OPTIMO SOCIAL PARA UN SISTEMA DE TRANSPORTE: DEFINICION ALTERNATIVA DE LA FUNCION DE COSTOS MARGINALES

Nacim Mauricio Alamo E.
Departamento de Ingeniería de Transporte,
Pontificia Universidad Católica de Chile
Casilla 306, Cod. 105, Santiago 22, Chile
Tel: 686 5899; Fax: 553 0281
e-mail: nmalamo@puc.cl

RESUMEN

Cuando se está interesado en encontrar las condiciones óptimas de operación de un sistema de transporte, pueden interceptarse las curvas de demanda por transporte con la curva de Costos Marginales del sistema de transporte. De esta manera se determinan los viajes generados y el precio que debe hacerse percibir a los usuarios para que se maximice le beneficio social generado por transporte.

Hemos encontrado que, para un sistema de transporte dado, la intersección de la función de Costos Marginales del sistema con la curva de demanda, no provee el óptimo social. El sistema de transporte considerado consiste en un par origen destino y dos carreteras para viajar entre él. El objetivo de este documento es encontrar una función alternativa de Costos Marginales del sistema que, al ser interceptada con la función de demanda, entregue las condiciones óptimas de operación del sistema (viajes generados entre el par que maximizan el beneficio social).

Para lo anterior se formula un modelo de programación matemática que entrega los flujos que maximizan el beneficio social, se demuestra que su solución óptima es siempre única y se entregan sus condiciones de optimalidad. Luego, a partir de ellas se encuentra una función alternativa de Costos Marginales del sistema que permite encontrar las condiciones óptimas de operación del sistema de transporte considerado. Se incluye un ejemplo que ilustra las diferencias entre la utilización de la función de Costos Marginales del sistema y la función alternativa para los Costos Marginales del Sistema.

El resultado obtenido se extiende al caso de un sistema de transporte con múltiples pares origen destino, múltiples rutas que los unen y varios arcos formando cada ruta.

1. INTRODUCCION

La modelación es una potente herramienta para predecir el comportamiento de un sistema cualquiera, y en particular uno de transporte, ante el cambio en alguna componente del mismo. Como caso particular de lo anterior, será siempre interesante usar la modelación para conocer cuál debe ser el comportamiento de los usuarios de un sistema de transporte, para que la operación de éste sea óptima desde el punto de vista social. Ante esto, es fundamental que la formulación del modelo sea la adecuada.

Consideramos un sistema de transporte constituido por sólo un par Origen Destino (O-D), con dos caminos para viajar entre él y con una demanda dependiente de los costos de viaje entre el par. Para encontrar las condiciones óptimas de operación del sistema (viajes generados entre el par O-D que maximizan el beneficio social, que en adelante llamaremos óptimo social), se puede igualar la función de demanda con la de Costos Marginales del sistema. Luego se pueden encontrar los flujos por cada carretera de acuerdo a las funciones de Costos Marginales respectivas. Hemos encontrado que la función de Costos Marginales del sistema, al ser interceptada con la demanda, no entrega el óptimo social. Este documento desarrolla una definición alternativa para la función de Costos Marginales del sistema y demuestra que esta entrega siempre el óptimo social.

El capítulo dos presenta la definición del problema a resolver. En el capítulo tres se define la función de Costos Marginales del sistema, además de los defectos que ella presenta. En el capítulo cuatro se formula el problema de optimización que entrega el óptimo social, se demuestra que este admite una única solución óptima y se encuentran sus condiciones de optimalidad. Al final de este se presenta la definición alternativa para los Costos Marginales del Sistema. Finalmente, el capítulo cinco presenta un ejemplo numérico y el seis las conclusiones y extensiones.

2. DEFINICION DEL SISTEMA DE TRANSPORTE

Se tiene un sistema de transporte compuesto por una red con sólo un par O-D, dos carreteras (arcos) entre dicho par y una demanda por viajes entre O y D. Esta se modela mediante una función inversa de demanda $P = P(X)$ donde X es el flujo entre O y D y P es el costo de transporte entre O y D. La situación es representada en la Figura 1.

