

---

## MODELOS ENTROPICOS PARA OFERTA RESIDENCIAL, ALGORITMOS DE SOLUCION Y APLICACIONES

Francisco Martínez, Carlos Jara

Universidad de Chile

Casilla 228-3 Santiago

Fax: 56-2-6718788

e-mail: [fmartine@cec.uchile.cl](mailto:fmartine@cec.uchile.cl), [cjara@ing.uchile.cl](mailto:cjara@ing.uchile.cl)

### RESUMEN

A pesar de la complejidad de modelar la oferta en el mercado residencial la estrategia predominante para modelarla ha sido simple mediante métodos econométricos consistentes con la teoría micro-analítica, asumiendo que los agentes disponen de información perfecta. Una alternativa es asumir información imperfecta, introduciendo escenarios con incertidumbre, como en Martínez y Roy (2003) donde se utiliza la entropía de Shannon como medida de la incertidumbre para un mercado de equilibrio estático con unidades de oferta discretas generadas por una cadena de producción de agentes un mercado competitivo. En este marco, se obtiene una familia de modelos que reproducen distintas hipótesis sobre los niveles de competencia en el mercado y la interacción entre etapas consecutivas. En este trabajo se estudia la aplicación de los modelos que asumen competencia perfecta en dos casos de interacción entre etapas: los modelos no-restringidos, en que la oferta en cada etapa es igual a la demanda de la etapa siguiente, y los modelos restringidos en los cuales la oferta excede la demanda. Analizamos las condiciones de equilibrio y sus expresiones analíticas, proponemos algoritmos correspondientes y estudiamos su convergencia para cada etapa y el sistema completo.

## 1. INTRODUCCION

Al estudiar los modelos disponibles para la oferta residencial, sorprende ver que su nivel de complejidad es básico comparados con modelos similares para la demanda residencial. Varios de ellos únicamente buscan reproducir los resultados observados de este proceso, usualmente asumiendo una formulación econométrica basadas en funciones sin base teórica que son calibradas a partir de los datos disponibles. Una aproximación alternativa ha sido introducir incertidumbre en la modelación del mercado del desarrollador de viviendas – la etapa final en la cadena de producción-, como en el modelo de NYSIM (Anas 1992, 1995) en el cual el dueño de cada unidad en la oferta total de viviendas decide vender (arrendar) o no, usando un modelo logit de utilidad aleatoria. Otro enfoque consiste en introducir una componente estocástica a través del concepto de máxima entropía, como lo propone Wilson (1970), interpretando la entropía como la falta de información o como una medida del nivel de incertidumbre. Este enfoque permite justificar teóricamente varias de las formulaciones que utilizan la noción intuitiva de accesibilidad, por ejemplo Hansen (1959).

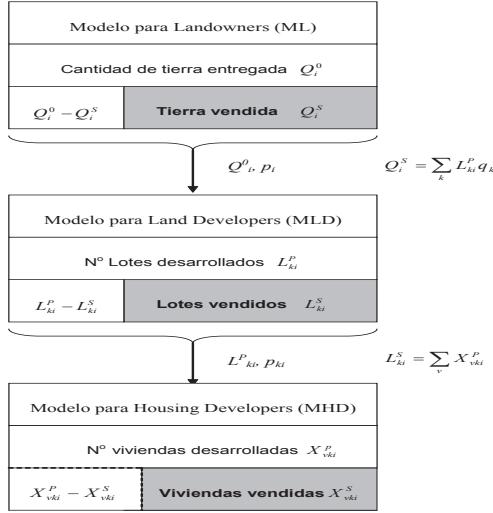
Más recientemente, Martínez y Roy (2003) propusieron una familia de modelos de oferta residencial que describen un proceso multi-etapas de producción de viviendas, modelando la incertidumbre a través del principio de máxima entropía. Una novedad en este enfoque es que analiza una cadena con tres etapas de producción considerando las diferencias potenciales entre los agentes de cada etapa: los dueños de suelo (LO), los urbanizadores del suelo (LD) y los desarrolladores de bienes inmuebles (HD). En este marco de estudio, cada agente maximiza una utilidad estocástica sujeta a un conjunto de restricciones. Usando diferentes funciones entrópicas, el equilibrio está definido ya sea bajo la condición de oferta igual a demanda, o como producción vendida mayor que la demanda. La condición sobre competencia perfecta o imperfecta se modela con una especificación apropiada de la interacción entre los agentes de una etapa y los de la etapa siguiente. Siguiendo el enfoque introducido por Lesse (1982), que aplica transformadas de Legendre a cada función de entropía, los autores demuestran que el problema de maximizar entropía es equivalente a la maximización de una ganancia estocástica para cada agente.

