CARACTERÍSTICAS DE PRODUCCIÓN DE UN SERVICIO DE TRANSPORTE PÚBLICO URBANO DE PASAJEROS

J. Enrique Fernández L., Joaquín de Cea Ch.
Depto. Ingeniería de Transporte, Pontificia Universidad Católica de Chile
Casilla 306, Santiago 22, CHILE
FAX:(56-2) 686 4818; e-mail: jef@ing.puc.cl
&
Louis de Grange C.
Fernández y De Cea Ingenieros
Lota 2257, Of. 403, Santiago, CHILE
FAX: (56-2) 234 1578; e-mail: fydcea@reuna.cl

Resumen

En este trabajo se plantea un modelo microeconómico que permite definir las principales características de la estructura de producción de un servicio de transporte público de pasajeros. El trabajo considera un análisis detallado de las características técnicas de producción del sistema, para lo cual se desarrolla un modelo analítico que representa la operación de un servicio de transporte público de superficie desde la perspectiva de los operadores del servicio. Se concluye que tanto la dispersión de la demanda dentro del trayecto como el nivel de congestión son fundamentales en determinar el tipo de rendimientos a escala existente en la provisión de servicios de buses.

1. INTRODUCCIÓN

En la literatura especializada surgen una serie de autores que mediante técnicas econométricas deducen la existencia de rendimientos decrecientes a escala en la provisión de servicios de buses urbanos. Entre tales autores destacan Cherworny *et al.* (1978), Berechman (1983) y Viton (1992). Por otra parte, existen otros autores que también empleando técnicas econométricas concluyen la presencia de rendimientos decrecientes a escala, entre los que se puede nombrar a Wabe y Coles (1975), Tauchen *et al.* (1983), Obeng (1984) y Xu *et al.* (1994). En consecuencia, no existe un resultado concluyente al respecto, sino que dependerá de las características propias del sistema de transporte estudiado.

Sin embargo, no existe en la literatura un desarrollo teórico (microeconómico) que relacione, de manera explícita, las características de producción del servicio con el tipo de rendimientos a escala existente tomando en consideración la estructura de demanda que el recorrido enfrenta y la influencia de la congestión. Los modelos microeconómicos existentes son desarrollados desde una perspectiva del sistema, donde se incorpora a operadores y usuarios del mismo para definir las características óptimas de producción del servicio, sin considerar congestión vial. Entre esos estudios destacan Mohring (1972), Jansson (1980) y Jara-Diaz y Gschwender (1997), concluyendo presencia de rendimientos crecientes a escala. Los dos primeros se refieren a transporte público programado.

En el presente trabajo se desarrolla y analiza las características de producción de un servicio de buses, considerando variables y parámetros relevantes en la provisión del servicio, como son los factores productivos (buses, mano de obra y terminales), capacidad de los buses y características propias del recorrido ofrecido. En la sección 2 se definen las características operacionales del servicio ofrecido considerando distintas estructuras de demanda; en la sección 3 se define la función de producción mientras que en la sección 4 se analizan los índices de productividad y tipo de rendimientos a escala existentes, incorporando de manera explícita la congestión vial. Finalmente, en la sección 5 se presentan las conclusiones que se deducen del desarrollo expuesto.

2. CARACTERÍSTICAS DE FLOTA Y FRECUENCIA

El análisis empezará con una definición básica del recorrido que se realiza para ofrecer un determinado servicio. Se considerará una flota de buses que ofrece el servicio en una ruta o trayecto de largo L, la que contiene un total de n arcos sucesivos durante su recorrido, como se presenta en la siguiente Figura 1:

Figura 1: Estructura del Recorrido Ofrecido

Para nuestro análisis identificaremos tres estructuras que presentan características diferentes en cuanto a la distribución de los viajes a lo largo del trayecto:

- *Estructura de Demanda Uniforme*: considera una carga uniforme de los viajes a lo largo del recorrido. Esto se obtiene con una estructura de viajes como la que muestra la Figura 2:

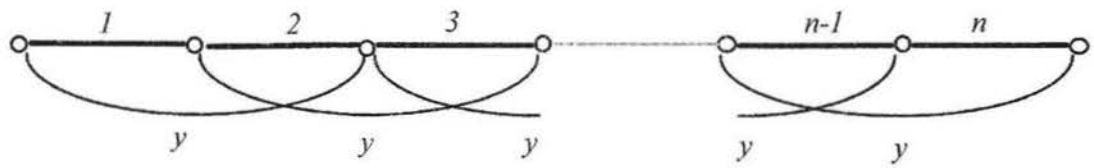

Figura 2: Ejemplo de Demanda Uniforme en el Recorrido

En rigor, las cargas de pasajeros serían las mismas en todos los segmentos sólo si $(n \to \infty)$, de otra forma, las cargas serán menores en los arcos extremos del recorrido[1]. Para el caso representado en la Figura 2 las cargas en todos los arcos son iguales a $2y$, salvo en los arcos extremos, cuya carga es y. Esta estructura de demandas y cargas es típicamente supuesta en la literatura (Mohring, 1972; Jansson, 1980; Jara-Diaz y Gschwender 1997).

- *Estructura de Demanda Homogénea*: supone distribución homogénea de las demandas entre todos los pares O-D existe la misma demanda de viajes (ver Figura 3). Recorridos de circunvalación y periféricos pueden presentar este tipo de estructura de carga.

