\ & p \in P_{wmr} \end{cases} \quad (23)$$

$$c_p^* \begin{cases} = U_{w\hat{m}d}^* \text{ si } p = p_{w\hat{m}d} & w \in W \\ \geq U_{w\hat{m}d}^* \text{ si } p \neq p_{w\hat{m}d} & d \in D_{\hat{m}} \\ & p \in P_{w\hat{m}d} \end{cases} \quad (24)$$

Es importante hacer notar que, en este caso, las decisiones de los despachadores, simuladas mediante los modelos de demanda, no afectan ni modifican las decisiones de ruteo de los operadores, ya que éstas no dependen de los flujos. Por lo tanto, dichas decisiones permanecen invariantes frente a cambios en las elecciones de los despachadores.

### 9.3. Modelo 3: sistemas con congestión (caso general)

Este modelo, al igual que el anterior, considera congestión en el sistema, a través de tiempos de viaje variables con los flujos en los arcos de la red. La diferencia con el modelo anterior, radica en que los operadores también perciben estos tiempos como parte de sus costos, considerando así la congestión en sus decisiones de ruteo ( $C_p^*=c_p^* + \phi \overline{tM}_p^* = \overline{CM}_p^*$ ). Además, se supone que los operadores consideran los tiempos percibidos y valorados por los despachadores, como una más de sus variables de decisión para escoger rutas ( $\Delta=1$ ), lo que equivale a suponer que los

operadores buscan ofrecer un buen nivel de servicio a los despachadores, mejorando así sus posibilidades de ser contratados por éstos.

Los condiciones de equilibrio de rutas de este modelo están dadas por (25) y (26), con  $\overline{CM}_p^* = c_p^* + \phi \overline{tM}_p^*$ , e indican que las rutas efectivamente utilizadas, entre un par origen-destino, presentan todos el mismo costo compuesto ( $\overline{CM}_p^* + \theta^{pts} t_p^*$ ), que es menor al correspondiente a aquellas rutas no utilizadas.

$$\overline{CM}_p^* + \theta^{pts} t_p^* \begin{cases} = U_{wmr}^* \text{ si } h_p^* > 0 & w \in W \\ \geq U_{wmr}^* \text{ si } h_p^* = 0 & r \in R_m \\ & p \in P_{wmr} \end{cases} \quad (25)$$

$$\overline{CM}_p^* + \theta^{pts} t_p^* \begin{cases} = U_{w\bar{m}d}^* \text{ si } h_p^* > 0 & w \in W \\ \geq U_{w\bar{m}d}^* \text{ si } h_p^* = 0 & d \in D_{\bar{m}} \\ & p \in P_{w\bar{m}d} \end{cases} \quad (26)$$

## 10. FORMULACIONES MATEMATICAS

En lo que sigue, y a fin de simplificar la notación, se considerará sólo un producto  $p$ , un tamaño de envío  $s$  y un tipo de intercambio  $t$ . Además, se considerará un conjunto de modos  $M$  que contiene sólo dos elementos relevantes:  $m$ , modo puro (por ejemplo, modo carretero o ferroviario), con operadores  $r \in R_m$ ; y  $\bar{m}$ , modo combinado, formado por  $m$  y  $\bar{m}$ , unidos por puntos de transbordo  $d \in D_{\bar{m}}$  (el modo  $\bar{m}$ , que puede ser, por ejemplo, barco, sólo es usado en combinación con  $m$ ).

Para el primer modelo, que presenta costos y tiempos constantes, la solución del problema de optimización equivalente asociado, satisface las correspondientes condiciones de equilibrio presentadas en los puntos anteriores. En cuanto al segundo y tercer modelos, dadas las asimetrías existentes entre las funciones de demora, variables con el flujo, de los distintos operadores, no existen problemas de optimización equivalentes. En estos casos, las condiciones de equilibrio son satisfechas por los problemas diagonalizados correspondientes a cada formulación.