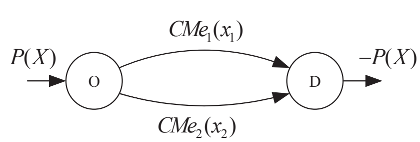

Figura 1: Gráfica del Sistema de Transporte Considerado

Cada carretera tiene asociada una función de Costos Medios $CMe_i = CMe_i(x_i)$, i = 1, 2, donde x_i es flujo en la carretera i y CMe_i es el costo que percibe cada viajero que utiliza la carretera i. El equilibrio de usuarios se produce de acuerdo al Primer Principio de Wardrop, pero para encontrar el óptimo social, puede[1] ser útil contar con una función de Costos Marginales del sistema.

3. DEFINICION DE LA FUNCION DE COSTOS MARGINALES DEL SISTEMA2

Supondremos que $CMe_i(x_i)$, i = 1, 2 son no-decrecientes, ya que como se dijo antes, representan los costos percibidos por los usuarios al usar cada carretera y estos deben a lo sumo permanecer constantes en la medida que el flujo aumente. En términos matemáticos esto es:

$$\frac{\partial CMe_i(x_i)}{\partial x_i} \geq 0, i = 1,2 \tag{1}$$

Las funciones de Costos Marginales de cada carretera se definen como la derivada de los costos totales de operación de la carretera respecto del flujo. Matemáticamente esto es:

$$CMg_i(x_i) = \frac{\partial (CMe_i(x_i) \cdot x_i)}{\partial x_i} = CMe_i(x_i) + x_i \cdot \frac{\partial CMe_i(x_i)}{\partial x_i}, \qquad i = 1,2 \tag{2}$$

Se define también la función de Costos Medios del sistema[3] como la suma horizontal de las funciones de Costos Medios de cada una de las carreteras. En la Figura 2 se puede ver de manera gráfica la obtención de dicha función.

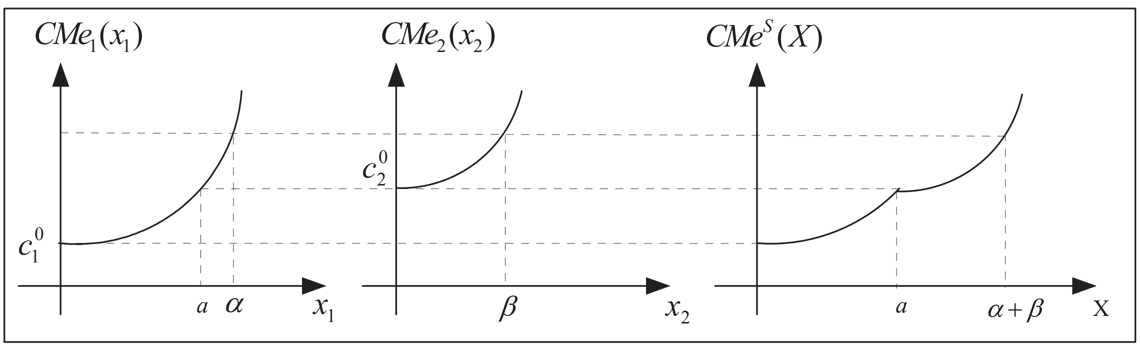

Figura 2: Obtención Gráfica de la Función de Costos Medios del Sistema

Luego, para calcular la función de Costos Marginales del sistema, se hace como si este fuera una carretera única cuya función de Costos Medios es $CMe^S(X)$ (dada por el gráfico) que se calcula como se explicó anteriormente, es decir:

$$CMg^S(X) = CMe^S(X) + X \cdot \frac{\partial CMe^S(X)}{\partial X}, \qquad X = x_1 + x_2 \tag{3}$$

[1] Al tener el problema de optimización planteado, no es necesaria la función de Costos Marginales del sistema para encontrar los flujos que maximizan el beneficio social.
[2] Para detalles sobre los desarrollos de esta sección, ver Fernández (1997).
[3] En rigor los Costos Medios del Sistema no se definen, sino que es la función que al ser igualada a la función de demanda, entrega los viajes consistentes con el Primer Principio de Wardrop.

Ahora, dada la forma de la función $CMe^S(X)$ – que no es continuamente diferenciable en todos los puntos de su dominio – la función $CMg^S(X)$, será discontinua. La Figura 3 muestra una gráfica aproximada para ella.