En este artículo, analizamos la implementación de los modelos de Martínez-Roy para competencia perfecta y presentamos algoritmos de solución para los problemas de optimización que surgen de dicha implementación. Luego de la presentación de los modelos de oferta en la Sección 2, analizamos las condiciones de equilibrio en la Sección 3, mostramos un conjunto de algoritmos de solución en la Sección 4, y los resultados de la implementación de los modelos se entregan en la Sección 5.

## 2. FORMULACION DE LOS MODELOS

### 2.1. Estructura del Mercado y Modelo de Comportamiento

El primer elemento fundamental de este modelo es descomponer el proceso de generación de la oferta residencial en tres etapas distintas de producción, cada una con sus respectivos (y no necesariamente los mismos) agentes, como se muestra en la Figura 1. Estas tres etapas forman la cadena de producción de la oferta residencial.



**Figura 1: Esquema del Modelo de Oferta de Martínez-Roy**

Para cada etapa del proceso de generación, se asume un mercado libre competitivo, en el cual cada agente maximiza la entropía correspondiente sujeto a restricciones lineales de dos tipos principales: restricciones que reflejan información conocida sobre niveles de producción agregados, y una restricción que refleja el nivel de ganancia en el cual está produciendo el agente.

De los dos escenarios de mercado que fueron considerados por Martínez-Roy - el mercado perfecto con niveles de precios exógenos para los agentes de producción, y otro imperfecto en que los agentes pueden predecir la demanda de la etapa siguiente y ajustan su producción a dicha demanda , analizaremos aquí el caso de competencia perfecta, para los casos de modelos no restringidos, con demanda igual a oferta, y modelos restringidos en los cuales hay excedentes de oferta.

## 2.2. El Problema de Oferta de Máxima Entropía

En cada etapa de producción se aplica un esquema similar que comprende resolver un problema de optimización de la forma:

$$\text{Max}_{Y_j^e} S(Y_j^e) \text{ sujeto a: } G(Y_j^e) = \pi^e, \quad h(Y_j^e) = h^0 \quad (\text{P})$$

en que  $e$  indica la etapa de la cadena de producción,  $Y^e$  es el correspondiente vector multidimensional de producción,  $S$  la función de entropía correspondiente a la etapa,  $G(.)$  es la función de ganancia para la etapa,  $h(.)$  es una función lineal (eventualmente vectorial de  $k$  componentes) que representa los niveles totales de producción;  $\pi^e$  y  $h^0$  las restricciones de ganancia y producción(es) total(es) respectivamente.

Para resolver el problema (P), calculamos su correspondiente Lagrangeano  $\Lambda(Y^e, \alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$  en que  $\alpha$  es el multiplicador correspondiente a la restricción de ganancia y  $\gamma_k$  es el multiplicador para cada una de las  $k$  componentes de la función  $h(\cdot)$ . Imponemos las condiciones de 1er orden  $\frac{\partial \Lambda(Y^e, \alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_k)}{\partial Y_j^e} = 0$  para cada  $j \in J$ . Los algoritmos de solución que se muestran en la sección 4 buscan los multiplicadores correspondientes a las soluciones óptimas de (P).