### 10.1. Modelo 1: sistemas sin congestión (caso general)

Las condiciones de equilibrio (1), (7), (8), (15), (21) y (22), se obtienen del siguiente problema de optimización equivalente:

(P1):

$$\begin{aligned} \min Z = & \sum_{a \in A_m} \sum_{r \in R_m} c_{amr} f_{amr} + \sum_{a \in (A_m \cup A_{\bar{m}})} \sum_{d \in D_{\bar{m}}} c_{a\bar{m}d} f_{a\bar{m}d} + \\ & + \phi \sum_{a \in A_m} \sum_{r \in R_m} t_{amr} f_{amr} + \phi \sum_{a \in (A_m \cup A_{\bar{m}})} \sum_{d \in D_{\bar{m}}} t_{a\bar{m}d} f_{a\bar{m}d} + \theta \sum_{a \in A_m} \sum_{r \in R_m} t_{amr} f_{amr} + \theta \sum_{a \in (A_m \cup A_{\bar{m}})} \sum_{d \in D_{\bar{m}}} t_{a\bar{m}d} f_{a\bar{m}d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\beta_m} \sum_w T_{wm} (\ln T_{wm} - 1 - \alpha_m) - \frac{1}{\gamma_m} \sum_w T_{wm} (\ln T_{wm} - 1) + \frac{1}{\gamma_m} \sum_w \sum_r T_{wmr} (\ln T_{wmr} - 1) \\
& + \frac{1}{\beta_{\hat{m}}} \sum_w T_{w\hat{m}} (\ln T_{w\hat{m}} - 1 - \alpha_{\hat{m}}) - \frac{1}{\gamma_{\hat{m}}} \sum_w T_{w\hat{m}} (\ln T_{w\hat{m}} - 1) + \frac{1}{\gamma_{\hat{m}}} \sum_w \sum_d T_{w\hat{m}d} (\ln T_{w\hat{m}d} - 1) \\
& + \sum_w \sum_r T_{wmr} (\alpha_{mr} + \varepsilon_{wmr} + \gamma_1 l_{wmr} + \gamma_\sigma \sigma_{wmr}) + \sum_w \sum_d T_{w\hat{m}d} (\alpha_{\hat{m}d} + \varepsilon_{w\hat{m}d} + \gamma_1 l_{w\hat{m}d} + \gamma_\sigma \sigma_{w\hat{m}d}) \\
& + \frac{1}{\beta} \sum_w T_w (\ln T_w - 1 - qP_i) - \sum_w T_w (\ln T_w - 1)
\end{aligned} \tag{27}$$

s.a.

$$T_w = T_{wm} + T_{w\hat{m}} \quad \forall w \in W \tag{28}$$

$$T_{wk} = \sum_{l \in \{R_m \cup D_{\hat{m}}\}} T_{wkl} \quad \forall w \in W, \forall k \in M \tag{29}$$

$$T_{wkl} = \sum_{p \in P_{wkl}} h_p \quad \forall w \in W, \forall k \in M, \forall l \in \{R_m \cup D_{\hat{m}}\} \quad (U_{wkl}) \tag{30}$$

$$O_i = \sum_j T_w \quad \forall i \in N_m \quad (\lambda_i) \tag{31}$$

$$D_j = \sum_i T_w \quad \forall j \in \{N_m \cup N_{\bar{m}}\} \quad (\lambda_j) \tag{32}$$

$$f_{akl} = \sum_w \sum_{p \in P_{wkl}} \delta_{ap} h_p \quad \forall a \in A_m, \forall k \in M, \forall l \in \{R_m \cup D_{\hat{m}}\} \tag{33}$$

$$\delta_{ap} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in p \\ 0 & \text{si } a \notin p \end{cases} \quad \forall a \in \{A_m \cup A_{\bar{m}}\}, \forall p \in P_w, \forall w \in W \tag{34}$$

$$h_p \geq 0, T_w \geq 0, T_{wk} \geq 0, T_{wkl} \geq 0 \quad \forall p \in P_w, \forall w \in W, \forall k \in M, \forall l \in \{R_m \cup D_{\hat{m}}\} \tag{35}$$

## 10.2. Modelo 2: Sistemas con Percepción Parcial de la Congestión

Las condiciones de equilibrio (1), (7), (8) y (15), se obtienen de la diagonalización por operadores de la siguiente formulación:

