MODELO DE EQULIBRIO SIMULTANEO DE PARTICION MODAL, DISTRIBUCION Y ASIGNACION CONJUNTA, CONSIDERANDO ASIGNACION ESTOCASTICA

Louis de Grange C., Valérie Dekock Ch., Alexandra Soto O.
Fernández y De Cea Ingenieros Ltda.
Lota 2257, Of. 402, Santiago, CHILE
Fax: (56-2) 234 1578;
e-mail: ldegrang@FDCconsult.com

RESUMEN

En este trabajo se plantea un modelo de equilibrio simultáneo Oferta-Demanda para sistemas de transporte, que considera las etapas de Asignación, Partición Modal y Distribución de manera conjunta. La principal característica de este desarrollo es que **considera una asignación de carácter estocástico**, **obteniéndose en el equilibrio un modelo de distribución gravitacional doblemente acotado y un modelo de elección de modo del tipo Logit (**Multinomial o Jerárquico) **consistentes** con los niveles de servicio resultantes del proceso de asignación estocástica planteado.

La formulación se desarrolla a partir de modelos de optimización de asignación estocástica y del modelo de maximización de entropía para la distribución, adicionando términos en la función objetivo para incorporar al modelo matemático la elección de modo; todo ello, sujeto a una serie de restricciones mínimas necesarias.

Como resultado se obtiene un modelo de **equilibrio simultáneo Oferta-Demanda** de estructura similar a los ya reportados en la literatura, pero con diferencias interesantes que se discuten en las conclusiones del trabajo, y que puede ser atractivo de implementar en redes con **bajos niveles de congestión,** donde una asignación del tipo Wardrop o a ruta mínima generan resultados menos precisos**,** o para análisis de sistemas de transporte interurbanos de carga y/o pasajeros, y **en general para redes de carácter agregado** (pocos arcos). Se presenta también el algoritmo de resolución del problema planteado.

Cabe mencionar también que, como casos particulares al modelo planteado, es posible obtener modelos simultáneos de Distribución y Asignación Estocástica, y también de Partición Modal y Asignación Estocástica. Del mismo modo, manipulando algunos términos en la formulación analítica, es posible obtener un modelo de partición modal Logit Jerárquicio y a la vez considerar múltiples clases de usuarios.

1. INTRODUCCION

El equilibrio en sistemas de transporte ha sido un tema de profundo estudio en las últimas décadas, partiendo con los modelos de optimización y programación lineal, entre los que destacan el modelo de transporte y los análisis de redes (Hillier y Liberman, 1974) con estructuras de demanda fijas y costos constantes, hasta llegar a los desarrollos más recientes (De Cea, Fernández y Soto, 2001; Florian *et al*, 1999) que consideran equilibrio simultáneo en tres de las cuatro etapas del modelo clásico de transporte: Distribución, Partición Modal y Asignación, donde la Generación y Atracción de viajes es exógena al modelo. En la actualidad incluso existen formulaciones e implementaciones computacionales que incorporan además elección de horario en el proceso de equilibrio (Dekock *et al*, 2002).

Los primeros modelos de asignación de viajes sobre una red se basaron en el *primer principio de Wardrop* (Wardrop, 1952). Para obtener los flujos de equilibrio en los arcos de la red vial que cumplan con el primer principio de Wardrop, se resuelve un problema de optimización aplicando la transformada de Beckman (Beckman *et al*, 1956) a las funciones flujo-demora de los arcos de la red vial, considerando restricciones de demanda y de continuidad de flujo. Estos modelos de asignación, de carácter determinístico, consideran que la demanda entre un determinado par origen-destino es fija e independiente del costo de viajar entre dicho par. Luego, la demanda es en este caso perfectamente inelástica. Posteriormente, bajo el mismo enfoque de equilibrio determinístico, surgieron modelos de asignación considerando múltiples clases de usuarios (Dafermos, 1972), importantes en los casos en que existe tarificación vial o peajes. Sin embargo, una de las principales desventajas que presentan los modelos de asignación determinística es que no es posible obtener una solución única a nivel de rutas, y sólo es posible obtener la solución de equilibrio única a nivel de flujos en los arcos de la red.

