ANALISIS DE LA UNICIDAD DEL PROBLEMA DE ASIGNACION DE VIAJES A REDES DE TRANSPORTE PUBLICO CON COSTOS ASIMETRICOS

Joaquín De Cea Ch., José Enrique Fernández L.
Departamento de Ingeniería de Transporte
Pontificia Universidad Católica de Chile
Casilla 306, Santiago 22, Chile,
Fax: (56-2) 686 4820
e-mail: jdc@ing.puc.cl

Pascale Quintana B.
Fernández & De Cea Ingenieros Ltda.
Lota 2257, Of. 402, Santiago, CHILE
Fax: (56-2) 234 1578
e-mail: pquintana@FDCconsult.com

RESUMEN

En este trabajo se analiza la unicidad de la solución del problema de asignación a redes de transporte público con funciones de costo asimétricas. Aunque existen condiciones de suficiencia que aseguran dicha unicidad, éstas no se cumplen normalmente para redes de tamaño real. Para estudiar este tema se realizó en primer lugar un análisis teórico del modelo, determinando las características de su matriz de derivadas de las funciones de costo. Luego, se realizó un análisis numérico, que consistió en resolver diversos ejemplos para diferentes condiciones de carga y estudiar las características del equilibrio obtenido en cada caso. En este artículo sólo se presentan los resultados del análisis numérico realizado para la ciudad intermedia de Curicó, Chile.

1. INTRODUCCION

El objetivo principal de este trabajo es analizar la unicidad de la solución al problema de asignación a redes de transporte público con costos asimétricos. En su forma más general, el modelo se puede formular como una desigualdad variacional. Las condiciones de unicidad conocidas para este tipo de problemas indican que ésta puede ser asegurada, siempre que la matriz de derivadas del vector de funciones de costo (Jacobiano *J(c)*) sea definida positiva. La experiencia muestra que en la gran mayoría de los casos, *J(c)* no cumple esta condición.

Existen variados estudios que analizan los problemas de redes de transporte urbanas mediante diversos planteamientos (Aashtiani (1979), Friesz (1981), y Hearn*, et al.* (1984), por nombrar algunos) , sin embargo, la formulación que nos parece más interesante de estudiar por su gran flexibilidad es la desigualdad variacional. La primera formulación con interacciones entre las funciones de costo es una extensión, formulada por Dafermos (1971), del clásico problema planteado por Beckmann*, et al.* (1956). La necesidad de formular matemáticamente el problema asimétrico llevó a Smith (1979) y Dafermos (1980a) a plantear el problema de asignación asimétrico como una desigualdad variacional. A pesar que se han demostrado varios teoremas de existencia y unicidad (Smith (1979), Dafermos (1980a), Dafermos (1982a), Nagurney (1993), Florian y Spiess (1982) y varios otros) respecto de estos problemas, sólo se han determinado condiciones suficientes de unicidad, las que son bastante restrictivas. En general todas estas pueden resumirse en exigir que el Jacobiano del vector de funciones de costo sea definido positivo. Para el problema de asignación, modelado utilizando el concepto de estrategias (Spiess (1983, Spiess y Florian (1989)), Correa (1999) demuestra unicidad de la solución para un caso particular del modelo, incluyendo restricciones adicionales a su formulación matemática.

A pesar de que las condiciones suficientes de unicidad no se cumplen en la mayoría de los casos, es interesante notar que la experiencia práctica con problemas de este tipo pareciera indicar que la solución de equilibrio es en general única o bien, cuando no lo es, las diferencias entre soluciones alternativas se concentran en un número muy reducido de arcos de la red. Dado lo anterior, es de gran interés estudiar más a fondo este tema. La importancia práctica de analizar el problema de equilibrio en redes asimétricas radica en que los modelos asociados a este tipo de redes son los que mejor representan la realidad de los sistemas urbanos. Además al estar incorporado el problema de asignación a redes de transporte público en modelos (ya sea simultáneos o secuenciales) que se utilizan en la evaluación de planes de transporte, es imperativo poder saber si la evaluación realizada fue hecha sobre la base de una solución única, o existen otras, que pueden hacer variar el resultado del análisis.