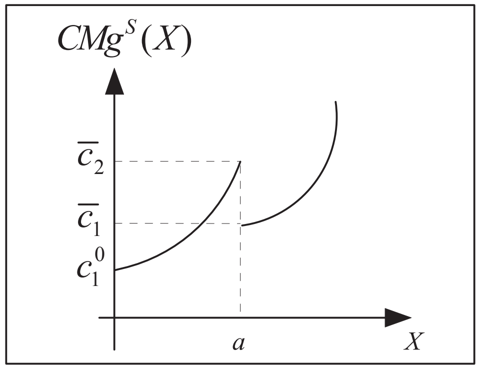

Figura 3: Gráfica de la Función de Costos Marginales del Sistema

La primera parte de la curva ($X \leq a$) coincide con la función de Costos Marginales de la carretera 1[4]. Se puede demostrar – ver Anexo A – que la gráfica anterior es correcta en el sentido que $\overline{c}_2 \geq \overline{c}_1$. Como sabemos, una vez que tenemos la función de Costos Marginales del sistema, para encontrar flujo que viaja entre el par O-D que maximiza el beneficio social (óptimo social) se igualan las funciones de demanda $P = P(X)$ y la de Costos Marginales del sistema $CMg^S = CMg^S(X)$, lo que puede presentar problemas como los que se ilustran en la Figura 4.

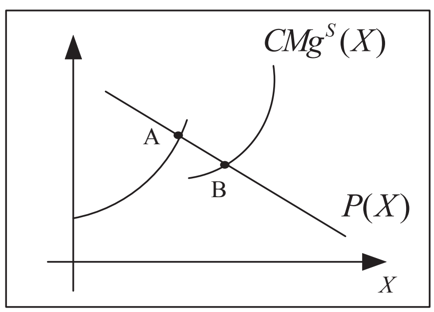

Figura 4: Intersección de la Demanda con la Curva de Costos Marginales

¿Cuál es el óptimo social: A o B? Esto nos plantea las siguientes interrogantes. ¿Puede demostrarse que A es un óptimo local y B un óptimo global o viceversa? ¿Pueden darse situaciones en que el óptimo global sea A, produciéndose menos viajes que en B? Explicaremos que la primera pregunta no es válida puesto que la función de Costos Marginales del sistema no permite encontrar el óptimo global. Así, las demás interrogantes ya no son válidas.

[4] Estamos implícitamente suponiendo que los Costos Medios (y Marginales) a flujo libre de la carretera 1 son menores que los Costos Medios (y Marginales) a flujo libre de la cartera 2. A flujo libre el Costo Medio es igual al Costo Marginal (es decir, $CMe(0) = CMg(0)$). Esto se debe a que $CMg(x) = CMe(x) + x \cdot \partial CMe(x)/\partial x$. Para la gráfica se supone también que las funciones de Costos Medios son estrictamente crecientes y convexas.

4. FUNCION ALTERNATIVA DE COSTOS MARGINALES DEL SISTEMA

Dado que buscamos el óptimo social, comenzamos con formular el problema de optimización, encontrar sus condiciones de optimalidad y demostrar que su solución óptima es única.

4.1. Formulación Matemática

Buscamos maximizar el beneficio social. Recordemos que existe una demanda por viajes $P = P(X)$, $X = x_1 + x_2$, donde X es el flujo entre O y D y x_i es el flujo en la carretera i (i = 1, 2). El beneficio social (BS) es:

$$BS(x_1,x_2) = \underbrace{\int_0^X P(t)dt}_{U} - \underbrace{\left\{x_1 \cdot CMe_1(x_1) + x_2 \cdot CMe_2(x_2)\right\}}_{V}, \tag{4}$$

donde U representa la disposición a pagar (por ir entre O y D) de X viajeros y V representa los costos totales en el sistema cuando los flujos en las carreteras 1 y 2 son x_1 y x_2 respectivamente. Por otro lado, las restricciones del problema son:

$$X = x_1 + x_2 \tag{5}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{6}$$

De esta manera, utilizando (4), (5) y (6), el problema de optimización es:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\{X,x_1,x_2\}}{Max} \ \int_0^X P(t)dt - \left\{x_1 \cdot CMe_1(x_1) + x_2 \cdot CMe_2(x_2)\right\} \\ s.a. \qquad X = x_1 + x_2, \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} PO$$

, que es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\{x_1,x_2\}}{Min} \ Z(x_1,x_2) = -\int_0^{x_1+x_2} P(t)dt + \left\{x_1 \cdot CMe_1(x_1) + x_2 \cdot CMe_2(x_2)\right\} \\ s.a. \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} POE$$

Nos abocamos ahora a demostrar que POE admite siempre una única solución óptima[5].