Ya en 1966 Von Falkenhausen había propuesto un método de asignación considerando distribuciones log-normal de los tiempos de viaje (costos) sobre los arcos de la red, mientras que en 1968 Burrell propuso un modelo basado en distribución uniforme. Estos modelos presentaban el gran inconveniente de requerir enumerar las rutas alternativas, lo que para una red de tamaño medio, era muy costoso en términos de recursos computacionales e impracticable en dichos años. Dial (1971) plantea uno de los primeros modelos de asignación multiruta a partir del concepto de probabilidad de elección de ruta, considerando modelos tipo LOGIT; la principal ventaja que presenta el desarrollo de Dial es que no requiere enumerar rutas alternativas, pero tiene la desventaja que no considera la congestión en los arcos de la red vial e ignora la correlación de rutas alternativas. Un trabajo posterior que considera asignación estocástica es el desarrollado por Fisk (1980), donde formula un problema de optimización cuya resolución entrega como resultado flujos entre rutas consistentes con un modelo LOGIT. El problema en este caso radica en la correlación existente entre rutas alternativas similares (que presentan varios arcos en común); sin embargo, este problema es tratable, en algunos casos, mediante la jerarquización en la elección de rutas alternativas, aunque el desarrollo puede resultar extremadamente complejo; además, y de manera análoga en los modelos LOGIT multinomiales (Ortúzar y Willumsem, 1994), la elección entre alternativas se hace a partir de diferencias absolutas entre ellas.

Sin embargo, la totalidad de los modelos de asignación expuestos anteriormente consideran demanda fija entre los pares origen-destino de viajes (matrices de viaje), por lo que la demanda es perfectamente inelástica e independiente de los niveles de servicio de la red. Uno de los primeros y más interesantes modelos de equilibrio que considera demanda variable entre pares origen-destino es el desarrollado por Evans (1976), el cual consiste en un modelo de equilibrio simultáneo entre Asignación y Distribución. La asignación de equilibrio es una asignación que cumple el primer principio de Wardrop, mientras que la matriz de viajes resultante del modelo de distribución obedece a un modelo de maximización de entropía doblemente acotado, cuya variable de costo es consistente con los costos de la asignación de equilibrio en la red vial. A partir de la formulación de Evans (1976), se han desarrollado nuevos modelos de equilibrio oferta-demanda. Entre los más recientes y completos, destacan los trabajos realizados por De Cea y Fernández (1996), De Cea, Fernández y Soto (2001), Dekock *et al* (2002) y Florian *et al* (1999), que utilizan la teoría de desigualdad variacional para plantear un problema de equilibrio entre oferta y demanda en servicios de transporte con múltiples modos y múltiples clases de usuarios.

Lundgren y Patriksson (1997) desarrollan un primer modelo de Distribución y Asignación Estocástica conjunta suponiendo que la elección de destino y ruta es simultánea, que corresponde a un caso particular del modelo presentado por De Grange y Dekock (2002), donde la elección de destino y ruta se puede realizar a un distinto nivel jerárquico. Los dos modelos anteriores (Lundgren y Patriksson (1997) y De Grange y Dekock (2002)) son los únicos modelos de equilibrio simultáneo con asignación estocástica que consideran demanda variable. Sin embargo, no incorporan la elección de modo en la formulación, desarrollo que expone en el presente documento.

El desarrollo que aquí se presenta es por lo tanto comparable con el trabajo expuesto por De Cea, Fernández y Soto (2001), que considera asignación determinística, y que está implementado en el modelo de equilibrio simultáneo ESTRAUS. En la sección 2 de este documento se presentan los modelos de asignación convencionales (asignación determinística y estocástica) con matriz de viajes exógena. En la sección 3 se presentan brevemente los modelos de equilibrio simultáneo Asignación-Distribución conjunta propuestos por Evans (1976) y De Grange y Dekock (2002). En la sección 4 se formula un nuevo modelo de equilibrio simultáneo Asignación-Partición Modal considerando asignación estocástica. En la sección 5 se presenta el modelo simultáneo completo de Distribución, Partición Modal y Asignación Estocástica Conjunta. En la sección 6 se presentan algoritmos de solución para los modelos planteados y, finalmente, en la sección 7 se presenta un resumen y conclusiones obtenidas de este nuevo modelo y se precisan algunos desarrollos complementarios factibles de realizar.

2. MODELOS CLASICOS DE ASIGNACION DETERMINISTICA Y ESTOCASTICA

El típico modelo de asignación determinística, que considera funciones de costo separables y una sola clase de usuarios (Beckmann, 1956), es el que resulta de resolver el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
&\min Z_1 = \sum_a \int_0^{f_a} c_a(x)\,dx \\
&s.a \\
&f_a = \sum_{p \in P_w} \delta_{ap} \cdot h_p \qquad \forall a \\
&\sum_{p \in P_w} h_p = T_w \qquad \forall w \\
&h_p \geq 0 \qquad \forall p
\end{aligned} \tag{1}$$

c_a : costo en el arco *a*.

f_a : flujo en el arco *a*.

δ_{ap} : parámetro que toma el valor 1 si el arco *a* pertenece a la ruta *p* y cero si no.

h_p : flujo en la ruta *p*.

T_w : número de viajes (demanda) entre el par origen-destino *w*.

P_w : conjunto de rutas entre el par origen-destino *w*.