Este artículo se estructura de la siguiente forma: en esta sección se presenta una breve revisión bibliográfica y se señalan los objetivos del análisis. La segunda sección, plantea muy brevemente la formulación del problema de asignación estudiado y los teoremas más importantes existentes en relación a la unicidad de la solución de problemas formulados como desigualdades variacionales. En la tercera sección se analiza el problema del punto de vista teórico, obteniendo varias conclusiones generales sobre las características de la matriz Jacobiano. La cuarta sección muestra los principales resultados de un análisis numérico (se reportan sólo los resultados de un ejemplo para la ciudad de Curicó). Finalmente en la sección cinco se sintetizan las conclusiones del trabajo.

2. EL PROBLEMA DE ASIGNACION

Formulación matemática

La formulación del problema de asignación basada en el concepto de ruta de transporte público y la definición de la red de transporte adecuada se presenta en De Cea y Fernández (1993). Esta formulación utiliza el concepto de líneas comunes (Chriqui y Robillard (1975)) y considera congestión en los vehículos. Para efectos de este trabajo sólo presentaremos brevemente la definición de las funciones de costo asociadas a un "arco de transporte público", que es básico para entender los siguientes análisis. El problema que nos ocupa puede expresarse como:

$$c\left(V^*\right)\cdot\left(V-V^*\right)\geq 0,\quad \forall V\in\Omega \tag{1}$$

donde Ω es la región de vectores de flujo factibles, definida por las restricciones de continuidad, no negatividad y repartición de flujos de arcos de transporte público entre las secciones de línea correspondientes, y:

$V=\left(V^1,\dots,V^s,\dots,V^m\right)$: vector de flujos en los arcos de transporte público.

$V^*=\left(V^{1^*},\dots,V^{s^*},\dots,V^{m^*}\right)$: vector de flujos de equilibrio.

$c=\left(c_1\left(V\right),\dots,c_s\left(V\right),\dots,c_m\left(V\right)\right)$: vector de funciones de costo.

Funciones de costo

Las funciones de costo medios asociadas a los arcos de la red de transporte público $G=(N,S)$ son de tipo BPR[1] y reflejan implícitamente el aumento de dichos costos al aumentar el flujo de pasajeros en los diferentes servicios de transporte público, mediante el incremento de los tiempos de espera de los pasajeros en paraderos.

Éstas son de la forma:

$$c_s=\overline{c}_s+\beta\left(\frac{V^s+\tilde{V}^s}{K_s}\right)^n \tag{2}$$

donde:

$\overline{c}_s$: costo fijo de viajar en el arco de transporte público s.

V^s es el flujo del arco de transporte público s.

$\tilde{V}^s$: flujo compitente del arco de transporte público s.

β, n: son parámetros positivos.

El segundo término de la expresión (2) representa el costo de espera variable, dependiente de los flujos de pasajeros.

El flujo compitente, para un arco dado, es aquel que compite (o quita) capacidad al arco de transporte público *s.* En el paradero de inicio *i* de un arco *s,* éste está formado por pasajeros que abordaron cualquiera de las líneas incluidas en *s* antes y hasta el nodo *i,* y que descienden de ellas más allá de *i.* Es muy importante destacar que es la existencia de estos flujos compitentes es la que genera las interacciones asimétricas de este problema de asignación.

[1] Bureau of Public Roads (U. S. A.)

Teoremas de unicidad

A continuación se entregan los dos teoremas de unicidad más importantes utilizados en esta investigación. A base de un análisis matemático de una desigualdad variacional (1), Nagurney (1993) plantea las siguientes condiciones de unicidad:

Teorema 1

Suponga que C(V) es estrictamente monótona en Ω, entonces, si existe una solución al problema, es única.

Teorema 2

Suponga que C(V) es continuamente diferenciable en Ω y que su Jacobiano es definido positivo (semidefinido positivo) y no necesariamente simétrico. Entonces C(V) es estrictamente monótona (monótona) en Ω.

De lo anterior se puede concluir que:

i. Si *C(V)* es estrictamente monótona hay solución única.
ii. Si *C(V)* es fuertemente monótona entonces también es estrictamente monótona.
iii. Si *J(c)* es definido positivo, entonces *C(V)* es estrictamente monótona.
iv. Si *J(c)* es semidefinido positivo entonces *C(V)* es monótona.
v. *C(V)* es fuertemente monótona si y sólo si *J(c)* es definido positivo: si *C(V)* es fuertemente monótono, entonces *J(c)* es definido positivo; si *J(c)* es definido positivo, entonces *C(V)* es fuertemente monótono.