(P2):

$$\begin{aligned}
\min Z = & \theta \sum_{a \in A_m} \sum_{r \in R_m} \oint_{f_{amr}} t_{amr} (f_{am1}, f_{am2}, \dots, x, \dots) dx + \theta \sum_{a \in \{A_m \cup A_{\bar{m}}\}} \sum_{d \in D_{\hat{m}}} \oint_{f_{a\hat{m}d}} t_{a\hat{m}d} (f_{a\hat{m}1}, f_{a\hat{m}2}, \dots, x, \dots) dx \\
& + \frac{1}{\beta_m} \sum_w T_{wm} (\ln T_{wm} - 1 - \alpha_m) - \frac{1}{\gamma_m} \sum_w T_{wm} (\ln T_{wm} - 1) + \frac{1}{\gamma_m} \sum_w \sum_r T_{wmr} (\ln T_{wmr} - 1) \\
& + \frac{1}{\beta_{\hat{m}}} \sum_w T_{w\hat{m}} (\ln T_{w\hat{m}} - 1 - \alpha_{\hat{m}}) - \frac{1}{\gamma_{\hat{m}}} \sum_w T_{w\hat{m}} (\ln T_{w\hat{m}} - 1) + \frac{1}{\gamma_{\hat{m}}} \sum_w \sum_d T_{w\hat{m}d} (\ln T_{w\hat{m}d} - 1) \\
& + \sum_w \sum_r T_{wmr} (\alpha_{mr} + R_{wmr} + \gamma_1 l_{wmr} + \gamma_\sigma \sigma_{wmr}) + \sum_w \sum_d T_{w\hat{m}d} (\alpha_{\hat{m}d} + R_{w\hat{m}d} + \gamma_1 l_{w\hat{m}d} + \gamma_\sigma \sigma_{w\hat{m}d})
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\beta} \sum_w T_w (\ln T_w - 1 - qP_i) - \sum_w T_w (\ln T_w - 1) \quad (36)$$

s.a.

$$T_w = T_{wm} + T_{w\hat{m}} \quad \forall w \in W \quad (37)$$

$$T_{wk} = \sum_{l \in \{R_m \cup D_{\hat{m}}\}} T_{wkl} \quad \forall w \in W, \forall k \in M \quad (38)$$

$$O_i = \sum_j T_w \quad \forall i \in N_m \quad (\lambda_i) \quad (39)$$

$$D_j = \sum_i T_w \quad \forall j \in \{N_m \cup N_{\bar{m}}\} \quad (\lambda_j) \quad (40)$$

$$f_{akl} = \sum_w \delta_{ap_{wkl}} T_{wkl} \quad \forall a \in A_m, \forall k \in M, \forall l \in \{R_m \cup D_{\hat{m}}\} \quad (41)$$

$$\delta_{ap_{wkl}} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in p_{wkl} \\ 0 & \text{si } a \notin p_{wkl} \end{cases} \quad \forall a \in A_m, \forall w \in W, \forall k \in M, \forall l \in \{R_m \cup D_{\hat{m}}\} \quad (42)$$

$$T_w \geq 0, T_{wk} \geq 0, T_{wkl} \geq 0 \quad \forall w \in W, \forall k \in M, \forall l \in \{R_m \cup D_{\hat{m}}\} \quad (43)$$

### 10.3. Modelo 3: sistemas con congestión (caso general)

Las condiciones de equilibrio (1), (7), (8), (15), (25) y (26), se obtienen de la diagonalización por operadores de la siguiente formulación:  
(P3):