Las condiciones de optimalidad del problema (1) son equivalentes al primer principio de Wardrop:

$$C_p \begin{cases} = C_w^* & \forall \ p \in P_w / h_p > 0 \\ \\ > C_w^* & \forall \ p \in P_w / h_p = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Estas condiciones de optimalidad (2) indican que, en el equilibrio, las rutas alternativas entre el par *w* utilizadas tendrán todas un mismo costo, el que será igual o menor que el costo de las rutas no utilizadas. Cabe hacer notar que la unicidad de la solución requiere que las funciones de costo en los arcos $c_a(f_a)$ sean monótonamente crecientes respecto a su flujo f_a. Por otra parte, dada la estructura del problema planteado, es sólo posible obtener unicidad en la solución de flujos en arcos, ya que a nivel de rutas existen múltiples soluciones óptimas. En consecuencia, en el problema (1) no es posible obtener los flujos de equilibrio en rutas.

El modelo de asignación estocástico planteado en Fisk (1980) es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&\min Z_2 = \sum_a \int_0^{f_a} c_a(x)\,dx + \frac{1}{\theta} \sum_w \sum_p h_p^w \cdot \ln h_p^w \\
&s.a \\
&\sum_{p \in P_w} h_p^w = T_w \qquad \forall w \\
&f_a = \sum_w \sum_p \delta_{ap}^w \cdot h_p^w \qquad \forall a \\
&h_p \geq 0 \qquad \forall p
\end{aligned} \tag{3}$$

En el problema (3), y a diferencia del problema (1), el conjunto de rutas P_w debe ser definido previamente, y se mantiene invariante durante el proceso de equilibrio. Las condiciones de optimalidad para este segundo problema conducen al siguiente criterio de asignación:

$$h_p^w = T_w \cdot \frac{e^{-\theta \cdot c_p^w}}{\sum_{r \in P_w} e^{-\theta \cdot c_r^w}} \tag{4}$$

donde $c_p^w = \sum_a \delta_{ap}^w \cdot c_a(f_a)$.

En este segundo modelo no se cumplen las condiciones de Wardrop (excepto que θ sea infinito), y los usuarios entre cada par w se repartirán en las rutas alternativas de acuerdo a un modelo tipo LOGIT. Sin embargo, en el problema (3) es posible obtener la **solución de equilibrio en rutas**. En la literatura se mencionan una serie de otros inconvenientes que presenta una asignación estocástica como la caracterizada en (4), que va desde el problema de enumeración de rutas hasta resultados paradójicos producto de la correlación entre rutas alternativas que tienen arcos en común y a que el costo percibido por los viajeros no es igual al observado. Sin embargo, la evidencia empírica a demostrado que para bajos niveles de congestión o en ausencia de ésta, la asignación estocástica sería más adecuada. Del mismo modo, para los análisis de viajes interurbanos, donde las alternativas de rutas para realizar un viaje son bajas, el criterio de asignación representado en (4) resulta ser más apropiado que el criterio de ruta mínima de Wardrop de la expresión (2).

3. MODELOS DE ASIGNACION Y DISTRIBUCION CONJUNTA

El modelo de Asignación y Distribución conjunta planteado por Evans (1976) se obtiene de resolver el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
&\min Z_3 = \sum_a \int_0^{f_a} c_a(x)\,dx + \frac{1}{\beta}\sum_w T_w\left(\ln T_w - 1\right)\\
&s.a\\
&O_i = \sum_j T_{ij} \qquad \forall i \qquad (\mu_i)\\
&D_j = \sum_i T_{ij} \qquad \forall j \qquad (\eta_j)\\
&f_a = \sum_w \sum_p \delta_{ap}^w \cdot h_p^w \quad \forall a, \qquad f_a \geq 0 \qquad \forall a
\end{aligned} \tag{5}$$

donde $w = (i, j)$. Al aplicar las condiciones de primer orden se obtiene:

$$C_p \begin{cases} = C_w^* & \forall\ p \in P_w / h_p > 0 \\ > C_w^* & \forall\ p \in P_w / h_p = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$T_w = A_i O_i B_j D_j e^{-\beta c_w} \tag{7}$$

donde A_i y B_j son los típicos factores de balanceo del modelo gravitacional doblemente acotado. Luego, el modelo de Evans entrega como resultados y de manera simultánea una asignación de acuerdo a Wardrop (ver expresión (6)) y un modelo de distribución de maximización de entropía doblemente acotado, cuya variable de costo es consistente con los costos observados en el proceso de asignación (expresión (7)).