Las condiciones requieren que el vector de funciones de costo sea al menos estrictamente monótono, para asegurar unicidad. Como esto es complicado de demostrar, basta demostrar que *J(c)* es definida positiva. Estas condiciones son bastante restrictivas y no necesariamente se cumplen en redes de transporte. Además, las condiciones anteriores son todas suficientes para asegurar unicidad, pero no son necesarias, por lo que puede que exista una condición necesaria menos restrictiva que las anteriores.

3. PROPIEDADES DE LA RED G=(N,S)

El problema de asignación a redes de transporte público tiene ciertos atributos que son de utilidad al analizar la unicidad de su solución. En esta sección se analiza en forma general la matriz Jacobiano del vector de funciones de costo, con el objeto de determinar estas características y su incidencia en la unicidad de la solución del problema estudiado.

Características del Jacobiano del vector de funciones de costos

Considérese la desigualdad variacional (1). El Jacobiano del vector de funciones de costo se define como la matriz de derivadas de estas funciones:

$$J(c)=\begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial V^1} & \frac{\partial c_1}{\partial V^2} & \cdots & \frac{\partial c_1}{\partial V^m} \\ \frac{\partial c_2}{\partial V^1} & \frac{\partial c_2}{\partial V^2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial c_m}{\partial V^1} & \frac{\partial c_m}{\partial V^2} & \cdots & \frac{\partial c_m}{\partial V^m} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Forma cuadrática

Definición:

- Sea una matriz A cualquiera. Ella se dice definida positiva si y sólo si se cumple:

$$x^T A x > 0, \quad \forall x \tag{4}$$

es decir, que su forma cuadrática sea siempre positiva.

- La matriz se dice semidefinida positiva si y sólo si se cumple:

$$x^T A x \geq 0, \quad \forall x \tag{5}$$

Las características anteriores pueden generalizarse en el siguiente Teorema (Greene (1999)):

Teorema 1

Sea A una matriz simétrica. Si todas los valores propios de A son positivos (negativos), entonces A es definida positiva (definida negativa). Si algunos de los valores propios son cero, entonces A es semidefinida positiva[2] (negativa) si los restantes son positivos (negativos). Si A tiene valores propios tanto negativos como positivos, entonces A es indefinida.

El análisis de los valores propios de la matriz es una forma relativamente sencilla de determinar si una matriz es definida o no, en lugar de demostrar directamente (4), lo cual no siempre es posible. La desventaja de estos métodos de análisis es que solamente son válidos si la matriz analizada es simétrica. Para superar esta desventaja, usaremos la siguiente propiedad de matrices asimétricas: *sea una matriz A_{nxn} cualquiera, entonces existe una única matriz simétrica cuya forma cuadrática asociada es la misma que la asociada a la matriz A*. Esta matriz simétrica P se obtiene según la siguiente relación:

$$p_{ij} = p_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \tag{6}$$

Según la expresión anterior, y dado que la forma cuadrática de la matriz P es la misma que la asociada a la matriz A, se cumplirá que:

$$x^T A x = x^T \underbrace{\left(\frac{A + A^T}{2}\right)}_{P} x \tag{7}$$

[2] "Semidefinida positiva (negativa)" es equivalente a "definida no negativa (no positiva)".

Dado que P es simétrica, se pueden analizar sus valores propios para determinar si es definida positiva. Por otra parte, al tener la misma forma cuadrática que A, si P es (semi) definida positiva se cumple (4), lo cual a su vez implica que A es (semi) definida positiva.

Definición:
Sea la matriz M(c) una matriz simétrica con la misma forma cuadrática de J(c), según la ecuación (8):

$$M(c) = \frac{J(c) + J^T(c)}{2} \tag{8}$$

Utilizando la definición anterior, es posible determinar si el Jacobiano *J(c)* es definido, estudiando la matriz simétrica *M(c)*, para la cual se pueden usar los métodos mencionados anteriormente.