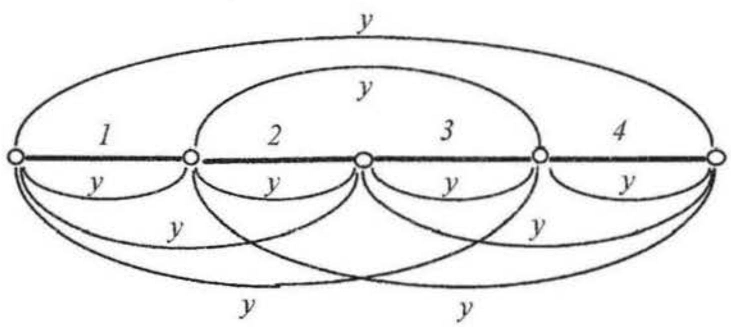

Figura 3: Ejemplo de Demanda Homogénea en el Recorrido

- *Estructura de Rutas Alimentadoras*: esta estructura corresponde a una en la que los pasajeros se suben en las paradas intermedias de la ruta y se bajan al final del trayecto (Figura 4), como ocurre típicamente con recorridos que alimentan el centro desde la periferia, a medida que los buses se acercan al final del trayecto, aumenta el número de pasajeros en su interior.

[1] Una carga totalmente uniforme para todos los arcos podría obtenerse si se supone que el recorrido es circular y por lo tanto el primer y último nodo coinciden.

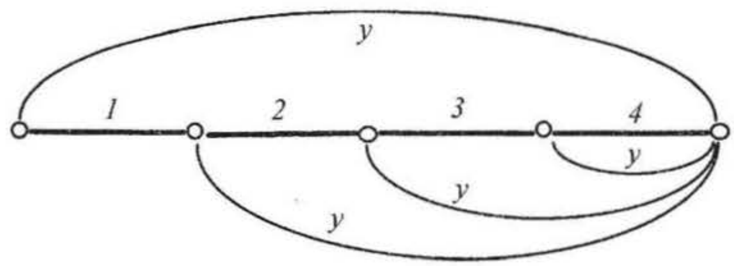

Figura 4: Ejemplo de Demanda de Rutas Alimentadoras

Cada una de ellas presenta diferentes requerimientos para la oferta del servicio, particularmente a nivel de tamaño de la flota y capacidad de los buses. A continuación se presenta en forma detallada el análisis de cada uno de estos tres casos expuestos.

2.1. Estructura de Demanda Uniforme

Para empezar el análisis definiremos un conjunto de variables que permitan describir las características del modelo:

Y : número total de viajes demandados sobre el recorrido por unidad de tiempo
T_v : tiempo de viaje sobre la ruta sin considerar las paradas intermedias
t : tiempo que tarda un pasajero en subir y bajar del bus
t_c : tiempo total del ciclo del recorrido de un bus
l : largo promedio de viaje de los pasajeros
L : largo total de la ruta recorrida por los vehículos de la flota que ofrece el servicio
v : velocidad de operación los vehículos sobre la ruta $\left(v = L/T_v\right)$.
k : capacidad de cada bus de la flota, en pasajeros por vehículo
B : tamaño de flota o número de vehículos en operación
f: frecuencia ofrecida por el operador del servicio

Cuando la demanda es uniforme, el número de pasajeros es el mismo sobre cualquier segmento de ruta e igual a $Y\frac{l}{L}$. Luego, la frecuencia demandada por los pasajeros está dada por:

$$f^d = \frac{Yl/L}{k} \tag{1}$$

Por otra parte, la frecuencia que es capaz de ofrecer el operador del servicio será la razón entre el tamaño de flota y el tiempo que tardan los buses en recorrer un ciclo completo:

$$f^o = \frac{B}{t_c} \tag{2}$$

donde el tiempo de ciclo t_c de un bus cualquiera de la flota es igual a la suma del tiempo de viaje sobre la ruta T_v más el tiempo consumido por el bus en las paradas realizadas durante el trayecto:

$$t_c = T_v + \frac{Y}{f^o} \tag{3}$$

Luego, introduciendo (2) en (3) y despejando el tiempo de ciclo se obtiene:

$$t_c = \frac{BT_v}{B - tY} \tag{4}$$

Para obtener una situación de equilibrio entre la oferta del servicio y la demanda, se debe igualar la frecuencia ofrecida a la frecuencia demandada: $f^o = f^d$. Por lo tanto, igualando (1) con (2) y despejando B se tiene que:

$$B = \frac{Yl}{kL} t_c \tag{5}$$

Introduciendo en (5) el valor obtenido para el tiempo de ciclo (4) se obtiene finalmente que el tamaño de flota requerido para satisfacer una demanda Y de viajes de largo l con buses de capacidad k funcionando llenos viene dado por:

$$B = Y\left(\frac{T_v l}{kL} + t\right) \tag{6}$$

o alternativamente, el número total de pasajeros que es posible transportar por unidad de tiempo es:

$$Y = \frac{Bk}{\left(\frac{l}{L} T_v + tk\right)} \tag{7}$$

La expresión (7) puede interpretarse como una relación básica de la función de producción del servicio. Ella expresa que la cantidad de pasajeros que es posible transportar por unidad de tiempo depende de una serie de variables, como el tamaño de flota, la capacidad de los vehículos, la velocidad de operación de los buses y del largo promedio de viaje de los pasajeros, así como también del tiempo que éstos tardan en subir y bajar de los buses.

2.2. Estructura de Demanda Homogénea

En este caso, la demanda total de viajes por unidad de tiempo, es igual a la suma de las demandas entre todos los pares origen-destino de la ruta, y puede calcularse de la siguiente manera:

$$Y = ny_1 + (n-1)y_2 + (n-2)y_3 + \cdots + 3y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n = \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)y_i \tag{8}$$

en donde y_i representa un viaje que incluye i arcos de la ruta y n al número total de arcos que componen el recorrido (ver Figura 3).