$$\begin{aligned} \min Z = & \sum_{a \in A_m} \sum_{r \in R_m} c_{amr} f_{amr} + \sum_{a \in (A_m \cup A_{\bar{m}})} \sum_{d \in D_{\hat{m}}} c_{a\hat{m}d} f_{a\hat{m}d} \\ & + \phi \sum_{a \in A_m} \sum_{r \in R_m} \oint_{f_{amr}} \frac{\partial}{\partial x} (t_{amr}(f_{am1}, f_{am2}, \dots, x, \dots) x) dx \\ & + \phi \sum_{a \in (A_m \cup A_{\bar{m}})} \sum_{d \in D_{\hat{m}}} \oint_{f_{a\hat{m}d}} \frac{\partial}{\partial x} (t_{a\hat{m}d}(f_{a\hat{m}1}, f_{a\hat{m}2}, \dots, x, \dots) x) dx \\ & + \theta \sum_{a \in A_m} \sum_{r \in R_m} \oint_{f_{amr}} t_{amr}(f_{am1}, f_{am2}, \dots, x, \dots) dx + \theta \sum_{a \in (A_m \cup A_{\bar{m}})} \sum_{d \in D_{\hat{m}}} \oint_{f_{a\hat{m}d}} t_{a\hat{m}d}(f_{a\hat{m}1}, f_{a\hat{m}2}, \dots, x, \dots) dx \\ & + \frac{1}{\beta_m} \sum_w T_{wm} (\ln T_{wm} - 1 - \alpha_m) - \frac{1}{\gamma_m} \sum_w T_{wm} (\ln T_{wm} - 1) + \frac{1}{\gamma_m} \sum_w \sum_r T_{wmr} (\ln T_{wmr} - 1) \\ & + \frac{1}{\beta_{\hat{m}}} \sum_w T_{w\hat{m}} (\ln T_{w\hat{m}} - 1 - \alpha_{\hat{m}}) - \frac{1}{\gamma_{\hat{m}}} \sum_w T_{w\hat{m}} (\ln T_{w\hat{m}} - 1) + \frac{1}{\gamma_{\hat{m}}} \sum_w \sum_d T_{w\hat{m}d} (\ln T_{w\hat{m}d} - 1) \\ & + \sum_w \sum_r T_{wmr} (\alpha_{mr} + \varepsilon_{wmr} + \gamma_1 l_{wmr} + \gamma_{\sigma} \sigma_{wmr}) + \sum_w \sum_d T_{w\hat{m}d} (\alpha_{\hat{m}d} + \varepsilon_{w\hat{m}d} + \gamma_1 l_{w\hat{m}d} + \gamma_{\sigma} \sigma_{w\hat{m}d}) \\ & + \frac{1}{\beta} \sum_w T_w (\ln T_w - 1 - qP_i) - \sum_w T_w (\ln T_w - 1) \end{aligned} \quad (44)$$

$$s.a. \quad T_w = T_{wm} + T_{w\hat{m}} \quad \forall w \in W \quad (45)$$

$$T_{wk} = \sum_{l \in \{R_m \cup D_{\hat{m}}\}} T_{wkl} \quad \forall w \in W, \forall k \in M \quad (46)$$

$$T_{wkl} = \sum_{p \in P_{wkl}} h_p \quad \forall w \in W, \forall k \in M, \forall l \in \{R_m \cup D_{\hat{m}}\} \quad (U_{wkl}) \quad (47)$$

$$O_i = \sum_j T_{wj} \quad \forall i \in N_m \quad (\lambda_i) \quad (48)$$

$$D_j = \sum_i T_{wj} \quad \forall j \in \{N_m \cup N_{\hat{m}}\} \quad (\lambda_j) \quad (49)$$

$$f_{akl} = \sum_w \sum_{p \in P_{wkl}} \delta_{ap} h_p \quad \forall a \in A_m, \forall k \in M, \forall l \in \{R_m \cup D_{\hat{m}}\} \quad (50)$$

$$\delta_{ap} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in p \\ 0 & \text{si } a \notin p \end{cases} \quad \forall a \in \{A_m \cup A_{\hat{m}}\}, \forall p \in P_w, \forall w \in W \quad (51)$$

$$h_p \geq 0, T_w \geq 0, T_{wk} \geq 0, T_{wkl} \geq 0 \quad \forall p \in P_w, \forall w \in W, \forall k \in M, \forall l \in \{R_m \cup D_{\hat{m}}\} \quad (52)$$

## 11. CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Se derivan, a modo de ejemplo, las condiciones de equilibrio para el Modelo 3.