Singularidad
Mediante un análisis de los elementos de la matriz *J(c)* para nuestro problema, se logró determinar que ésta tendrá siempre filas linealmente dependientes. Esto ocurre cuando dos o más secciones de ruta comienzan en un mismo nodo y tienen el mismo conjunto de líneas comunes. En otras palabras:

Lema
Si en una red se cumple que para al menos dos arcos de transporte público s_1 y s_2

$$i_{s_1} = i_{s_2} \tag{9}$$

$$\overline{A}_{s_1} = \overline{A}_{s_2} \quad \Rightarrow \quad V^{s_1} + \tilde{V}^{s_1} = V^{s_2} + \tilde{V}^{s_2} \tag{10}$$

Entonces, el Jacobiano de las funciones de costo asociado tendrá al menos dos filas linealmente dependientes.

Siendo las condiciones (9) y (10) simples, es fácil ver que se cumplirán en todas las redes reales, por muy pequeñas y sencillas que estas sean. Esto se verifica, ya que en cualquier red existirá al menos un eje que sea recorrido por más de una línea, lo cual genera interacciones que cumplen con las condiciones anteriores. Por lo tanto, esta característica del Jacobiano es consecuencia directa de la modelación del problema.

Una consecuencia directa de la dependencia de dos o más filas de la matriz *J(c)* es que ésta es una **matriz singular,** esto implica que:

i. Su rango[3] no es máximo → *rango (J)<m.*
ii. Tiene determinante nulo → *det(J)=0.*
iii. No es invertible.

El saber que el Jacobiano *J(c)* es singular, no permite asegurar nada sobre la singularidad de la matriz *M(c)*. Sin embargo, mientras menor sea el rango de *J(c),* mayor es la probabilidad que *M(c)* también tenga un rango menor al máximo y sea singular. Como en redes reales, el rango de *J(c)* será significativamente menor al máximo, es razonable asumir que *M(c)* generalmente será

[3] Recordar que *J(c)* es una matriz de *mxm*.

singular. Es interesante notar que una matriz simétrica singular no puede ser definida positiva, ya que tiene determinante nulo, pero si puede ser semidefinida positiva si el resto de sus elementos permite que se cumpla la condición (5).

3.1. Determinación de los elementos de la matriz *J(c)*

Para analizar en más detalle las características de *J(c)* es necesario determinar sus elementos. Dada la forma funcional de las funciones de costo, los elementos de la matriz Jacobiano son funciones que dependen del vector de flujo *V*. Esto genera una dificultad adicional al momento de determinar si la matriz es definida positiva, ya que además del gran tamaño del problema y la variedad de interacciones existentes en las funciones de costo (se deben determinar las derivadas parciales con respecto a cada uno de los flujos en las secciones de ruta), el cumplimiento de las condiciones requeridas dependerá del valor de *V*. A continuación se presenta el desarrollo llevado a cabo para obtener una expresión que permita determinar la matriz *J(c)*.

Matriz de interacciones

La primera dificultad abordada son las interacciones existentes en la red, las cuales, en algunos casos, serán asimétricas. Estas interacciones son producto de los supuestos de modelación, y se traducen en que las funciones de costo no dependan todas de las mismas variables, ya que para cada arco de transporte público, su costo de viaje depende del flujo propio y del flujo compitente. Estas interacciones no tienen un esquema determinado, ya que el cálculo del flujo compitente debe considerar:

- Las características de las líneas de transporte público de la red, considerando su recorrido y frecuencia $\rightarrow$ definen el conjunto de líneas atractivas para cada arco de transporte público.
- La estructura de los arcos de transporte público y sus conjuntos de líneas comunes $\rightarrow$ definen las interacciones de flujo que son percibidas a través de las funciones de costo (flujo compitente de cada arco de transporte público).

Para facilitar la determinación del flujo compitente para cada arco, se define una matriz de interacciones *B(c)*, la cual almacena las interacciones existentes en la red. Así, se puede extraer fácilmente la información que se requiere respecto a las interacciones asociadas a un arco específico. Considérese la desigualdad variacional (1). La matriz *B(c)* queda definida por:

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 \quad \text{si } c_i \text{ no depende del flujo } V^j \\ 1 \quad \text{si } c_i \text{ depende del flujo } V^j \\ \dfrac{\sum\limits_{k'} f_{k'}}{\sum\limits_{m \in \bar{A}_{s_j}} f_m} \quad \text{si } c_i \text{ depende del flujo } v_k^j \end{cases} \tag{11}$$

donde v_k^j es el flujo del arco de transporte público j que utiliza la línea k. En el último caso, la sumatoria sobre k' considera todas las líneas l, pertenecientes al conjunto de líneas atractivas del arco j, de las cuales depende c_i.