Suponiendo que la demanda entre cada par (i, j) del trayecto es la misma $(y_i = y \quad \forall\, i)$ de (8) se obtiene:

$$Y = \frac{n(n+1)}{2} y \tag{9}$$

Dada la estructura de la demanda por viajes entre distintos pares (i, j), la carga de pasajeros no será la misma sobre toda la ruta, como ocurre en el caso anterior de distribución uniforme. Luego, la restricción de capacidad del sistema será relevante para el (los) arco(s) de ruta que presente(n) el máximo número de pasajeros, que como se observa en la Figura 3, corresponderá al (los) arco(s) céntrico(s) del recorrido. Es simple demostrar que la carga en dicho(s) arco(s) es:

$$y^{max} = y\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \tag{10}$$

y para recorridos con un elevado número de arcos, de (9) y (10) se deduce que $y^{max} \approx \frac{Y}{2}$.

Si el recorrido es servido por una flota común de vehículos de capacidad k, la frecuencia demandada (suponiendo que n es grande, como ocurre en Santiago) vendrá dada por:

$$f^d = \frac{y^{max}}{k} = \frac{Y}{2k} \tag{11}$$

Del mismo modo, la frecuencia que puede ofrecer el operador de los buses, si cuenta con una flota B y cada vehículo demora t_c en un ciclo, está definida por $f^o = B/t_c$. Si queremos que los pasajeros que viajan sobre el arco de carga máxima puedan ser transportados, respetando la restricción de capacidad de los vehículos de la flota, la frecuencia ofrecida por los operadores debe proveer una capacidad total suficiente sobre dicho arco, lo que se logra si:

$$\frac{B}{t_c} = \frac{Y}{2k} \tag{12}$$

Reemplazando la expresión t_c de (12) en (4) y despejando B se obtiene:

$$B = Y\left(\frac{T_v}{2k} + t\right) \tag{13}$$

o alternativamente, el número de pasajeros que es posible transportar por unidad de tiempo es:

$$Y = \frac{Bk}{\left(\frac{T_v}{2} + kt\right)} \tag{14}$$

La expresión (14) tiene la misma interpretación que (7). Sin embargo, al comparar (14) con (7) se observa una diferencia en el denominador: mientras que en (14) el primer término del denominador es $\frac{1}{2}T_v$ en (7) es $\frac{l}{L}T_v$. Dado que el modelo de demanda uniforme supone que todos los viajeros recorren la misma distancia l y que todos los arcos poseen el mismo largo, si el recorrido está compuesto por más de dos arcos $(n > 2)$, se cumple que $\frac{1}{2} > \frac{l}{L}$. Es decir, *ceteris paribus* la misma flota será capaz de llevar más pasajeros en el caso de demanda uniforme que en el caso de demanda homogénea. Se observa además que en el caso de demanda homogénea los buses operarán a capacidad sólo en los arcos céntricos, mientras que en los arcos periféricos existirá un exceso de capacidad.

2.3. Estructura de Rutas Alimentadoras

En este último caso, la restricción de capacidad de la flota viene dada por la demanda que se debe satisfacer en el último arco de la ruta, ya que es éste el que presenta la mayor carga de pasajeros (ver Figura 4). Al haber un total de n arcos a lo largo de la ruta, el último arco, que será el más cargado, tendrá un total de $y^{max} = ny$ pasajeros. Este valor corresponde además en este caso a la demanda total Y sobre la ruta. En consecuencia, considerando las mismas variables de los casos anteriores, se tendrá una frecuencia demandada igual a:

$$f^d = \frac{ny}{k} = \frac{Y}{k} \tag{15}$$

La frecuencia ofrecida y el tiempo de ciclo poseen la misma expresión que en los casos anteriores. Resolviendo de manera análoga, se obtiene que el tamaño de flota necesario para transportar Y pasajeros por unidad de tiempo es:

$$B = Y\left(\frac{T_v}{k} + t\right) \tag{16}$$

y alternativamente, el número de pasajeros que se puede transportar con una flota B de buses de capacidad k es:

$$Y = \frac{Bk}{T_v + kt} \tag{17}$$

En consecuencia, mediante (17) se observa que el tamaño de flota requerido para transportar la misma demanda total de viajes Y, es mayor que en los dos casos anteriores (14) y (7). Esto se debe evidentemente a que, dada la restricción de capacidad impuesta, que obliga a ofrecer una frecuencia suficiente para el arco más cargado, mientras menos uniforme sean las cargas mayor será el tamaño de flota requerido.

Por lo tanto, de las expresiones (7), (14) y (17) se deduce que servicios que enfrenten demandas más dispersas, requerirán *ceteris paribus* de un mayor número de buses para alcanzar un determinado nivel de producción.

3. DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

En la sección anterior se estudió la manera en que afectan las distintas estructuras de demanda en un recorrido a la determinación del tamaño de flota y frecuencia del servicio. Igualando la frecuencia que es capaz de ofrecer el operador con la frecuencia demandada por los pasajeros, se dedujo la relación básica de producción tiene la forma general:

$$Y = \frac{Bk}{\alpha T_v + kt} \tag{18}$$

El parámetro α $(0 < \alpha \leq 1)$ dependerá de la estructura de la demanda que enfrente el operador del servicio. Se demostró en la sección anterior que:

- $\alpha = l/L$ para una estructura de demanda uniforme
- $\alpha = 1/2$ para una estructura de demanda homogénea
- $\alpha = 1$ para una estructura de rutas alimentadoras

Sin embargo, la expresión (18) no basta para definir completamente la producción de servicios de transporte público. Existen dos factores adicionales que son fundamentales en la provisión del servicio, y no están representados en (18), como son la mano de obra y los terminales que deben usar los buses para poder operar una línea.