4.2. Unicidad de la Solución Optima

Sabemos que si D (dominio de restricciones de POE) es convexo y Z(·) (función objetivo de POE) es estrictamente convexa, entonces POE admite una única solución óptima. D es convexo ya que está definido por desigualdades lineales. Z(·) será estrictamente convexa si su matriz de segundas derivadas (D^2Z) es definida positiva (para detalles sobre estas afirmaciones ver Luenberguer, 1973). La matriz de segundas derivadas es:

[5] Omitiremos aquí la demostración formal de que el problema admite solución óptima y sólo demostraremos que, dado que el problema admite solución óptima, esta es única.

$$D^2 Z = \begin{bmatrix} -u+v & -u \\ -u & -u+w \end{bmatrix}, \tag{7}$$

donde hemos definido – para facilitar la notación – u, v y w de la siguiente manera:

$$u = \frac{\partial P(x_1+x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial P(x_1+x_2)}{\partial x_2}; \qquad v = \frac{\partial CMg_1(x_1)}{\partial x_1}; \qquad w = \frac{\partial CMg_2(x_2)}{\partial x_2} \tag{8}$$

Como vemos, D^2Z es simétrica. Por otro lado, una matriz simétrica es definida positiva si y solo si sus valores propios son positivos (ver Rojo, 1998). Los valores propios de D^2Z se obtienen de:

$$Det\left\{D^2 Z - \lambda I\right\} = 0 \tag{9}$$

donde λ denota el vector de valores propios (de dimensión 2 en este caso) e I denota la matriz identidad (de 2x2 en este caso). Resolviendo, obtenemos la siguiente ecuación para λ:

$$\lambda^2 + \left(2u - v - w\right)\lambda + \left(-uv - uw + vw\right) = 0 \tag{10}$$

o bien,

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \tag{11}$$

Así,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{12}$$

Analizando las variables de interés:

$$-B = -2u + v + w = \underbrace{-2\cdot\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x_i}}_{\leq 0}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\partial CMg_1(x_1)}{\partial x_1}}_{>0} + \underbrace{\frac{\partial CMg_2(x_2)}{\partial x_2}}_{>0} > 0 \tag{13}$$

$$4AC = -4uv - 4uw + 4vw =$$
$$\underbrace{-4\cdot\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x_1}}_{\leq 0}\cdot\underbrace{\frac{\partial CMg_1(x_1)}{\partial x_1}}_{>0}}_{\geq 0} \underbrace{-4\cdot\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x_1}}_{\geq 0}\cdot\underbrace{\frac{\partial CMg_2(x_2)}{\partial x_2}}_{>0}}_{\geq 0} + \underbrace{4\cdot\underbrace{\frac{\partial CMg_1(x_1)}{\partial x_1}}_{>0}\cdot\underbrace{\frac{\partial CMg_2(x_2)}{\partial x_2}}_{>0}}_{>0} > 0 \tag{14}$$

$$B^2 - 4AC = 4u^2 + \left(w - v\right)^2 \geq 0 \tag{15}$$

De (15) se concluye que $\lambda_{1,2}$ son siempre reales. Además, si $B^2 - 4AC = 0$, $\lambda_{1,2} = -B$ que por (13) es mayor a cero siempre. En el caso en que $B^2 - 4AC > 0$, por (14) sabemos que $B^2 > B^2 - 4AC \Rightarrow \sqrt{B^2 - 4AC} < |B| \Rightarrow \lambda_{1,2} > 0$. Luego los valores que toma λ son siempre reales y positivos, para todo valor de x_1 y x_2. Por lo tanto, D^2Z es definida positiva y entonces Z(·) es estrictamente convexa. Así, *POE* tiene dominio de restricciones convexo y función objetivo (FO) estrictamente convexa, lo que asegura que admite una única solución óptima.