Cálculo de derivadas parciales

Se sabe que el vector de funciones de costo, y las matrices *J(c)* y *M(c)* dependen del vector completo de flujos en los arcos de transporte público *(V)*. Lo que no se sabe explícitamente es cómo son esas interacciones. Utilizando la matriz *B(c)* previamente definida para el cambio de variables $Z = B(c)\cdot V$, y derivando el costo con respecto al flujo en un arco, se obtiene que

$$\frac{\partial c_i}{\partial V^j} = \frac{\beta n}{(K_i)^n}(z_i)^{n-1}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial V^j} \tag{12}$$

donde $\frac{\partial z_i}{\partial V^j} = b_{ij}$.

La relación (12) se cumple para todas las parejas de arcos de transporte público, existan o no interacciones entre ellos, e incluso cuando *j=i*; ya que es una formulación general. Utilizando (12) se puede plantear una expresión general para los elementos de la matriz *J(c)* en función de los tres tipos de relaciones entre arcos de transporte público que pueden darse:

$$\frac{\partial c_i}{\partial V^j} = \begin{cases} 0 & \text{si } V^j \neq V^i \text{ y } V^j \notin \tilde{V}^i \\ \dfrac{\beta n}{(K_i)^n}\left(V^i + \tilde{V}^i\right)^{n-1} & \text{si } V^j = V^i \text{ o } V^j \in \tilde{V}^i \\ \dfrac{\beta n}{(K_i)^n}\left(V^i + \tilde{V}^i\right)^{n-1}\cdot b_{ij} & \text{si } v_k^j \in \tilde{V}^i \end{cases} \tag{13}$$

Cabe destacar que el segundo caso comprende tanto el caso de las derivadas con respecto al flujo propio como el caso en que c_i depende del flujo completo del arco de transporte público *j* (V^j). Para ambos casos se omitió el termino b_{ij} ya que es igual a 1. El último caso incluye todos los arcos de transporte público *i* para los cuales su costo c_i depende del flujo del arco *j* asociado a sólo algunas de las líneas que componen su conjunto de líneas comunes $\overline{A}_{S_j}$.

Al conocer una expresión general para las funciones de costo, es posible realizar una implementación computacional que permita su cálculo. Dependiendo del tamaño del problema y de la estructura de datos utilizada, esto puede requerir bastante recursos computacionales, en particular para el almacenamiento de la matriz de interacciones *B(c)*. La implementación computacional del calculo del Jacobiano (relación (13)) permite encontrar los valores de la matriz *J(c)* y a partir de ellos, evaluar la matriz *M(c)*, con lo cual se pueden calcular sus rangos, determinantes y valores propios. Esta información puede ser utilizada para determinar si la forma cuadrática asociada a la matriz asimétrica *J(c)* es o no semidefinida positiva, utilizando las relaciones y definiciones expuestas.

4. ANALISIS NUMERICO[4]

Como una forma de complementar y validar el análisis teórico presentado en la sección anterior, se muestran los resultados obtenidos de un análisis numérico para dos redes ejemplo. Este análisis se llevó a cabo utilizando el algoritmo de diagonalización, cuyas condiciones de convergencia son similares a las de unicidad presentadas anteriormente (Dafermos (1982b), Florian y Spiess (1982)). El análisis considera lo siguiente:

- Se resuelve cada red mediante una implementación computacional del algoritmo de diagonalización. El problema es resuelto "n" veces, partiendo de soluciones iniciales diferentes, para luego verificar si la solución obtenida es siempre la misma.
- Las distintas **soluciones iniciales factibles** se generaron en forma aleatoria, de manera de obtener el mayor rango posible de puntos de partida del algoritmo.
- El criterio de convergencia utilizado en la implementación del algoritmo fue la diferencia porcentual entre: el costo total de la red, calculado como la suma (para todos los pares origen-destino) del costo de la ruta mínima, multiplicado por la demanda existente entre ese par (que se denomina *CT_Demanda*):

$$\sum_w C_w^* \cdot T_w \tag{14}$$

  y el costo total de la red, calculado como la suma (para todos los arcos de la red) del costo del arco de transporte público, por su flujo (que se denomina *CT_Flujo*):

$$\sum_s c_s \cdot V^s \tag{15}$$

  En el óptimo, ambas expresiones deben ser iguales, ya que para todas las rutas con flujo, su costo debe ser igual al costo de la ruta mínima. Por otra parte, si la solución no es optima, la expresión (15) siempre será mayor que (14). Cuando se habla de la convergencia[5], se hace referencia al término calculado como:

$$convergencia = \left| \frac{\sum_w C_w^* \cdot T_w - \sum_s c_s \cdot V^s}{\sum_w C_w^* \cdot T_w} \right| \tag{16}$$

- Una simulación o corrida es la obtención de una solución optima del ejemplo, partiendo de una solución inicial específica.
- Una diagonalización es una iteración completa del algoritmo de diagonalización, utilizado en la solución del problema. Por cuanto, si para un ejemplo se realizan 10 simulaciones de 500 diagonalizaciones, se entiende que el ejemplo fue resuelto partiendo de 10 soluciones iniciales diferentes, y en cada caso se resolvió mediante 500 iteraciones del algoritmo.
- Se denomina **Índice de Diferencia Máxima** a la diferencia porcentual que existe entre el menor valor (comparando las distintas simulaciones realizadas para un ejemplo) de la expresión (14), y el mayor valor para el expresión (15). Este índice entrega una cota superior a la diferencia de costos totales en el sistema que puede existir entre las diferentes corridas. Matemáticamente se determina como:

---

[4] Para más detalles del análisis realizado con distintas redes ver Quintana (2003).
[5] Si se hace referencia a la convergencia porcentual, se refiere a: (convergencia)*100%.

$$Diff.\,Max = \frac{\max_{corr}\left\{\sum_s c_s V^s\right\} - \min_{corr}\left\{\sum_w C_w^* T_w\right\}}{\min_{corr}\left\{\sum_w C_w^* T_w\right\}} \tag{17}$$

4.1. Ejemplo: Ciudad Intermedia de Curicó

La red considerada es la red de buses de la ciudad de Curicó, para el año 2000. El problema fue resuelto con diferentes niveles de demanda, utilizando primero la matriz original de viajes en bus [BUS_{ij}]. Luego se ponderó esta matriz para obtener resultados con diferentes niveles de congestión. A continuación se exponen los resultados obtenidos con la matriz [$BUS\text{-}12_{ij}$] [6], las otras conclusiones obtenidas son completamente análogas.

Resultados

Se resolvió el problema partiendo de 100 soluciones iniciales diferentes, con partiendo con 1.000 diagonalizaciones y llegando hasta 10.000, de tal suerte de determinar si las diferencias encontradas en los flujos eran producto de la falta de convergencia del problema o representaban múltiples soluciones óptimas. Algunas de las variaciones obtenidas en los flujos de las secciones de ruta se redujeron al aumentar el número de iteraciones realizadas, pero otras se mantuvieron, como puede verse en la Tabla 1.

Tabla 1
Flujos Optimos (pax/hr) con Distintas Diagonalizaciones, Ejemplo 2, T=[$BUS\text{-}12_{ij}$].

Sección de Ruta	V^{561}	V^{566}	V^{595}	V^{596}	V^{612}
1.000 diagonalizaciones					
Min	26,98	17,29	61,58	98,46	25,99
Max	57,76	42,49	84,58	120,96	57,83
Desviación Estándar	7,62	3,35	5,60	5,87	8,04
10.000 diagonalizaciones					
Min	27,11	17,28	61,58	103,63	26,14
Max	53,46	19,73	84,44	120,85	57,94
Desviación Estándar	7,60	0,77	5,90	5,62	8,56

Las diferencias en los flujos del arco 566 claramente disminuyen al aumentar el número de iteraciones realizadas, por lo que es razonable suponer que eran producto de la falta de convergencia del algoritmo. Sin embargo, los cambios en los flujos de las otras secciones no se reducen, por lo que se puede concluir que estas diferencias representan diversas soluciones óptimas encontradas por el algoritmo. Es importante notar que este tipo de diferencias se **produce sólo en un 7% de los arcos de transporte público**, proporción que representa a una minoría de secciones. Para el 93% de los arcos restantes, la solución puede considerarse única.