En consecuencia, considerando como insumos relevantes en la producción del servicio factores como la mano de obra (H) y el terminal (M), además de la flota de vehículos (B), es posible plantear una función de producción de una línea de buses.

Para poder representar el proceso de producción de una línea usaremos una función de producción de *coeficientes fijos* o *proporciones constantes* (Leontief, 1946). Esta función está caracterizada por que la *elasticidad de sustitución* (Arrow *et al*., 1961) entre los diferentes factores es nula, razón por la cual las isocuantas entre dos insumos adoptan la forma de escuadra (ángulo recto) como se muestra en la Figura 5:

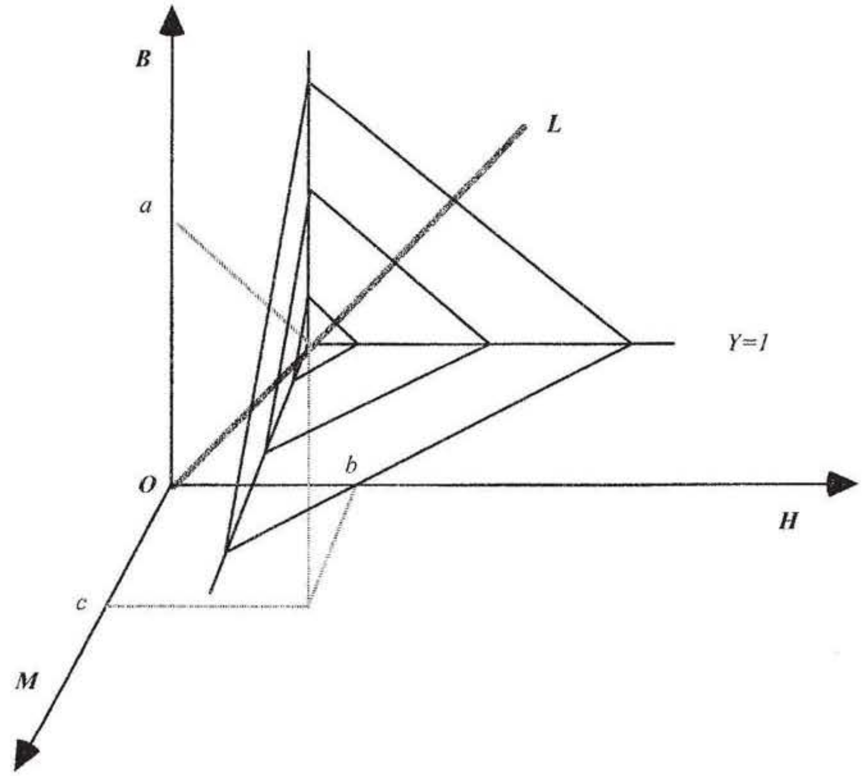

Figura 5: Función de Coeficientes Fijos Para Tres Factores Productivos

Por lo tanto, la relación óptima entre los factores utilizados será siempre fija. La operación de la empresa, al ser caracterizada por esta función, se encontrará siempre a lo largo de un rayo que parte del origen en el que el cuociente entre los distintos factores sea constante. Lo anterior implica que producir en otro punto que no sea el vértice de las isocuantas será técnicamente ineficiente, ya que podría obtenerse el mismo nivel de producción con menos factores moviéndose a lo largo de la isocuanta hacia el vértice. En consecuencia, dada la expresión (19), la utilización óptima de cada factor productivo se dará cuando $Y = \frac{B}{a} = \frac{H}{b} = \frac{M}{c}$. Desde este punto de vista, el tamaño de flota B, la mano de obra H y la capacidad de terminales M son factores perfectamente complementarios.

La expresión analítica de la función de producción es la siguiente:

$$Y \leq \min\left\{\frac{B}{a};\frac{H}{b};\frac{M}{c}\right\} \tag{19}$$

$$H = \eta B \tag{20}$$

$$M = \begin{cases} \overline{M} & \forall \ B \leq \overline{B} \\ \overline{M} + m\left(B - \overline{B}\right) & \forall \ B > \overline{B} \end{cases} \tag{21}$$

$$k \leq K \tag{22}$$

H : cantidad de mano de obra necesaria (principalmente choferes)
M : cantidad de terminal de operación (por ejemplo medida en metros cuadrados necesarios para operar una flota de tamaño B)
$\overline{M}$: tamaño mínimo de terminal, aunque se operara una flota de un solo bus
ϕ_h : salario por unidad de tiempo del personal o mano de obra (choferes, cobradores, etc.)
ϕ_m : precio por unidad de tiempo de la unidad de terminal $(\$/\text{hr}-\text{m}^2)$
η: número mínimo de empleados necesarios para operar un bus (por ejemplo $\eta=1$ si sólo se requiere chofer o $\eta=2$ si se requiere chofer y cobrador separadamente, o se opere en dos turnos)
m : capacidad marginal de terminal requerida por cada bus adicional
K: capacidad máxima factible de un bus (pasajeros por bus)
a : cantidad de buses necesaria para producir una unidad de Y
b : cantidad de mano de obra necesaria para producir una unidad de Y
c : unidades de capacidad de terminal necesarias para producir una unidad de Y

La restricción (20) indica el número de empleados que son necesarios para operar la flota dada en que cada bus requiere un número fijo de η empleados.

La relación (21) representa la capacidad necesaria de terminales dependiendo del tamaño de flota. Existe un tamaño mínimo de terminal $\overline{M}$ para poder operar, cuya capacidad se supone igual a la requerida para operar $\overline{B}$ buses. Si el tamaño de flota es $B>\overline{B}$, entonces será necesario aumentar en m unidades la capacidad del terminal por cada bus adicional.