El modelo planteado por De Grange y Dekock (2002) se basó en los desarrollos ya expuestos de Evans (1976) y Fisk (1980). El problema de optimización a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&\min Z_4 = \sum_a \int_0^{f_a} c_a(x)\,dx + \frac{1}{\theta}\sum_w \sum_p h_p^w \cdot \left(\ln h_p^w - 1\right) + \frac{1}{\beta}\sum_w T_w\left(\ln T_w - 1\right) - \frac{1}{\theta}\sum_w T_w\left(\ln T_w - 1\right) \\
&s.a \\
&O_i = \sum_j T_{ij} \quad \forall i \quad (\mu_i) \\
&D_j = \sum_i T_{ij} \quad \forall j \quad (\eta_j) \\
&\sum_{p \in P_w} h_p^w = T_w \quad \forall w \quad (\lambda_w) \\
&f_a = \sum_w \sum_{p \in P_w} \delta_{ap}^w \cdot h_p^w \quad \forall a
\end{aligned} \tag{8}$$

La función objetivo contiene la parte de asignación estocástica y el término asociado a la distribución entrópica. Las restricciones corresponden a la demanda total del sistema y a la continuidad de flujos en los arcos de la red vial. El modelo planteado por Lundgren y Patriksson (1997) es similar a la expresión (8), pero supone implícitamente que $\theta = \beta$, por lo que corresponde a un caso particular de esta última expresión. Las condiciones de optimalidad respecto a h_p^w entregan los siguientes resultados:

$$h_p^w = T_w \cdot \frac{e^{-\theta \cdot c_p^w}}{\sum_{r \in P_w} e^{-\theta \cdot c_r^w}} \tag{9}$$

La ecuación (9) corresponde a las condiciones de equilibrio del modelo de asignación estocástica desarrollado por Fisk (1980). Por otra parte, la matriz de distribución de viajes presenta la siguiente estructura:

$$T_w = A_i O_i B_j D_j e^{\beta \cdot \tilde{c}^w} \tag{10}$$

La expresión (10) corresponde a un modelo tipo gravitacional doblemente acotado, y que es consistente con una asignación estocástica que considera múltiples rutas alternativas donde:

$$\tilde{c}^w = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_{r \in P_w} e^{-\theta \cdot c_r^w} \tag{11}$$

La expresión $\tilde{c}^w$ corresponde al costo compuesto de viajar entre el par *w*, y es equivalente a la expresión denominada EMU de los modelos de partición modal LOGIT (Ortúzar y Willumsem, 1994). Es interesante notar la similitud existente entre la expresión (10) y (7) que se obtiene de considerar una asignación según el primer principio de Wardrop. En (7) el costo de viajar entre el par (i, j) corresponde al **costo de la ruta mínima de acuerdo al primer principio de Wardrop**, mientras que en (10) el costo **corresponde al costo representativo o compuesto** entre las rutas utilizadas y es **equivalente al EMU** de los modelos de elección discreta LOGIT. Además, en ambos casos es necesario determinar los factores de balanceo A_i y B_j, utilizando el mismo método iterativo.

4. MODELO DE ASIGNACION ESTOCASTICA Y PARTICION MODAL CONJUNTA

El problema de optimización a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} \min\ Z_5 = & \sum_m \sum_a \int_0^{f_a^m} c_a^m(x)dx + \frac{1}{\theta}\sum_m \sum_w \sum_r h_r^{wm} \cdot \left(\ln h_r^{wm} - 1\right) \\ & + \frac{1}{\lambda}\sum_m \sum_w T_w^m \cdot \left(\ln T_w^m - 1\right) - \frac{1}{\theta}\sum_m \sum_w T_w^m \cdot \left(\ln T_w^m - 1\right) \end{aligned} \tag{12}$$

$s.a$

$$T_w = \sum_m T_w^m \qquad \forall m \ \left(u_w\right) \tag{13}$$

$$T_w^m = \sum_{r \in P_w^m} h_r^{wm} \qquad \forall m, \forall w \ \left(u_w^m\right) \tag{14}$$

$$f_a^m = \sum_w \sum_r \delta_{ar}^{wm} \cdot h_r^{wm} \quad \forall a \tag{15}$$

En la función objetivo se incluye el término correspondiente a la asignación estocástica y el término correspondiente para que se cumpla la proporción de viajes en un modo m con respecto al total de viajes. En este caso T_w es constante y conocido. Derivando el lagrangeano correspondiente respecto a h_p^{wm}, se obtiene, en el equilibrio:

$$h_p^{wm} = T_w^m \cdot \frac{e^{-\theta \cdot c_p^{wm}}}{\sum_{r \in P_w} e^{-\theta \cdot c_r^{wm}}} \tag{16}$$

La ecuación (16) corresponde a las condiciones de equilibrio del modelo de asignación estocástica desarrollado por Fisk (1980) **para un determinado modo de transporte *m***. Al derivar ahora el Lagrangeano respecto a T_w^m, se tiene que en el equilibrio se debe cumplir que:

$$T_w^m = T_w \frac{e^{\lambda \cdot \tilde{c}^{wm}}}{\sum_m e^{\lambda \cdot \tilde{c}^{wm}}} \rightarrow P_w^m = \frac{T_w^m}{T_w} = \frac{e^{\lambda \cdot \tilde{c}^{wm}}}{\sum_m e^{\lambda \cdot \tilde{c}^{wm}}} \tag{17}$$

donde $\tilde{c}^{wm} = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_{r \in P_w} e^{-\theta \cdot c_r^{wm}}$.