Al analizar los costos de las secciones de ruta, se puede ver que las diferencias son bastante menores, en magnitud, que las de los flujos. Observando los valores del costo de viaje por arco, se concluye que los costos no fluctúan en más de cuatro minutos por arco, lo cual implica una variación máxima de 4% entre las distintas corridas. La menor variabilidad de los costos en las

[6] Corresponde a la matriz original, ponderada por un factor de 1,2.

secciones de ruta, lleva a realizar un análisis a nivel más agregado. En la Tabla 2 se muestran los valores extremos de las variables *CT_Demanda* y *CT_Flujo*.

Tabla 2
Costos Totales Mínimos y Máximos e Indice de Dif. Máxima, Ejemplo 2, T=[$BUS\text{-}12_{ij}$].

Valor	*CT_Demanda* (minutos)	*CT_Flujo* (minutos)	Índice de Diferencia Máxima (min)
Min.	370.812	373.111	370.812
Max.	373.437	374.975	374.975
Delta	2.625 minutos	1.864 minutos	4.163 minutos
Diferencia %	0,708%	0,500%	1,123%

De la tabla anterior se puede deducir que hay una cierta variación entre los costos totales para las distintas soluciones encontradas. El **índice de diferencia máxima alcanza las 70 horas**, lo que representa un **1%**. Esta diferencia si bien no es despreciable, para efectos prácticos no es muy importante, dada su magnitud relativamente pequeña en relación al costo total sobre la red. Debe recordarse que este índice es una cota superior de la diferencia entre soluciones "diferentes".

5. CONCLUSIONES

En primer lugar se realizó un análisis teórico del modelo de asignación, que permitió obtener conclusiones respecto de la matriz de Jacobianos del problema. Se pudo determinar que el Jacobiano del problema de equilibrio en redes reales será siempre **singular**. Esto se debe a que la matriz tendrá siempre al menos dos filas linealmente dependientes. Dado que la matriz de derivadas es asimétrica, debe estudiarse la matriz simétrica $M(c)$ asociada (la cual tiene la misma forma cuadrática), para determinar si $J(c)$ es o no definida positiva. Es interesante notar que aunque $J(c)$ sea singular, no necesariamente implica que $M(c)$ también lo sea. Como la matriz $J(c)$ tiene rango bastante menor al máximo (por la gran cantidad de secciones de ruta que generan filas linealmente dependientes), empíricamente se pudo observar que $M(c)$ generalmente será singular. Según esto la forma cuadrática asociada no es definida positiva (ya que no todos sus valores propios positivos), por lo que $J(c)$ no cumple las condiciones suficientes (enunciadas en la sección 2) para asegurar la unicidad de la solución.

En segundo lugar se determinó una expresión que permite determinar los elementos de la matriz de Jacobianos, y en base a estos, evaluar los valores propios de la matriz, determinando si es semidefinida positiva o indefinida. En general se pudo observar que la matriz es de tipo indefinida.

Los resultados anteriores sólo indican que no se cumplen las condiciones suficientes para asegurar unicidad, para complementar el análisis se realizó un análisis numérico. En base a el análisis se puede decir, en forma general, que pueden existir múltiples soluciones óptimas en los ejemplos estudiados, en términos de los flujos en las secciones de ruta. Por otra parte, la multiplicidad del patrón de flujos óptimo no siempre se traduce en diferencias significativas en los costos de las secciones de ruta, ni en los costos totales en la red. Esto se puede atribuir a las siguientes características observadas en el Ejemplo:

- **La multiplicidad de la solución ocurre a nivel local en la red**, esto implica que sólo un porcentaje reducido de las secciones de ruta presenta variaciones en sus flujos: 93% de las secciones tienen el mismo flujo.
- Las diferencias de flujo generan variaciones en los costo de las secciones de ruta relativamente menores (en magnitud), dado que éstos dependen no sólo del flujo del arco, pero también del flujo compitente.
- La combinación de las propiedades anteriores tiene como consecuencia que la variación en los costos totales en la red es proporcionalmente menor que los cambios en los flujos: Índice de Diferencia Máxima 1,12%.