La restricción de ganancia tiene la forma  $\sum_{j \in J} Y_j^e (p_j^e - c_j^e) = \pi^e$  en que  $p_j^e$  son los niveles de precios para cada componente del vector de producción, y  $c_j^e$  los costos necesarios para alcanzar dicho vector de producción. Notemos que asumimos que toda la producción  $Y_j^e$  se vende; si esto no se cumple, lo anterior es válido para  $Y_j^{eS}$ , la producción efectivamente vendida. Además, para cada una de sus  $k$  componentes, la restricción de producción total tiene la forma  $\sum_{j \in J'} Y_j^e = Y^0$  en que  $J'$  es un subconjunto de  $J$  que representa una agrupación o agregación de componentes de  $J$ . El uso práctico de estas restricciones es ajustar al modelo – a través de los multiplicadores de Lagrange correspondientes – a un conjunto de información observada  $Y^0$ , y las denominamos restricciones “informativas”.

Al aplicar las condiciones de 1er orden se obtienen dos tipos de términos genéricos en las fórmulas de las componentes del vector de producción: uno que denominamos de comportamiento  $\alpha^e(p_j^e - c_j^e)$  y otro llamado de información  $\sum_k \gamma_k^e$ .

Por otra parte, es interesante considerar la siguiente interpretación económica del modelo. De resultados conocidos de optimización se sabe que resolver (P) es equivalente a maximizar el Lagrangeano correspondiente, esto es:

$$\text{Max}_{Y^e, \alpha^e, \gamma^e} S(Y^e) + \sum_k \gamma_k (h_k(Y^e) - h_k^0) + \alpha^e (G(Y^e) - \pi^e) \quad (\text{L})$$

Cuando el parámetro  $\alpha^e$  es exógeno al problema de optimización, entendiéndose por ello que el agente de producción no tiene capacidad para influir en él, y asumiéndolo positivo, (P) y (L) son equivalentes a:

$$\text{Max}_{Y^e, \gamma^e} \frac{1}{\alpha^e} (S(Y^e) + \sum_k \gamma_k (h_k(Y^e) - h_k^0)) + G(Y^e) + K \quad (\text{SP})$$

con  $K$  una constante que puede obviarse en la optimización. La función objetivo en (SP) puede interpretarse como una ganancia estocástica no-restringida, consistente en la suma de una parte determinística,  $G(Y^e)$ , y el resto la parte estocástica. El multiplicador  $\alpha^e$  puede interpretarse como una medida de la cantidad de información presente en el sistema: si  $\alpha^e$  tiende a  $+\infty$  (caso de información perfecta), el agente productor tiende a maximizar su ganancia determinística al definir su producción óptima.

Esta interpretación también se puede derivar, como lo hace Lesse, a través de la transformada de Legendre. Al calcular  $(1/\alpha)$  por la transformada de la función objetivo de entropía total  $F$ , la convertimos en una función objetivo equivalente no restringida, la cual puede identificarse con la ganancia estocástica esperada. Como se muestra en Martínez y Roy (2003), para esta ganancia estocástica se cumple el Lema de Hotelling para las tres etapas de producción, que establece que la función de oferta neta del productor es igual a la derivada con respecto al precio de su función de ganancia. Cabe notar que la interpretación de ganancia esperada requiere normalizar las variables de producción  $Y^e$  que se interpretan como una distribución de probabilidades.

### 2.3. Modelos por Etapa

En la Tabla 1 reproducimos (a partir de Martínez y Roy, 2003) el término de entropía del modelo y la solución para cada etapa en la cadena de producción. La notación es la siguiente:

- $Q_i$  es la cantidad total de suelo disponible en la zona  $i$ ,
- $L_{ki}$  es el número total de lotes tipo  $k$  en la zona  $i$  en la etapa,
- $X_{vki}$  es el número total de viviendas de tipo  $v$ , en lotes tipo  $k$  en la zona  $i$ .