La expresión (22) representa la capacidad o tamaño máximo de los buses de acuerdo a la tecnología disponible. Evidentemente, por razones de tecnología y por capacidad de las vías, los buses no pueden exceder de cierto tamaño límite.

De (19), y usando (18), se obtiene que:

$$a=\frac{\alpha T_v+kt}{k} \tag{23}$$

$$b=\eta\left(\frac{\alpha T_v+kt}{k}\right) \tag{24}$$

$$c=m\left(\frac{\alpha T_v+kt}{k}\right) \tag{25}$$

Por lo tanto, introduciendo (23), (24) y (25) en (19), la función de producción se puede expresar como:

$$Y=\min\left\{\frac{Bk}{\alpha T_v+kt};\frac{Hk}{\eta(\alpha T_v+kt)};\frac{Mk}{m(\alpha T_v+kt)}\right\} \tag{26}$$

$$M = \begin{cases} \overline{M} & \forall\, B < \overline{B} \\ \overline{M} + m\left(B - \overline{B}\right) & \forall\, B \geq \overline{B} \end{cases}$$

$$k \leq K$$

La solución de largo plazo al problema de producción planteado en la función (26) está representada gráficamente por la recta OL de la Figura 5, que corresponde al lugar geométrico de todos los puntos eficientes de producción, es decir, a la senda de expansión de la empresa, que corresponde a una línea recta que parte del origen.

4. RENDIMIENTOS A ESCALA EN LA PROVISIÓN DEL SERVICIO

Los rendimientos a escala (ε) determinan cuál es la variación porcentual de la producción Y al variar en una misma escala λ todos los factores productivos. Analíticamente, este concepto se puede escribir como:

$$\varepsilon = \frac{\partial Y / Y}{\partial \lambda / \lambda} \tag{27}$$

expresión que puede ser interpretada como la elasticidad de la cantidad producida respecto a la cantidad de factores usados. Dado que (27) refleja la respuesta del output al variar equiproporcionalmente todos los factores (Allen, 1938), implicará que si hay rendimientos decrecientes a escala $\varepsilon < 1$; por otra parte, para que haya rendimientos constantes $\varepsilon = 1$, y por último se tiene que los rendimientos crecientes se darán cuando $\varepsilon > 1$.

Para el análisis de rendimientos a escala es necesario estudiar la expresión (26), que relaciona la cantidad producida con el tamaño óptimo de flota, la cantidad óptima de mano de obra y la capacidad óptima de terminales.

Sin embargo, para las condiciones óptimas de producción (recta L en la Figura 5) se obtiene una relación directa entre sus tres componentes, ya que $Y = \dfrac{Bk}{\alpha T_v + kt} = \dfrac{Hk}{\eta\left(\alpha T_v + kt\right)} = \dfrac{Mk}{m\left(\alpha T_v + kt\right)}$, y basta con analizar sólo uno de los factores productivos para determinar los rendimientos a escala en el largo plazo. El análisis de rendimientos se realizará con B, por lo que se analizará la relación dada por $Y = \dfrac{Bk}{\alpha T_v + kt}$. Esta expresión, que es del tipo $Y = Y(B, k, T_v, t)$, es una función de producción denominada *hedónica*, en la que la capacidad k de los vehículos, el tiempo de viaje T_v, y el tiempo t de subida y de bajada a un bus, no son propiamente factores de producción (como lo es el tamaño de flota B), sino que son atributos de la tecnología y condiciones de operación.

No obstante, si no existe congestión, T_v es constante para el operador, al igual que t, por lo que no son relevantes en el nivel de producción; por otra parte, en presencia de congestión, el tiempo de viaje T_v dependerá del número de vehículos de tal forma que $T_v = T_v(B)$.

Por lo tanto, esta función de producción hedónica dependerá directamente de B y de k, variables que sí puede modificar el operador, por lo que $Y = Y(B,k)$. El tratamiento que se le puede dar al atributo k es similar al que se le dé a B en cuanto a su incidencia sobre los rendimientos a escala y la sustitución entre ambos (B y k). De hecho, es posible definir isocuantas de producción para ambos.

Diferenciando $Y = Y(B,k)$, se deduce que la expresión de rendimientos a escala (27) queda definida de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \varepsilon_{Y,B} + \varepsilon_{Y,k} \tag{28}$$

Los parámetros $\varepsilon_{Y,i}$ corresponden a la elasticidad producto del factor i que se define como la razón entre la variación porcentual del producto y la variación porcentual del factor i cuando las cantidades de todos los otros factores permanecen constantes. Esto último es equivalente a la razón entre la productividad marginal y la productividad media del factor i. Para nuestro caso, se tiene que:

$$\varepsilon_{Y,B} = \frac{B}{Y}\frac{\partial Y}{\partial B} = \frac{\partial Y / \partial B}{Y / B} = \frac{P^B_{MG}}{P^B_{ME}} \tag{29}$$

$$\varepsilon_{Y,k} = \frac{k}{Y}\frac{\partial Y}{\partial k} = \frac{\partial Y / \partial k}{Y / k} = \frac{P^k_{MG}}{P^k_{ME}} \tag{30}$$