Dadas las características de las soluciones múltiples encontradas, se cree que su impacto en las aplicaciones prácticas del modelo no es significativo, pero sí debe tenerse en cuenta. Este aspecto del problema es particularmente interesante, ya que en la práctica, el problema de asignación estudiado, se inserta dentro del marco de un modelo de equilibrio simultáneo o secuencial que se utiliza principalmente para evaluar proyectos sobre el sistema de transporte de una ciudad. **Al no variar significativamente los costos en el sistema entre las soluciones encontradas, no se verán afectadas las conclusiones de la evaluación**. No obstante, al considerar evaluaciones de proyectos de menor envergadura o de carácter más táctico, se debe tener en consideración la posibilidad de encontrar más de una solución. A pesar de esto, es importante recordar que un modelo de asignación es sólo una representación de la realidad, y trae consigo errores que pueden producir variaciones en la solución mayores que las encontradas en este análisis. Los errores asociados intrínsecamente al modelo son producto de las simplificaciones hechas a la red (en lo que se refiere a codificación de las redes), de los errores en los datos de entrada del modelo (generados tanto por errores de toma de datos, como de los modelos de predicción utilizados), e inevitablemente de los supuestos de comportamiento de los usuarios.

REFERENCIAS

Aashtiani, H. Z. (1979) **The Multimodal Traffic Assignment Problem.** Ph.D Thesis, Sloan School, MIT.

Beckmann, M. J., C. B. McGuire y C. B. Winsten (1956) **Studies in the Economics of Transportation.** Yale University Press.

Chriqui, C. y P. Robillard (1975) Common Bus Lines. **Transportation Science, Vol. 9, 115-121.**

Correa, J. (1999) **Asignación de flujos de pasajeros en redes de transporte público congestionadas.** Tesis de Ingeniería, Universidad de Chile.

Dafermos, S. C. (1971) An Extended Traffic Assignment Model with Applications to Two-Way Traffic. **Transportation Science, Vol. 5, 366-389.**

Dafermos, S. C. (1980a) Traffic Equilibrium and Variational Inequalities. **Transportation Science, Vol. 14, 42-54**.

Dafermos, S. C. (1982a) The General Multimodal Network Equilibrium Problem with Elastic Demands. **Networks, Vol. 12, 57-72**.

Dafermos, S. C. (1982b) Relaxation Algorithms for the General Asymmetric Traffic Equilibrium Problem. **Transportation Science, Vol. 16, 231-240**.

Florian, M. y H. Spiess (1982) The Convergence of Diagonalization Algorithms for Asymmetric Network Equilibrium Problems. **Transportation Research, Vol. 16B, 477-483**.

Friesz, T. L. (1981) An Equivalent Optimization Problem for Combined Multiclass Distribution, Assignment and Modal Split which Obviates Symmetry Restrictions. **Transportation Research, Vol. 15B, 361-369**.

Greene, W. H. (1999) **Análisis Econométrico, Tercera Edición.** Prentice Hall Iberia.

Hearn, D. W., S. Lawphongpanich y S. Nguyen (1984) Convex Programming Formulations of the Asymmetric Traffic Assignment Problem. **Transportation Research, Vol. 18B, 357-366**.

Nagurney, A. (1993) **Network Economics: A Variational Inequality Approach.** Kluwer Academic Publishers.

Quintana, P. (2003) **Análisis de la Unicidad del Problema de Asignación de Viajes a Redes de Transporte Público con Costos Asimétricos.** Tesis de Magíster, Departamento de Ingeniería de Transporte, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Smith, M. J. (1979) The Existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibria. **Transportation Research, Vol. 13B, 295-304**.

Spiess, H. (1983) **On Optimal Route Choice Strategies in Transit Networks.** Pub. 286, Centre de Recherche sur les Transports, U. de Montreal.

Spiess, H. y M. Florian (1989) Optimal Strategies: A New Assignment Model for Transit Networks. **Transportation Research, Vol. 23B, 83-102**.