Además, los costos de producción en cada etapa, exceptuando los insumos de la etapa anterior, se suponen exógenos y denotan  $\bar{c}_i$ ,  $\bar{c}_{ki}$  y  $\bar{c}_{vki}$  respectivamente<sup>1</sup>. Los precios de venta de bienes inmuebles  $r_{vki}$  también se asumen exógenos. Los superíndices “S” y “P” para los modelos restringidos se refieren a totales vendidos y producidos respectivamente. La diferencia en las unidades de las cantidades producidas entre las etapas 1 (con unidades de área) y 2 (con unidades de número de lotes de suelo) hace necesario introducir los factores de conversión  $q_k$ , que representan el área de suelo en los lotes de tipo  $k$ .

Es claro que las soluciones se caracterizan por el término  $\alpha^e \frac{\partial \pi^e}{\partial Y^e} + \gamma^e$  con  $\gamma^e = \sum_k \gamma_k^e$ . Debido a

que la expresión de entropía es similar, todas las fórmulas de los modelos no restringidos son similares para cada las tres etapas de la cadena de producción. Para los modelos restringidos, se utiliza la función de entropía de Fermi-Dirac, que genera una diferenciación entre la producción ofertada por los agentes y la fracción efectivamente vendida, representada por los términos del tipo  $-\left(Y^P - Y^S\right)\left[\log\left(Y^P - Y^S\right) - 1\right]$  en las funciones de entropía. Esta diferencia refleja la existencia de algún nivel de stock en la producción. El término “I”, presente en la expresión de la restricción de ganancia, es la tasa de interés y da cuenta del costo de mantener en stock la cantidad de producción no vendida.

## 3. EQUILIBRIO

Las etapas de producción sucesivas dependen mutuamente a través de los precios, los cuales alcanzan un equilibrio al imponer condiciones de consistencia entre el nivel de producción de una etapa y la demanda de la etapa siguiente, lo que genera un conjunto de ecuaciones de punto

<sup>1</sup> Los parámetros exógenos del modelo se denotan con un sobre-rayado.

fijo, como veremos a continuación. Por lo tanto, el modelo predice valores de equilibrio para los precios condicionales en los valores calibrados de los multiplicadores de Lagrange.

### 3.1. Modelos No Restringidos

Las ecuaciones de consistencia entre etapas son:

$$Q_i = \sum_k L_{ki} q_k \quad L_{ki} = \sum_v X_{vki}$$

Reemplazando las fórmulas (1), (2) y (3) dadas en la Tabla 1, podemos obtener, luego de algún trabajo algebraico, la expresión del precio de equilibrio para una unidad de suelo  $p_i^*$ , dada por:

$$p_i^* = \bar{p}_i + \bar{c}_i + \frac{1}{\alpha_1} \left\{ -\gamma_1 + \ln \sum_k q_k \exp[\gamma_2 + \alpha_2(p_{ki} - p_i^* q_k - \bar{c}_{ki})] \right\} \quad (9)$$

Nótese que los factores de conversión  $q_k$  son responsables por el hecho de no poder resolver la ecuación anterior explícitamente para cada  $p_i^*$ , dejando una ecuación de punto fijo. La expresión para precios de lotes en el equilibrio  $p_{ki}^*$ , está dada por:

$$p_{ki}^* = \frac{1}{\alpha_2 + \alpha_3} \left\{ \alpha_2(p_i q_k + \bar{c}_{ki}) - \gamma_2 + \ln \sum_v \exp[\alpha_3(r_{vki} - \bar{c}_{vki}) + \gamma_3] \right\} \quad (10)$$

Ahora bien, como el vector  $p_{ki}^*$  puede expresarse en función de  $p_i^*$ , las ecuaciones (9) y (10) representan un único conjunto de ecuaciones de punto fijo en  $p_i^*$ :  $f'(p_i^*) = p_i^*$ . Siguiendo a Roy

y Johannson (1987) definimos  $f(p_i^*) = f'(p_i^*) - p_i^* = 0$  y se demuestra que  $\frac{\partial f(p_i^*)}{\partial p_i^*} < 0$  y que

$\lim_{p_i^* \rightarrow +\infty} f(p_i^*) = -\infty$ ; luego la solución del punto fijo existe si y sólo si  $f(p_i^* = 0) > 0$ . En caso contrario, existe un exceso de demanda para lotes  $L_{ki}$  a los niveles de precios mínimos  $p_i = 0$ .