Si consideramos la existencia de congestión, $T_v = T_v(B)$, y además $\frac{\partial T_v}{\partial B} = T_v' > 0$ y $\frac{\partial^2 T_v}{\partial B^2} = T_v'' > 0$. Luego, las productividades media y marginal de los vehículos (B) se obtienen a partir de $Y = \frac{Bk}{\alpha T_v + kt}$ y tienen las siguientes expresiones:

$$P^B_{MG} = \frac{\partial Y}{\partial B} = \frac{k(\alpha T_v + kt - \alpha B T_v')}{(\alpha T_v + kt)^2} \tag{31}$$

$$P^B_{ME} = \frac{Y}{B} = \frac{k}{\alpha T_v + kt} \tag{32}$$

Si no existiera congestión, los productos medio (31) y marginal (32) del tamaño de flota serían iguales y constantes, como se observa si se reemplaza $T_v' = 0$ en (31), por lo que la elasticidad producto de los buses (29) toma el valor uno $(\varepsilon_{Y,B} = 1)$. Sin embargo, si existe congestión, tanto (31) como (32) son decrecientes. Esto último se debe a que, como $T_v' > 0$ y $T_v'' > 0$, el denominador de (32) aumentará aceleradamente al aumentar B, por lo que el producto medio de B se hace decreciente; al ser decreciente el producto medio, por definición el producto marginal será menor. Luego, la elasticidad producto de los buses **cuando existe congestión** será menor que uno:

$$\varepsilon_{Y,B} = 1 - \frac{\alpha B T_v'}{\alpha T_v + kt} < 1 \tag{33a}$$

De hecho, si el nivel de congestión es muy grande, como ocurre en muchos corredores viales de ciudades de países en desarrollo, en que los buses comparten la infraestructura con otros vehículos,

$\varepsilon_{Y,B}$ es negativo si se cumple que:

$$T_v' > \frac{(\alpha T_v + kt)}{\alpha B} \qquad (33b)$$

En tal caso, la productividad marginal de B sería negativa, como puede comprobarse fácilmente introduciendo (33*b*) en (31). Es interesante notar también que servicios que enfrenten una demanda más dispersa (mayor valor de α) tendrán una menor productividad. Las características analizadas de la relación entre Y y B se resumen en las Figuras 6 y 7.

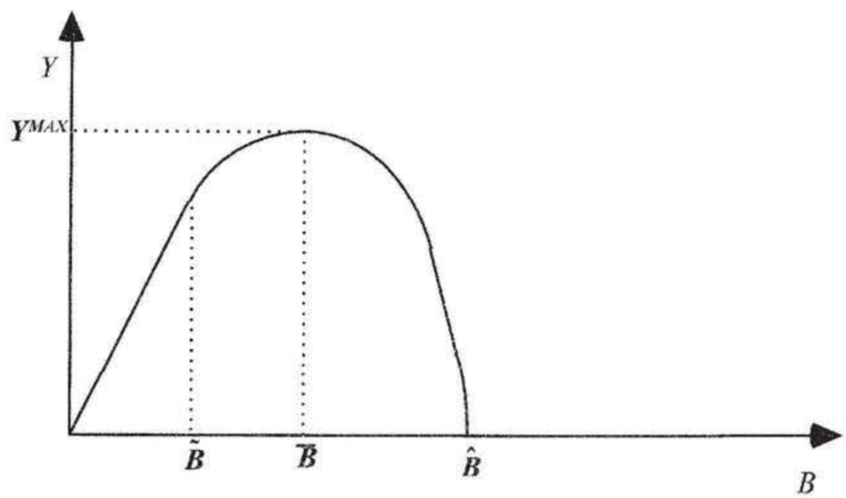

Figura 6: Producto Total vs Tamaño de Flota

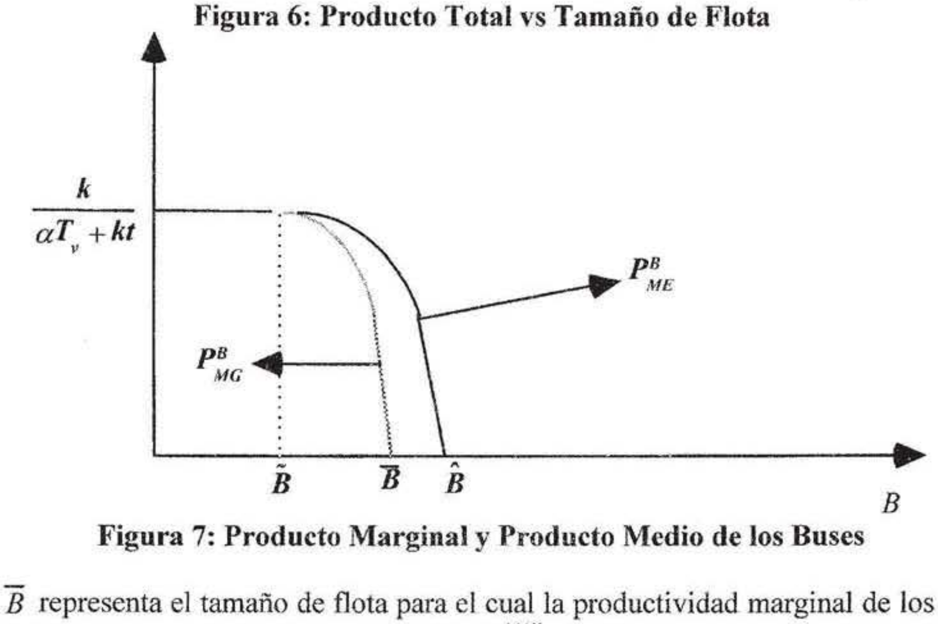

Figura 7: Producto Marginal y Producto Medio de los Buses

El valor de $\overline{B}$ representa el tamaño de flota para el cual la productividad marginal de los buses es cero y en consecuencia se tiene un nivel de producción Y^{MAX}. Igualando a cero (31) y usando la expresión $Y = \frac{Bk}{\alpha T_v + kt}$, se obtiene que $Y^{MAX} = \frac{k}{\alpha T_v'}$. Evidentemente, mientras mayor sea el nivel de congestión, mayor será el valor de T'_v y menor será entonces Y^{MAX}. Nótese que si nunca existiera congestión $(T'_v = 0, \forall B)$, el valor de Y^{MAX} sería no acotado, ya que la cantidad de viajes producidos podría aumentarse ilimitadamente aumentando el tamaño de flota B. El parámetro $\hat{B}$ es el tamaño de flota para el cual se estanca el flujo y la velocidad de operación es cero.