4.3. Condiciones de Optimalidad

Las condiciones de optimalidad de Karuch – Kuhn – Tucker (K–K–T) (Luenberger, 1973) y de factibilidad para *POE* son:

$$-P(x_1 + x_2) + CMg_1(x_1) \geq 0 \tag{16}$$

$$-P(x_1 + x_2) + CMg_2(x_2) \geq 0 \tag{17}$$

$$\{-P(x_1 + x_2) + CMg_1(x_1)\} \cdot x_1 = 0 \tag{18}$$

$$\{-P(x_1 + x_2) + CMg_2(x_2)\} \cdot x_2 = 0 \tag{19}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{20}$$

Del teorema de K-K-T (condición suficiente) si *POE* es convexo, $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ es factible y cumple con las ecuaciones (16) a (19), entonces $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ es mínimo global de *POE* (Luenberger, 1973). Por un lado, sabemos que *POE* es siempre convexo (dominio de restricciones convexo y FO estrictamente convexa), por lo tanto basta encontrar un flujo $X = (x_1, x_2)$ que cumpla con las ecuaciones (16) a (20) (optimalidad y factibilidad), para encontrar la solución óptima. Por otro lado, sabemos que *POE* admite una única solución óptima. Por lo tanto si encontramos una función alternativa de Costos Marginales del sistema que al ser interceptada con la función de demanda entregue un flujo entre O y D que cumpla con las ecuaciones (16) a (20), entonces podemos asegurar que dicha función es única.

4.4. Definición Alternativa de la Función de Costos Marginales del Sistema

Necesitamos encontrar una función alternativa de Costos Marginales del sistema $C\hat{M}g^S(X)$ tal que al hacer:

$$P(X) = C\hat{M}g^S(X) \tag{21}$$

se cumplan las condiciones de optimalidad dadas por las ecuaciones (16) a (19), además de la factibilidad (20). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $CMe_1(0) < CMe_2(0)$. Así, dadas las condiciones de optimalidad (16) a (19) y las de factibilidad (20), tendremos en general dos casos posibles como solución:

Caso 1: $x_1 > 0$ y $x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -P(x_1 + x_2) + CMg_1(x_1) = 0\,,\ -P(x_1 + x_2) + CMg_2(x_2) \geq 0$

Caso 2: $x_1 > 0$ y $x_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -P(x_1 + x_2) + CMg_1(x_1) = 0\,,\ -P(x_1 + x_2) + CMg_2(x_2) = 0$

Para el Caso 1 tendremos que la curva de Costos Marginales del sistema será la curva de Costos Marginales de la carretera 1, con $x_2 = 0$. Así, se cumplirán (16) y (18) al hacer $P(X) = C\hat{M}g^S(X) = CMg_1(x_1)$, se cumplirá (17) ya que $P(X) = CMg_1(x_1) < CMg_2(0)$ y (19) ya que $x_2 = 0$. Además se cumple por construcción la factibilidad.

Falta definir hasta qué punto será esta la curva de Costos Marginales del sistema. La respuesta está dada por la condición que debe cumplirse para satisfacer la ecuación (17). Esta será la curva de Costos Marginales del sistema hasta que el flujo X (o x_1) sea tal que $CMg_1(X = x_1) = CMg_2(0)$. Para el caso 2 debe cumplirse que:

$$P(x_1 + x_2) = CMg_1(x_1) = F(x_1) \Rightarrow x_1 = F^{-1}(P(X)) \tag{22}$$

$$P(x_1 + x_2) = CMg_2(x_2) = G(x_2) \Rightarrow x_2 = G^{-1}(P(X)) \tag{23}$$

donde hemos definido $F(x_1) = CMg_1(x_1)$ y $G(x_2) = CMg_2(x_2)$ para facilitar notaciones posteriores. Sumando las ecuaciones (22) y (23), obtenemos:

$$x_1 + x_2 = X = F^{-1}(P(X)) + G^{-1}(P(X)) \tag{24}$$

Luego, al hacer $P(X) = C\hat{M}g^S(X)$, obtenemos:

$$x_1 + x_2 = X = F^{-1}(C\hat{M}g^S(X)) + G^{-1}(C\hat{M}g^S(X)) \tag{25}$$

lo que equivale a sumar horizontalmente los Costos Marginales individuales. Así, considerando ambos casos, lo que se tiene es que la curva buscada estará dada por la suma horizontal de los Costos Marginales individuales, tal y como se hace para obtener los Costos Medios del sistema, sumando horizontalmente los Costos Medios individuales.