5. MODELO DE ASIGNACION ESTOCASTICA, DISTRIBUCION Y PARTICION MODAL CONJUNTA

A continuación se presenta un nuevo modelo de equilibrio simultáneo para asignación, distribución y partición modal conjunta, similar al expuesto en De Cea, Fernández y Soto (2001) (que corresponde al implementado en el modelo de transporte ESTRAUS), pero que considera asignación estocástica. El problema de optimización a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\min \; Z_6 = {} & \sum_m \sum_a \int_0^{f_a^m} c_a^m(x)\,dx + \frac{1}{\theta}\sum_m \sum_w \sum_p h_p^{wm}\cdot\left(\ln h_p^{wm}-1\right) + \frac{1}{\lambda}\sum_m \sum_w T_w^m\left(\ln T_w^m -1\right) \\
& -\frac{1}{\theta}\sum_m \sum_w T_w^m\left(\ln T_w^m-1\right) + \frac{1}{\beta}\sum_w T_w\left(\ln T_w -1\right) - \frac{1}{\lambda}\sum_w T_w\left(\ln T_w-1\right) \\
s.a \\
& O_i = \sum_j T_{ij} \quad \forall i \quad (\mu_i) \\
& D_j = \sum_i T_{ij} \quad \forall j \quad (\eta_j) \\
& T_w = \sum_m T_w^m \quad \forall m \quad (u_w) \\
& T_w^m = \sum_{p\in P_w^m} h_p^{wm} \quad \forall w, \forall m \quad (u_w^m) \\
& f_a^m = \sum_w \sum_{p\in P_w} \delta_{ap}^{wm}\cdot h_p^{wm} \quad \forall a, \forall m
\end{aligned} \tag{18}$$

En este caso O_i y D_j son fijos, mientras que T_w es variable. A partir de las condiciones de optimalidad se obtienen los siguientes resultados.

Para la asignación, en el equilibrio se obtiene:

$$h_p^{wm} = T_w^m \cdot \frac{e^{-\theta\cdot C_p^{wm}}}{\sum_{r\in P_w} e^{-\theta\cdot C_r^{wm}}} \tag{19}$$

Para la partición modal, en el equilibrio se cumple que:

$$T_w^m = T_w \cdot \frac{e^{-\lambda\cdot\frac{1}{\theta}\ln\sum_r e^{-\theta\cdot C_r^{wm}}}}{\sum_m e^{-\lambda\cdot\frac{1}{\theta}\ln\sum_r e^{-\theta\cdot C_r^{wm}}}} = T_w \cdot \frac{e^{\lambda\tilde{C}^{wm}}}{\sum_m e^{\lambda\tilde{C}^{wm}}} \rightarrow P_w^m = \frac{T_w^m}{T_w} = \frac{e^{\lambda\tilde{C}^{wm}}}{\sum_m e^{\lambda\tilde{C}^{wm}}} \tag{20}$$

Finalmente, para la distribución en el equilibrio se cumple que:

$$T_w = A_i O_i B_j D_j \cdot e^{\beta L^w} \tag{21}$$

donde $L_w = -\frac{1}{\lambda}\ln\sum_m e^{-\lambda\tilde{c}^{wm}}$ y $\tilde{c}^{wm} = -\frac{1}{\theta}\ln\sum_{r\in P_w} e^{-\theta c_r^{wm}}$.

Se observa que la expresión (21) corresponde a un modelo de tipo gravitacional doblemente acotado, cuya componente de costo generalizado L_w es consistente con un modelo de partición modal tipo Logit y una asignación estocástica.

6. ALGORITMO DE RESOLUCION

Para entender el algoritmo de resolución del problema (18), se presentan los métodos de resolución de los problemas (8) y (12). La resolución del problema (8) se obtiene utilizando una extensión del método del gradiente (Hillier y Liberman, 1974). La primera fase resuelve una aproximación lineal, mientras que la segunda fase corresponde a una minimización unidimensional. El problema de aproximación lineal correspondiente a (8) es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&\min Z_L = \sum_w \sum_{p \in P_w} \left[\hat{c}_p^w + \frac{1}{\theta} \ln \hat{h}_p^w + \frac{1}{\beta} \ln \hat{T}_w - \frac{1}{\theta} \ln \hat{T}_w \right] \cdot h_p^w \\
&s.a \\
&O_i = \sum_j \hat{T}_{ij} \quad \forall i \\
&D_j = \sum_i \hat{T}_{ij} \quad \forall j \\
&\sum_{p \in P_w} h_p^w = \hat{T}_w \quad \forall w \\
&\hat{f}_a = \sum_w \sum_{p \in P_w} \delta_{pr}^w \cdot h_p^w \quad \forall a
\end{aligned} \tag{22}$$