### 11.1. Problema de minimización

El Lagrangeano a minimizar, corresponde a la diagonalización por operadores de la formulación (P3), e incluye las ecuaciones (44), (47), (48) y (49). Las ecuaciones dadas por (50), son usadas directamente en la función objetivo a través de la regla de derivación de la cadena. Las ecuaciones (45), y (46), son usadas como definiciones en la obtención de las condiciones de equilibrio.

$$\begin{aligned} \min_{(h, T)} L &= \sum_{a \in A_m} \sum_{r \in R_m} c_{amr} f_{amr} + \sum_{a \in \{A_m \cup A_{\hat{m}}\}} \sum_{d \in D_{\hat{m}}} c_{a\hat{m}d} f_{a\hat{m}d} \\ &+ \phi \sum_{a \in A_m} \sum_{r \in R_m} \bar{t}_{amr} (f_{amr}) f_{amr} + \phi \sum_{a \in \{A_m \cup A_{\hat{m}}\}} \sum_{d \in D_{\hat{m}}} \bar{t}_{a\hat{m}d} (f_{a\hat{m}d}) f_{a\hat{m}d} \\ &+ \theta \sum_{a \in A_m} \sum_{r \in R_m} \int_0^{f_{amr}} \bar{t}_{amr}(x) dx + \theta \sum_{a \in \{A_m \cup A_{\hat{m}}\}} \sum_{d \in D_{\hat{m}}} \int_0^{f_{a\hat{m}d}} \bar{t}_{a\hat{m}d}(x) dx \\ &+ \frac{1}{\beta_m} \sum_w T_{wm} (\ln T_{wm} - 1 - \alpha_m) - \frac{1}{\gamma_m} \sum_w T_{wm} (\ln T_{wm} - 1) + \frac{1}{\gamma_m} \sum_w \sum_r T_{wmr} (\ln T_{wmr} - 1) \\ &+ \frac{1}{\beta_{\hat{m}}} \sum_w T_{w\hat{m}} (\ln T_{w\hat{m}} - 1 - \alpha_{\hat{m}}) - \frac{1}{\gamma_{\hat{m}}} \sum_w T_{w\hat{m}} (\ln T_{w\hat{m}} - 1) + \frac{1}{\gamma_{\hat{m}}} \sum_w \sum_d T_{w\hat{m}d} (\ln T_{w\hat{m}d} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_w \sum_r T_{wmr} \left( \alpha_{mr} + \varepsilon_{wmr} + \gamma_l l_{wmr} + \gamma_\sigma \sigma_{wmr} \right) + \sum_w \sum_d T_{w\hat{m}d} \left( \alpha_{\hat{m}d} + \varepsilon_{w\hat{m}d} + \gamma_l l_{w\hat{m}d} + \gamma_\sigma \sigma_{w\hat{m}d} \right) \\
& + \frac{1}{\beta} \sum_w T_w \left( \ln T_w - 1 - qP_i \right) - \sum_w T_w \left( \ln T_w - 1 \right) \\
& + \sum_w U_{wmr} \left( T_{wmr} - \sum_{p \in P_{wmr}} h_p \right) + \sum_w U_{w\hat{m}d} \left( T_{w\hat{m}d} - \sum_{p \in P_{w\hat{m}d}} h_p \right) + \sum_i \lambda_i \left( O_i - \sum_j T_j \right) + \sum_j \lambda_j \left( D_j - \sum_i T_i \right) \quad (53)
\end{aligned}$$

### 11.2. Derivadas parciales

Las derivadas parciales del Lagrangeano, con respecto a todas las variables del problema (variables de flujo  $h_p, \forall p \in P_w, \forall w \in W$ , y variables de demanda  $T_w, T_{wm}, T_{w\hat{m}}, T_{wmr}, T_{w\hat{m}d}, \forall w \in W, \forall r \in R_m, \forall d \in D_{\hat{m}}$ ), son:

$$\frac{\partial L}{\partial h_p} = \underbrace{c_p + \phi \overline{tM}_p}_{p \in P_{wmr}} + \theta \bar{t}_p - U_{wmr} \quad (54)$$