Esto tiene mucho sentido. Estamos buscando el óptimo social, lo que implica que es necesario hacer percibir a los usuarios los Costos Marginales a cambio de los Costos Medios. Por lo tanto el óptimo social se puede obtener resolviendo un problema óptimo de usuarios, reemplazando los Costos Medios por los Costos Marginales.

Para aclarar aún más la idea, consideremos la siguiente analogía. Supongamos que tenemos una fuente y un sumidero y queremos enviar agua de la fuente al sumidero a través de dos mangueras posibles. La cantidad que mandaremos dependerá de cuáles sean los costos asociados al envío. Por su parte los costos por mandar agua por cada manguera dependen de la cantidad que se quiera mandar. Comenzamos enviando agua por la manguera que ofrece los menores costos. Enviamos agua por dicha manguera hasta que el costo adicional de enviar una unidad adicional de flujo de agua sea el mismo que el de enviar la primera unidad de flujo por la otra manguera. A partir de entonces enviamos agua por ambas manqueras, de manera que los costos incrementales o marginales sean siempre iguales en ambas mangueras (de lo contrario podríamos enviar lo mismo a menor costo). Cuánto enviar estará dado por un equilibrio entre los costos por envío de agua y la demanda por envío de la misma. La analogía anterior ilustra el mismo problema que resuelven los usuarios cuando actúan libremente sobre el sistema, con la sola diferencia de que los costos percibidos por los usuarios son los Costos Medios, mientras que en el caso del envío del agua los costos percibidos son los marginales[6]. Así, volvemos a mostrar que resolver el problema de encontrar el óptimo social, consiste en resolver un problema de equilibrio de usuarios reemplazando los Costos Medios por los marginales, con lo que tiene plena validez la definición alternativa de la función de Costos Marginales del sistema como la suma horizontal de los Costos Marginales individuales. A continuación mostramos un ejemplo para ilustrar la diferencia entre usar una u otra definición para la función de Costos Marginales del sistema.

[6] La clave está en que cada usuario actúa para sí, mientras que el agua es enviada por una sola persona.

5. EJEMPLO NUMERICO

La función de demanda y las funciones de Costos Medios para las carreteras son:

$$P(X)=300-X \qquad CMe_1(x_1)=100+10\cdot\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 \qquad CMe_2(x_2)=200+5\cdot\left(\frac{x_2}{3}\right)^2$$

Las funciones de Costos Marginales obtenidas son:

$$CMg^S(X)=\begin{cases}100+\dfrac{15}{2}X^2 & ,si \;\; X<2\sqrt{10}\\ indefinida & ,si \;\; X=2\sqrt{10}\\ \dfrac{1600}{7}-\dfrac{165}{49}X^2-\dfrac{60}{49}X\cdot\left(\sqrt{2X^2+280}+\dfrac{X^2}{\sqrt{2X^2+280}}\right) & ,si \;\; X>2\sqrt{10}\end{cases}$$

$$C\hat{M}g^S(X)=\begin{cases}100+\dfrac{15}{2}X^2 & ,si \;\; X\le\dfrac{2}{3}\sqrt{30}\\ \dfrac{1600}{7}-\dfrac{15}{7}X^2+\dfrac{30}{7}X\cdot\left(\dfrac{9}{7}X-\dfrac{1}{7}\cdot\sqrt{18X^2+840}\right) & ,si \;\; X>\dfrac{2}{3}\sqrt{30}\end{cases}$$

donde la función $CMg^S(X)$ es la que se obtiene de la manera tradicional y la función $C\hat{M}g^S(X)$, es la que se obtiene de la manera alternativa. Las gráficas de ambas funciones y de la función de demanda se muestran en la Figura 5. Obtendremos tres e*quilibrios*[7] en este caso: E1, E2 y E3. Los dos primeros (E1 y E2), se obtienen al interceptar la demanda con la primera y segunda parte de la curva $CMg^S(X)$ respectivamente, en tanto que E3 se obtiene al interceptar la demanda con la función $C\hat{M}g^S(X)$.