donde $\hat{h}_p^w$, $\hat{c}_p^w$ y $\hat{T}_w$ son valores de la solución inicial factible. El término $\hat{c}_p^w$ está asociado al costo observable de viajar entre el par w por la ruta p; el término $\frac{1}{\theta} \ln \hat{h}_p^w$ está asociado a la percepción subjetiva de la ruta p entre el par w por parte del viajero; finalmente, el término $\left(\frac{1}{\beta} \ln \hat{T}_w - \frac{1}{\theta} \ln \hat{T}_w \right)$ está asociado a la atractividad de ir a j a partir de i ($w = i, j$). Debe notarse que, dada la restricción $\sum_{p \in P_w} h_p^w = T_w$, y al ser (22) un problema lineal, la solución corresponderá a asignar todo el flujo T_w por la ruta de menor costo entre el par w dentro del conjunto P_w definido a priori. La resolución de (22) consiste en resolver el clásico problema de Hitchcock. Luego, la solución $\bar{h}_p^w$ del problema (22) va a ser un **vector de flujos en rutas** que contiene ceros en todas las rutas definidas para cada par w, excepto en la ruta de menor costo donde el flujo es igual a la demanda entre dicho par. Con los valores de $\hat{h}_p^w$ y $\bar{h}_p^w$ se obtienen los valores de los flujos $\hat{f}_a$ y $\bar{f}_s$, y de los viajes entre pares origen-destino $\hat{T}_w$ y $\bar{T}_w$. En consecuencia, se puede proceder a la fase dos del algoritmo de solución que corresponde a la minimización unidimensional, en la que se debe resolver el siguiente problema:

$$\min_{0<\alpha<1}\sum_a \int_0^{\hat{f}_a+\alpha\left(\bar{f}_a-\hat{f}_a\right)} c_a(x)\,dx+\frac{1}{\theta}\sum_w\sum_p\left(\hat{h}_p^w+\alpha\left(\bar{h}_p^w-\hat{h}_p^w\right)\right)\cdot\ln\left(\left(\hat{h}_p^w+\alpha\left(\bar{h}_p^w-\hat{h}_p^w\right)\right)-1\right)$$
$$+\frac{1}{\beta}\sum_w\left(\hat{T}_w+\alpha\left(\bar{T}_w-\hat{T}_w\right)\right)\cdot\left(\ln\left(\hat{T}_w+\alpha\left(\bar{T}_w-\hat{T}_w\right)\right)-1\right) \tag{23}$$
$$-\frac{1}{\theta}\sum_w\left(\hat{T}_w+\alpha\left(\bar{T}_w-\hat{T}_w\right)\right)\cdot\left(\ln\left(\hat{T}_w+\alpha\left(\bar{T}_w-\hat{T}_w\right)\right)-1\right)$$

La resolución de (23) nos entrega el valor de α^* con el que posteriormente encontramos la segunda solución de prueba de la siguiente forma:

$$\hat{\hat{h}}_p^w=\hat{h}_p^w+\alpha^*\cdot\left(\bar{h}_p^w-\hat{h}_p^w\right)\quad \forall\, w,p\in P_w \tag{24}$$

$$\hat{\hat{f}}_a=\hat{f}_a+\alpha^*\cdot\left(\bar{f}_a-\hat{f}_a\right)\quad \forall\, a \tag{25}$$

$$\hat{\hat{T}}_w=\hat{T}_w+\alpha^*\cdot\left(\bar{T}_w-\hat{T}_w\right)\quad \forall\, w \tag{26}$$

El proceso se repite nuevamente con las expresiones (24), (25) y (26) hasta que dos soluciones de prueba sucesivas sean lo suficientemente parecidas. Debe notarse que si $\beta<\theta$ equivale a considerar que en un primer nivel jerárquico se realiza la decisión de origen y destino, y en un segundo nivel jerárquico la elección de ruta.