Dadas las características de la función de producción (26), las conclusiones obtenidas para B son también aplicables a (H/η) y (M/m). Sin embargo, para el caso de los terminales es necesario realizar un análisis especial cuando se cumple que $B < B$ en (26). Este caso no será abordado en detalle aquí por falta de espacio.

Por otra parte, podemos analizar *ceteris paribus* la variación de la cantidad Y producida con el tamaño k de los vehículos usados. Utilizando nuevamente $Y = \dfrac{Bk}{\alpha T_v + kt}$ tenemos que las productividades media y marginal de k son respectivamente:

$$P^k_{MG} = \frac{\partial Y}{\partial k} = \frac{\alpha B T_v}{(\alpha T_v + kt)^2} \tag{34}$$

$$P^k_{ME} = \frac{Y}{k} = \frac{B}{\alpha T_v + kt} \tag{35}$$

Se observa que tanto (34) como (35) son decrecientes en k, y en consecuencia, $P^k_{ME} > P^k_{MG}$. Esto último se cumple siempre, **independiente si hay o no congestión**. Notar que en ausencia de congestión, un aumento de B aumenta la productividad de k, ya que ambos efectos se fortalecen mutuamente. Pero si existe congestión, un aumento en B produce un aumento proporcionalmente mayor en T_v, y de acuerdo con (34) y (35), se reduciría también la productividad de k, ya que se valora en menor forma un aumento en k para aumentar el número de viajes.
Haciendo el cuociente entre (34) y (35) se obtiene:

$$\varepsilon_{Y,k} = \frac{\alpha T_v}{\alpha T_v + kt} < 1 \tag{36}$$

Por lo tanto, se observa que la elasticidad producto de la capacidad de los buses es **siempre** menor que uno, independiente si existe o no congestión en el sistema, lo que es consistente con $P^k_{ME} > P^k_{MG}$. Esto se debe a que, al aumentar la capacidad de los vehículos, cada bus transportará más pasajeros y por lo tanto utilizará más tiempo durante las paradas del trayecto. Luego, cada bus podrá dar proporcionalmente menos vueltas en un mismo período de tiempo, tornándose menos productivo para la empresa. Sin embargo, a diferencia de lo visto en (33), los rendimientos de k no son nunca negativos. Es interesante notar además que a medida que aumenta la congestión, T_v aumenta y $\varepsilon_{Y,k}$ tiende al valor uno; esto es consecuencia sin embargo de que tanto las productividades medias como marginales tienden a cero. Se observa también que al aumentar k, (36) disminuye, por lo que la productividad marginal de k tiende a cero más rápidamente que la productividad media, lo que se corrobora en las expresiones (34) y (35).

Sin embargo, dado que $k \leq K$, el máximo valor que puede tomar Y al aumentar k es $Y(K) = \dfrac{BK}{\alpha T_v + Kt}$.
Esto también implica que tanto la productividad marginal (34) como media (35) de k no llegan a valer cero, y tampoco la elasticidad producto (36). Por otra parte, como la productividad marginal de k dada por (34) es siempre positiva, la función Y será siempre creciente en k y además cóncava, ya que (34) también es decreciente en k.

Estas últimas propiedades de la función $Y = \dfrac{Bk}{\alpha T_v + kt}$ se pueden ver representadas en las Figuras 8 y 9.
La asíntota de la Figura 8 para el valor de $Y = \dfrac{B}{t}$ representa el valor límite que puede alcanzar Y cuando la capacidad k aumenta indefinidamente (para valores de B, T_v y t dados), razón por la cual la elasticidad producto de la capacidad es decreciente, como ya se justificó en un párrafo anterior.