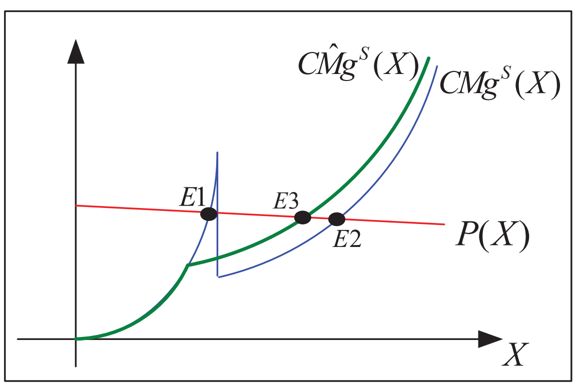

Figura 5: Gráfica de las Funciones *P(X)*, *CMg^S(X)* y $C\hat{M}g^S(X)$, para el ejemplo considerado

La Tabla 1 muestra un resumen con los valores obtenidos para los tres *equilibrios*.

[7] Llamaremos equilibrio a cualquier punto de intersección entre la demanda y cualquiera de las funciones de Costos Marginales del sistema.

Tabla 1
Valores de las variables de interés para cada e*quilibrio*

Variable	E1	E2	E3
X	5,0977	12,6769	12,2589
x_1	5,0977	4,9976	5,0032
x_2	0	7,2384	7,2557
CMg	294,9023	287,3231	287,7411
FO	–675,3677	–1.132,3380	–1.125,7595

Nota 1: **FO** es el valor de la función objetivo de *POE*.
Nota 2: ***CMg*** es el que corresponda en cada caso.

De los tres *equilibrios* el que entrega un mayor beneficio (negativo de FO de *POE*) es E2. Sin embargo, observamos que en E2 la suma de los flujos por cada carretera es mayor que el flujo total, por lo tanto la solución encontrada no es factible. Esto nos plantea la siguiente interrogante, ¿Qué nos asegura que una vez encontrado X y CMg^S, al buscar x_1 y x_2, su suma sea exactamente X? La respuesta es que nada, tal y como lo muestra este ejemplo. Luego, entre E1 y E3 quien presenta los mayores beneficios es E3, siendo esta la solución óptima del problema. También es importante destacar que existe una completa diferencia en el uso de la infraestructura entre E2 y E3, usándose ambas carreteras en el óptimo y sólo una en el equilibrio que predice la función $CMg^S(X)$.

6. CONCLUSIONES Y EXTENSIONES

Hemos analizado un sistema de transporte particular, el cual se compone de sólo un par Origen Destino con dos carreteras para viajar entre él. En particular hemos analizado la función de Costos Marginales de dicho sistema, mostrando que ella no es capaz de proveer el óptimo social al ser interceptada con la función de demanda. Sin embargo, es necesario recalcar que es ésta la función de Costos Marginales del sistema que refleja el comportamiento de los usuarios del sistema.

Se entregó una definición alternativa para los Costos Marginales del sistema como la suma horizontal de los Costos Marginales individuales y se mostró que esta lleva siempre a la solución óptima, la cual es única dadas las características del problema en cuestión.

Yendo un paso más allá, podemos generalizar este resultado notando lo siguiente. La función de costos medios de una ruta que une un par O–D es la suma de los costos de los arcos de la red que componen la ruta (suma vertical).

Si consideramos ahora una red con múltiples pares O–D y con múltiples rutas entre cada par, podemos calcular fácilmente las funciones de Costos Medios de cada una de las rutas que unen cada uno de los pares tal como se explicó en el párrafo precedente. Una vez realizado esto, es posible obtener la función alternativa de Costos Marginales para cada par O–D, como la suma horizontal de las funciones de Costos Marginales de las rutas que unen el par. Luego, para encontrar la cantidad transportada, puede igualarse la demanda por viajes entre el par en cuestión y la función de Costos Marginales del par.

Como posible extensión planteamos analizar el caso en que existan interacciones, sean estas simétricas o asimétricas, entre las funciones de costos de los arcos de la red.

REFERENCIAS

Rojo, A. (1998) **Algebra II**, Buenos Aires, El Ateneo.

Fernández, J. E. (1997) **Apuntes de Economía de Transporte**, Departamento de Ingeniería de Transporte, Escuela de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Luenberger, D. (1973) **Introduction to Linear and Nonlinear Programming**, Addison-Wesley Publishing Company, Reading.