$$\frac{\partial L}{\partial h_p} = \underbrace{c_p + \phi \overline{tM}_p}_{p \in P_{w\hat{m}d}} + \theta \bar{t}_p - U_{w\hat{m}d} \quad (55)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_w} = \frac{1}{\beta} \left( \ln T_w - qP_i \right) - \ln T_w - \lambda_i - \lambda_j \quad (56)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_{wm}} = \frac{1}{\beta_m} \left( \ln T_{wm} - \alpha_m \right) - \frac{1}{\gamma_m} \ln T_{wm} \quad (57)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_{w\hat{m}}} = \frac{1}{\beta_{\hat{m}}} \left( \ln T_{w\hat{m}} - \alpha_{\hat{m}} \right) - \frac{1}{\gamma_{\hat{m}}} \ln T_{w\hat{m}} \quad (58)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_{wmr}} = \frac{1}{\gamma_m} \ln T_{wmr} + \alpha_{mr} + \varepsilon_{wmr} + \gamma_l l_{wmr} + \gamma_\sigma \sigma_{wmr} + U_{wmr} \quad (59)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T_{w\hat{m}d}} = \frac{1}{\gamma_{\hat{m}}} \ln T_{w\hat{m}d} + \alpha_{\hat{m}d} + \varepsilon_{w\hat{m}d} + \gamma_l l_{w\hat{m}d} + \gamma_\sigma \sigma_{w\hat{m}d} + U_{w\hat{m}d} \quad (60)$$

### 11.3. Equilibrio de Fluxos

A partir de las ecuación (54) y (55), en el equilibrio se obtienen, respectivamente, las condiciones de equilibrio (25) y (26):

$$\overline{CM}_p^* + \theta \bar{t}_p^* \begin{cases} = U_{wmr}^* \text{ si } h_p^* > 0 & w \in W \\ \geq U_{wmr}^* \text{ si } h_p^* = 0 & r \in R_m \\ & p \in P_{wmr} \end{cases} \quad (61)$$

$$\overline{CM}_p^* + \theta \bar{t}_p^* \begin{cases} = U_{w\hat{m}d}^* \text{ si } h_p^* > 0 & w \in W \\ \geq U_{w\hat{m}d}^* \text{ si } h_p^* = 0 & d \in D_{\hat{m}} \\ & p \in P_{w\hat{m}d} \end{cases} \quad (62)$$

#### 11.4. Equilibrio de viajes por operador y por punto de transbordo

A partir de las ecuaciones (57) y (59), se tiene que:

$$\text{si } T_{wm}^* > 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta_m} \left( \ln T_{wm}^* - \alpha_m \right) - \frac{1}{\gamma_m} \ln T_{wm}^* = 0 \quad (63)$$

$$\text{si } T_{wmr}^* > 0 \Rightarrow \frac{1}{\gamma_m} \ln T_{wmr}^* + \alpha_{mr} + \varepsilon_{wmr} + \gamma_l l_{wmr} + \gamma_\sigma \sigma_{wmr} + U_{wmr}^* = 0 \quad (64)$$

Sumando, despejando  $T_{wmr}^*$ , y reemplazando el valor de  $U_{wmr}^*$  de (61):

$$T_{wmr}^* = \exp -\gamma_m (X_{wm}^* - Y_{wm}^*) \exp -\gamma_m \left( \overline{CM}_p^* + \theta \bar{t}_p^* + \varepsilon_{wmr} + \gamma_l l_{wmr} + \gamma_\sigma \sigma_{wmr} + \alpha_{mr} \right) \quad (65)$$

Reemplazando la definición de tarifa y usando la definición (5) de  $V_{wmr}^*$ , se tiene:

$$T_{wmr}^* = \exp -\gamma_m (X_{wm}^* - Y_{wm}^*) \exp -\underbrace{\gamma_m (R_{wmr}^* + \theta \bar{t}_p^* + \gamma_l l_{wmr} + \gamma_\sigma \sigma_{wmr} + \alpha_{mr})}_{\gamma_m V_{wmr}^*} \quad (66)$$

Dividiendo (66) por la sumatoria, para todos los operadores  $r$ , de  $T_{wmr}^*$ , se forma

$$G_{wmr}^* = \frac{T_{wmr}^*}{\sum_{k \in R_m} T_{wmk}^*}, \text{ obteniéndose la condición de equilibrio (7):}$$

$$G_{wmr}^* = \frac{\exp(\gamma_m V_{wmr}^*)}{\sum_{k \in R_m} \exp(\gamma_m V_{wmk}^*)} \quad (67)$$

En forma análoga al desarrollo anterior, se obtiene la condición (8).