En el caso de partición modal y asignación estocástica conjunta planteado en (12), el procedimiento es muy similar. El problema de aproximación lineal correspondiente es el siguiente:

$$\min Z_L=\sum_m\sum_w\sum_r\left[\hat{c}_r^{wm}+\frac{1}{\theta}\ln\hat{h}_r^{wm}+\frac{1}{\lambda}\ln\hat{T}_w^m-\frac{1}{\theta}\ln\hat{T}_w^m\right]\cdot h_r^{wm} \tag{27}$$

$s.a$

$$T_w=\sum_m T_w^m\quad \forall m\qquad (u_w) \tag{28}$$

$$T_w^m=\sum_{r\in P_w^m} h_r^{wm}\quad \forall m,\forall w\quad \left(u_w^m\right) \tag{29}$$

$$f_a^m=\sum_w\sum_r \delta_{ar}^{wm}\cdot h_r^{wm}\quad \forall a \tag{30}$$

donde $\hat{h}_p^{wm}$, $\hat{c}_r^{wm}$ y $\hat{T}_w^m$ son valores que se obtienen a partir de la solución inicial factible. Debe notarse que, dadas las restricciones (28) y (29), y al ser (27) un problema lineal, la solución corresponderá a asignar todo el flujo T_w^m por la ruta de menor costo entre el par *w* del modo *m* dentro del conjunto de rutas P_w definido a priori. En consecuencia, la resolución de (27) corresponde a resolver simplemente el **clásico problema de ruta mínima**. Por lo tanto, la solución $\bar{h}_p^{wm}$ del problema (27) va a ser un **vector de flujos en rutas** de los distintos modos que contiene ceros en todas las rutas definidas para cada par *w*, excepto en la ruta de menor costo donde el flujo es igual a la demanda total entre dicho par (para cada modo).

Con los valores de $\hat{h}_p^{wm}$ y $\bar{h}_p^{wm}$ es posible obtener los valores de los flujos en los arcos de la red

$\hat{f}_a^m$ y $\bar{f}_a^m$, y de los viajes entre pares origen-destino $\hat{T}_w^m$ y $\bar{T}_w^m$. En este caso si $\lambda < \theta$ equivale a considerar que en un primer nivel jerárquico se realiza la decisión de modo, y en un segundo nivel jerárquico la elección de ruta. En consecuencia, se puede proceder a la fase dos del algoritmo de solución que corresponde a la minimización unidimensional, en la que se debe resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned}\min_{0<\alpha<1} \sum_m \sum_a \int_0^{\hat{f}_a^m+\alpha\left(\bar{f}_a^m-\hat{f}_a^m\right)} c_a^m(x)\,dx + \frac{1}{\theta}\sum_w \sum_r \left(\hat{h}_r^{wm}+\alpha\left(\bar{h}_r^{wm}-\hat{h}_r^{wm}\right)\right)\cdot \ln\left(\left(\hat{h}_r^{wm}+\alpha\left(\bar{h}_r^{wm}-\hat{h}_r^{wm}\right)\right)-1\right) \\ +\frac{1}{\lambda}\sum_m \sum_w \left(\hat{T}_w^m+\alpha\left(\bar{T}_w^m-\hat{T}_w^m\right)\right)\cdot\left(\ln\left(\hat{T}_w^m+\alpha\left(\bar{T}_w^m-\hat{T}_w^m\right)\right)-1\right) \\ -\frac{1}{\theta}\sum_m \sum_w \left(\hat{T}_w^m+\alpha\left(\bar{T}_w^m-\hat{T}_w^m\right)\right)\cdot\left(\ln\left(\hat{T}_w^m+\alpha\left(\bar{T}_w^m-\hat{T}_w^m\right)\right)-1\right)\end{aligned} \tag{31}$$

La resolución de (31) nos entrega el valor de α^* con el que posteriormente encontramos la segunda solución de prueba de la siguiente forma:

$$\hat{\hat{h}}_p^{wm} = \hat{h}_p^{wm} + \alpha^* \cdot \left(\bar{h}_p^{wm} - \hat{h}_p^{wm}\right) \qquad \forall\ w, m, p \in P_w \tag{32}$$

$$\hat{\hat{f}}_a^m = \hat{f}_a^m + \alpha^* \cdot \left(\bar{f}_a^m - \hat{f}_a^m\right) \qquad \forall\ a, m \tag{33}$$

$$\hat{\hat{T}}_w^m = \hat{T}_w^m + \alpha^* \cdot \left(\bar{T}_w^m - \hat{T}_w^m\right) \qquad \forall\ w, m \tag{34}$$

El proceso se repite nuevamente con las expresiones (32), (33) y (34) hasta que dos soluciones de prueba sucesivas sean lo suficientemente parecidas.

El algoritmo de resolución del modelo completo (Distribución, Partición Modal y Asignación Estocástica) se obtiene simplemente de manera análoga a estos dos algoritmos recién expuestos; en este caso la aproximación lineal resuelve un problema de Hitchcock.