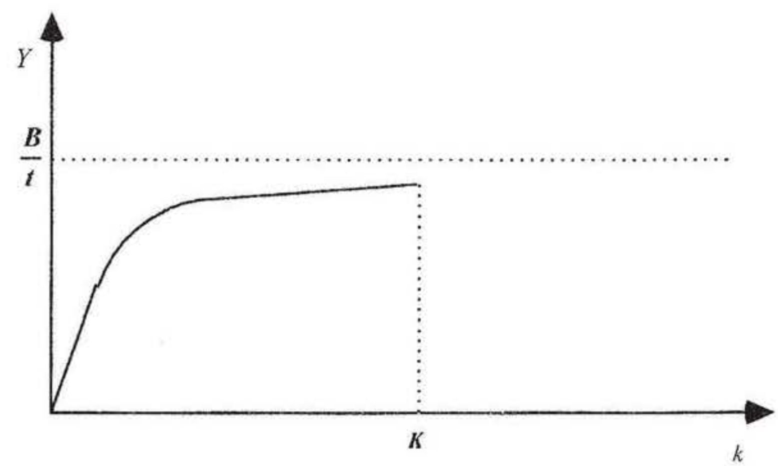

Figura 8: Producto Total vs Capacidad de los Vehículos

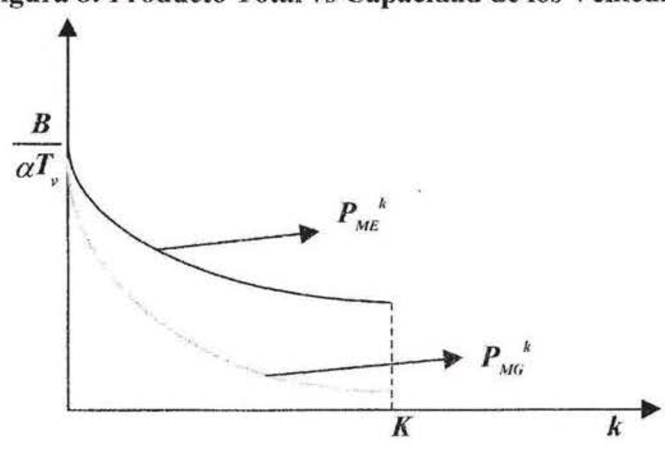

Figura 9: Producto Medio y Marginal de la Capacidad de los Vehículos

En la Figura 9 se corrobora que la congestión reduce las productividades media y marginal de la capacidad, ya que $\frac{B}{\alpha T_v}$ toma un menor valor.

Continuando con el análisis, para determinar si hay o no rendimientos a escala en la provisión de servicios de transporte público de pasajeros, se debe analizar la expresión (28), ya que no basta con que las productividades marginales dadas por (31) y (34) sean decrecientes. Introduciendo (33) y (36) en (28) se obtiene:

$$\varepsilon = 1 - \frac{(BT_v' - T_v)}{T_v + \frac{kt}{\alpha}} \tag{37}$$

Si no existiera congestión, al ser $T_v' = 0$ en (37), existirían siempre rendimientos crecientes a escala, ya que $\varepsilon > 1$. No obstante, como al existir congestión $T_v' > 0$, y además T_v' es creciente en B, a partir de cierto nivel de congestión se cumplirá que $BT_v' > T_v$, y en consecuencia, en (37) se comprueba que $\varepsilon < 1$. Notar que aquí podría obtenerse $\varepsilon < 0$ si se cumple que:

$$T_v' > \frac{1}{B}\left(2T_v + \frac{kt}{\alpha}\right) \tag{38}$$

Por lo tanto, la existencia congestión vehicular será un factor clave en cuanto a la presencia o no de rendimientos a escala en la provisión de servicios de transporte público urbano de superficie. Es importante notar que del análisis anterior se deduce que el nivel de congestión necesario para que los rendimientos se tornen decrecientes, es menor a medida que crece el valor de B (tamaño de flota). De (37) se puede también deducir que si la congestión es elevada $(BT_v' > T_v)$, aumentar k ayuda a que los rendimientos decrezcan menos. Sin embargo, cuando la congestión es baja $(BT_v' < T_v)$, aumentar k reduce el grado de rendimientos a escala.

5 CONCLUSIONES

El desarrollo analítico expuesto en el presente documento demuestra que tanto la dispersión de la demanda que enfrente un determinado servicio de buses como el nivel de congestión existente, son fundamentales en determinar el grado y tipo de rendimientos a escala que presenta la operación del servicio. Se demostró que una mayor dispersión de la demanda dentro del trayecto reduce la productividad de los factores involucrados, y además puede afectar el grado de rendimientos a escala existente. Sin embargo, va a ser el nivel de congestión quien determine la presencia o no de rendimientos a escala en la provisión de servicios de buses. Esto se debe a que un elevado nivel de congestión puede reducir la productividad de los factores utilizados de tal forma que se generen rendimientos decrecientes a escala.

Es por lo tanto interesante notar que sólo la operación de corredores segregados no congestionados podría evitar los rendimientos decrecientes en la producción de servicios de transporte público de superficie. Además, es importante señalar que desde una perspectiva social, la producción del servicio debiera incorporar recursos aportados por los usuarios (tiempo).

REFERENCIAS

ALEEN, R. G. D. (1938). Mathematical analysis for economists, **Nueva York, St. Martin's Press**, 504-509.

ARROW, K.; H. CHENERY; B. MINHAS y R. SOLOW (1961). Capital-labour substitution and economic efficiency. **Review of Economics and Statistics, ago**, 225-250.

CHERWONY, W. y S. MUNDLE (1978). Peack-base cost allocation models, **Transportation Research Record, 663**, 52-56.

BERECHMAN, J. (1983). Costs, economies of scale and factor demand in bus transport. **Journal of Transportation Economic and Policy, 17**, 7-23.

JANSSON, J. O. (1980). A simple bus line model for optimization of service frecuency and bus size. **Journal of Transportation Economic and Policy, 14**, 53-80.

JARA-DÍAZ, S. y A. GSCHWENDER (1997). Tarifas óptimas en transporte público programado, **Actas del VIII Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte**, 265-278.

LEONTIEF, W. (1946). The pure theory of the guaranteed annual wage contract. **Journal of Political Economy**.

MOHRING, H. (1972). Optimization and scale economies in urban bus transportation. **American Economic Review, 62**, 591-604.

OBENG, K. (1984). Bus cost, productivity and factor substitution. **Journal of Transportation Economic and Policy, 19**, 183-203.

TAUCHEN, H.; F. FRAVEL y G. GILBERT (1983). Cost structure of the intercity bus industry. **Journal of Transportation Economic and Policy, 17**, 25-48.

VITON, P. (1992). Consolidation of scale and scope in urban transit. **Regional Science and Urban Economics, 22**, 25-49.

WABE, S. J. y O. B. COLES (1975). The short and long run cost of bus transport in urban areas. **Journal of Transportation Economic and Policy, 9**, 127-140.

XU, K.; R. WINDLE; C. GRIM y T. CORSI (1994). Re-evaluting returns to scale in transport. **Journal of Transportation Economic and Policy, sept**, 275-286.