### 11.5. Equilibrio de viajes por modo

Reemplazando (66) en (46), se tiene:

$$T_{wm}^* = \sum_r \left[ \exp -\gamma_m (X_{wm}^* - Y_{wm}^*) \exp (\gamma_m V_{wmr}^*) \right] \quad (68)$$

Simplificando, reordenando y reemplazando los valores de  $X_{wm}^*$  e  $Y_{wm}^*$ :

$$\frac{1}{\gamma_m} \ln \sum_r \exp (\gamma_m V_{wmr}^*) = \frac{1}{\beta_m} (\ln T_{wm}^* - \alpha_m) \quad (69)$$

Aplicando la definición de la función utilidad compuesta asociada a cada modo, y reordenando términos, (69) queda:

$$\beta_m \tilde{V}_{wm}^* = \ln T_{wm}^* - \alpha_m \quad (70)$$

De forma análoga, se obtiene que:

$$\beta_{\hat{m}} \tilde{V}_{w\hat{m}}^* = \ln T_{w\hat{m}}^* - \alpha_{\hat{m}} \quad (71)$$

Restando (70) y (71) para formar  $G_{wm}^{-1*} = \beta_m \tilde{V}_{wm}^* - \beta_{\hat{m}} \tilde{V}_{w\hat{m}}^*$ , y usando que  $T_{w\hat{m}}^* = T_w^* - T_{wm}^*$  de (45), se obtiene la condición de equilibrio (15):

$$G_{wm}^{-1*} = -\ln \left( \frac{T_w^*}{T_{wm}^*} - 1 \right) + \alpha_{\hat{m}} - \alpha_m \quad (72)$$

### 11.6. Equilibrio de viajes totales

Usando la ecuación (56), se tiene que:

$$\text{si } T_w^* > 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta} \left( \ln T_w^* - qP_i \right) - \ln T_w^* - \lambda_i^* - \lambda_j^* \quad (73)$$

Reordenando y aplicando exponencial a (73), queda:

$$T_w^* = \exp(\beta \lambda_i^*) \exp(\beta \lambda_j^*) \exp(\beta \ln T_w^* + qP_i) \quad (74)$$

Reemplazando (74) en (48) y en (49), se obtiene, respectivamente:

$$O_i = \exp(\beta \lambda_i^*) \sum_j \exp(\beta \lambda_j^*) \exp(\beta \ln T_w^* + qP_i) \quad (75)$$

$$D_j = \exp(\beta \lambda_j^*) \sum_i \exp(\beta \lambda_i^*) \exp(\beta \ln T_w^* + qP_i) \quad (76)$$

Sean:

$$A_i^* = \frac{\exp(\beta \lambda_i^*)}{O_i} \Rightarrow \exp(\beta \lambda_i^*) = A_i^* O_i \quad (77)$$

$$B_j^* = \frac{\exp(\beta \lambda_j^*)}{D_j} \Rightarrow \exp(\beta \lambda_j^*) = B_j^* D_j \quad (78)$$

Por otra parte, despejando  $T_{wm}^*$  de (70) y  $T_{w\hat{m}}^*$  de (71), se obtiene:

$$T_{wm}^* = \exp(\beta_m \tilde{V}_{wm}^* + \alpha_m) \quad (79)$$

$$T_{w\hat{m}}^* = \exp(\beta_{\hat{m}} \tilde{V}_{w\hat{m}}^* + \alpha_{\hat{m}}) \quad (80)$$