7. CONCLUSIONES

El desarrollo analítico expuesto permite obtener un modelo de equilibrio simultáneo oferta-demanda para un sistema de transporte, en el que se consideran 3 de las cuatro componentes del modelo clásico de transporte, que corresponden a la Asignación, Partición Modal y a la Distribución de viajes. El principal aporte del trabajo es que permite, mediante la resolución de un problema de optimización, obtener una **solución de equilibrio simultáneo entre oferta y demanda**, aun cuando el proceso de asignación considerado sea de carácter estocástico, por lo que existen múltiples rutas alternativas para los usuarios. No obstante, la aplicación del modelo propuesto en este documento puede ser atractiva de implementar en redes urbanas donde los **niveles de congestión son bajos (**por ejemplo en períodos de menor demanda), o para los casos de **análisis interurbanos**, pues en tales casos la enumeración de rutas deja de ser un inconveniente. En general, **el modelo permite el tratamiento de topologías de redes más agregadas** (redes más simples), que consideren pocos arcos donde operen vehículos.

Además, y dada la sensibilidad que pueden experimentar tanto la distribución de viajes como la elección de modo y los flujos en los arcos de una red frente a los distintos parámetros y modelos, se dispone de una nueva alternativa de modelación que es más flexible, ya que incluso los modelos de Evans (1976) y de De Cea, Fernández y Soto (2001) se pueden considerar una particularidad del modelo planteado en este trabajo (cuando θ es muy grande).

Una extensión lógica del trabajo presentado es la formulación de un modelo que incorpore la **elección de horario** en la formulación del modelo de equilibrio simultáneo o desarrollar uno que considere **múltiples clases de usuarios**. También resulta ser directo la modificación del modelo de tal forma de obtener en la partición modal una estructura tipo Logit Jerárquica. Estas extensiones del modelo están actualmente siendo desarrolladas por los autores. Del mismo modo, la comparación entre modelos de equilibrio simultáneo en sistemas de transporte determinísticos y estocásticos mediante casos ejemplo forman parte de una extensión del presente trabajo.

REFERENCIAS

Beckman, M.J., Mcguire, C.B. and Winsten, C.B. (1956). *Studies in the Economics of Transportation.* **Yale University Press, New Haven, Connecticut**.

Burrel, J. E. (1968). Multipath Route Assignment an its Applications to Capacity Restraint. *Poceedings, 4th International Symposium on the Theory of Road Traffic Flow*, **Karlsruhe, West Germany**.

Dafermos, S. (1972). The assignment problem for multiclass-user transportation networks. **Transportation Science 6, pp.73-87**.

De Cea, J. and Fernandez, J.E. (1996). Equilibrio simultáneo oferta-demanda en redes multimodales congestionadas: formulación matemática y algoritmo de solución. **Apuntes de Ingeniería 19(4), pp. 17-30**.

De Cea, J. Fernandez, J.E. and Soto, A. (2001). ESTRAUS: A Simultaneous Equilibrium Model to Analyze and Evaluate Multimodal Urban Transportation Systems with Múltiple User Classes, **9th WCTR, Seoul, Korea**.

De Grange, L. y Dekock, V. (2002). Modelo de Equilibrio Asignación - Distribución Conjunta Considerando Asignación estocástica. **XII Congreso Panamericano de Ingeniería de Transito y Transporte, Noviembre 2002, Quito, Ecuador**.

Dekock, V. De Cea, J. y Fernandez, J.E. (2002). Equilibrio Simultáneo de Distribución, Partición Modal y Asignación con Elección Horaria de Viajes. **V Congreso de Ingeniería del Transporte, Junio 2002, Santander, España.**

Dial, R. B. (1971). A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Algorithm Which Obviates Path Enumeration. **Transportation Research 5 (2), pp. 83-111**.

Evans, S. (1976). Derivation and analysis of some models for combining distribution and assignment. **Transportation Research 10, pp. 37-57**.

Fisk, C. (1980). Some Developments in Equilibrium Traffic Assignement. **Transportation Research 14B, pp. 243-255.**

Florian, M., Wu, J.H. and He, S. (1999). A multi-class multi-mode variable demand network equilibrium model with hierarchical logit structures. **IX Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte, 18-22 Octubre 1999, Santiago, Chile.**

Hillier, F. And Lieberman, C.J. (1974). Introduction to Operations Research. **Holden-Davy, San Francisco.**

Lundgren, J. and Patriksson, M. (1997). The combined distribution and stochastic assignment problem. **Baltzer Journals, 18 September 1997**.

Ortúzar, J. de D. y L.G. Willumsen (1994). Modelling Transport, segunda edición. **John Wiley & Sons, Chichester**.

Von Falkenhausen, H. (1966). Traffic Assignment by a Stochastic Model. **Poceedings, 4th International Conference on Operational Science, pp. 415-421.**

Wardrop, J.G. (1952). Some Theorical Aspects of Road Traffic Research. **Proceedings Institution of Civil Engineers, II(1), 325-378.**