ANEXO A

En este anexo demostraremos que la gráfica de la Figura 3 es correcta en el sentido que $\overline{c}_2 \geq \overline{c}_1$. Escribimos la función de Costos Marginales del sistema de la siguiente forma:

$$CMg^S(X) = \begin{cases} CMg_1(X), & si \ \ X < a \\ H(X), & si \ \ X > a \end{cases}, \tag{A.1}$$

donde *H(X)* es la función que resulta de derivar $X \cdot CMe^S(X)$ con respecto a *X*, cuando *X* > *a*. Definimos, para facilitar la notación posterior, $f(x_1) = CMe_1(x_1)$ y $g(x_2) = CMe_2(x_2)$. Así:

$$\overline{c}_2 = CMg^S(a^-) = f(a) + a \cdot f'(a) \tag{A.2}$$

$$\overline{c}_1 = CMg^S(a^+) = H(a^+) \tag{A.3}$$

Calcularemos primero $\partial CMe^S(X = a^+)/\partial X$. Para esto sabemos que:

$$CMe_1(x_1) = f(x_1) \Rightarrow x_1 = f^{-1}(CMe_1) \tag{A.4}$$

$$CMe_2(x_2) = g(x_2) \Rightarrow x_2 = g^{-1}(CMe_2) \tag{A.5}$$

Sumando (A.4) y (A.5), obtenemos $X = x_1 + x_2 = f^{-1}(CMe_1) + g^{-1}(CMe_2)$, pero al sumar horizontalmente imponemos $CMe_1 = CMe_2 = CMe^S$ con lo que tenemos:

$$X = f^{-1}(CMe^S) + g^{-1}(CMe^S) \tag{A.6}$$

Derivando con respecto a *X* obtenemos:

$$1 = \frac{\partial f^{-1}(CMe^S)}{\partial CMe^S} \cdot \frac{\partial CMe^S}{\partial X} + \frac{\partial g^{-1}(CMe^S)}{\partial CMe^S} \cdot \frac{\partial CMe^S}{\partial X} \tag{A.7}$$

Por otro lado, si se tiene una función *y* = *f(x)* y su inversa es *x* = $f^{-1}(y)$, se cumple que $\partial f^{-1}(y)/\partial y = \left[\partial f(x = f^{-1}(y))/\partial x\right]^{-1}$, que puede usarse en (A.7) para obtener:

$$1=\left[\frac{\partial f(x_1=f^{-1}(CMe^S))}{\partial x_1}\right]^{-1}\cdot\frac{\partial CMe^S}{\partial X}+\left[\frac{\partial g(x_2=g^{-1}(CMe^S))}{\partial x_2}\right]^{-1}\cdot\frac{\partial CMe^S}{\partial X} \qquad \text{(A.8)}$$

Pero en $X = a^+$, $x_1 = a$ y $x_2 = 0$. Reemplazado estos últimos valores en (A.8) y reordenando:

$$\frac{\partial CMe^S(X=a^+)}{\partial X}=\frac{f'(a)\cdot g'(0)}{f'(a)+g'(0)} \qquad \text{(A.9)}$$

Con (A.9) podemos calcular $\overline{c}_1$:

$$\overline{c}_1=H(a^+)=CMe^S(a)+a\cdot\frac{\partial CMe(X=a^+)}{\partial X} \qquad \text{(A.10)}$$

Ahora, $CMe^S(a)=CMe_1(a)=f(a)$, por lo que $\overline{c}_2\geq\overline{c}_1 \Leftrightarrow$

$$f'(a)\geq\frac{f'(a)\cdot g'(0)}{f'(a)+g'(0)} \qquad \text{(A.11)}$$

Si $f'(a)=0$ la desigualdad se cumple en igualdad. Si $f'(a)\neq 0$, podemos cancelar dicho término y luego de reordenar:

$$f'(a)\geq 0 \qquad \text{(A.12)}$$

Pero $f(x)=CMe_1(x)$, que es no-decreciente. Luego $f'(a)\geq 0$, con lo que se cumple que $\overline{c}_2\geq\overline{c}_1$. Así hemos probado que la gráfica de la Figura 3 es correcta.