Sumando y reemplazando en (45), aplicando logaritmo natural, reordenando y usando la definición de utilidad compuesta asociada a cada par origen-destino:

$$\ln T_w^* = \underbrace{\ln \left( \exp(\beta_m \tilde{V}_{wm}^* + \alpha_m) + \exp(\beta_{\hat{m}} \tilde{V}_{w\hat{m}}^* + \alpha_{\hat{m}}) \right)}_{L_w^*} \quad (81)$$

Luego, reemplazando (77), (78) y (81) en (74), se obtiene la función de demanda por viajes (condición de equilibrio 1):

$$T_w^* = A_i^* O_i B_j^* D_j \exp(\beta L_w^* + qP_i) \quad (82)$$

## AGRADECIMIENTOS

Este proyecto ha sido financiado por FONDECYT (1950976) y la Pontificia Universidad Católica de Chile.

## REFERENCIAS

- Bronzini, M.S. (1980) Evolution of a multimodal freight transportation network model, **Proceedings of the Transportation Research Forum 21** (1), 475-85.
- Crainic, T.G., M. Florian y J.E. Leal (1990) A model for the strategic planning of national freight transportation by rail, **Transportation Science 24** (1), 1-24.
- Drissi-Kaïtouni, O. (1991) Solution approaches for multimode multiproduct assignment problems, **Transportation Research 25B** (5), 317-327.
- Fernández, J.E. y J. De Cea (1992) Characteristics of Composite Modes Modelling in the Context of Network Equilibrium, World Conference, Lyon, France.
- Fernández, J.E., J. De Cea, M. Florian y E. Cabrera (1994) "Network Equilibrium Models with Combined Modes", **Transportation Science 28** (3), 182-192.
- Florian, M. y T.G. Crainic (1989) Strategic planning of freight transportation in Brazil: methodology and applications, **Centre de Recherche sur les Transports**, 638-642, Université de Montréal, Montréal, Canada.
- Friesz, T.L., J.A. Gottfried y E.K. Morlok (1986) A sequential shipper-carrier network model for predicting freight flows", **Transportation Science 20** (2), 80-91.
- Friesz, T.L. y P.T. Harker (1985) Freight network equilibrium: a review of the state of the art, **Analytical Studies in Transportation Economics**, Chapter 7, Daughtry, A.F. (Ed.), Cambridge University Press.
- Guelat, J., M. Florian y B.C. Crainic (1990) A multimode multiproduct network assignment model for strategic planning of freight flows, **Transportation Science 24** (1), 25-39.
- Harker, P.T. (1987) Predicting Intercity Freight Flows, **Topics in Transportation**, Florian, M. (Ed.), VNU Science Press, Utretch, The Netherlands.
- Harker, P.T. (1988) Multiple Equilibrium Behaviors on Networks, **Transportation Science 22** (1), 39-46.
- Hurley, W.J. y E.R. Petersen (1994) Nonlinear tariffs and freight network equilibrium, **Transportation Science 28** (3), 236-245.
- Hurley, W.J. y E.R. Petersen (1994) Optimal Freight Transport Pricing and the Freight Network Equilibrium Problem", **Tristán II Conference**, Capri, Italy.
- Jourquin, B. y M. Beuthe (1995) Transportation Policy Analysis with a Geographic Information System: the Virtual Network of Freight Transportation in Europe, unpublished.

Kresge, D.T. y P.O. Roberts (1971) Systems analysis and simulation models, **Techniques of Transport Planning II**, Meyer, J.R. (Ed.), The Brookings Institute, Washington, D.C.

Lansdowne, Z.F. (1981) Rail Freight Traffic Assignment, **Transportation Research 15A**, 183-190.

Meyer, J.R. y M.R. Straszheim (1971) Pricing and project evaluation, **Techniques of Transport Planning I**, Meyer J.R. (Ed.), The Brookings Institute, Washington, D.C.

Peterson, E.R. y H.V. Fullerton, eds. (1975) "The railcar network models", **Canadian Institute of Guided Ground Transport**, Report N° 75-11, Queen's University, Kingston, Ontario.

Safwat, K.N.A. y T.L. Magnanti (1988) A combined trip generation, trip distribution, modal split, and trip assignment model. **Transportation Science 18** (1), 14-30.