### 3.2. Modelos Restringidos

Imponiendo la condición de consistencia  $\sum_k q_k L_{ik}^P = Q_i^S$  y usando (4) y (5) obtenemos nuevamente una ecuación de punto fijo para el nivel de precio de suelo en el equilibrio  $p_i^*$ :

$$Q_i^o \frac{\exp[\gamma_1 + \alpha_1(p_i^* + \bar{p}_i I - \bar{c}_i)]}{1 + \exp[\gamma_1 + \alpha_1(p_i^* + \bar{p}_i I - \bar{c}_i)]} = \sum_k q_k \frac{1 + \exp[\gamma_2 + \alpha_2(p_{ki} + I p_i^* q_k)]}{\exp[-\phi_2 + \alpha_2(p_i^* q_k + \bar{c}_{ki} + I p_i^* q_k)]} \quad (11)$$

que, como en el caso anterior, no puede resolverse explícitamente para  $p_i^*$ .

De la condición de equilibrio entre lotes vendidos y lotes transformados a viviendas y asumiendo costo de stock igual a cero ( $I=0$ ), obtenemos:

$$p_{ki}^* = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_3} \left\{ -\gamma_2 + \log \sum_v \exp \left[ \gamma_3 + \alpha_3 \bar{c}_{vki} \right] \left[ 1 + \exp(\alpha_3(r_{vki}) + \phi_3) \right] \right\} \quad (12)$$

la cual, a diferencia del caso no restringido, esta no depende de  $p_i^*$ .

Las ecuaciones (11) y (12) pueden expresarse como  $g(p_i^*) = 0$ , y se demuestra que  $\frac{\partial g(p_i^*)}{\partial p_i^*} < 0$  y  $\lim_{p_i^* \rightarrow +\infty} g(p_i^*) < 0$ ; luego la solución del punto fijo existe si y sólo si  $g(p_i^* = 0) > 0$ . En caso contrario, existe un exceso de demanda por lotes a los niveles de precio  $p_i = 0$ .

Notando las similitudes en las condiciones para la existencia de un precio de suelo de equilibrio  $f(p_i^*) = 0$  y  $g(p_i^*) = 0$ , podemos deducir el siguiente Lema:

*Lema: Una condición necesaria y suficiente para existencia de precios de equilibrio global (en  $p_i^*$ ) bajo competencia perfecta es que exista exceso de oferta a precios nulos. Esto es  $g(p_i = 0) = \sum q_k L_{ki}(p_i = 0) - Q_i(p_i = 0) > 0 \forall i$ .*

Agregamos además que predecir valores de equilibrio para los precios de la 3ra etapa requiere de imponer equilibrio entre el modelo de oferta y un modelo de demanda residencial, lo que está fuera del marco de este trabajo.

## 4. ALGORITMOS DE SOLUCION

### 4.1. Modelos No Restringidos

En el caso no restringido la función entrópica a optimizar es similar para cada una de las tres etapas de la cadena de producción y el problema corresponde a maximizar una expresión de entropía cruzada (véase Fang et al. 1997) de la forma  $\sum_j Y_j \log \left( \frac{Y_j}{u} \right)$ , con  $u$  el número de Euler, sujeta a restricciones lineales, esto es:

$\min \sum_j Y_j \log \left( \frac{Y_j}{u} \right)$  s.a.  $\sum_j a_{ij} Y_j = b_i \quad \forall i = 1, \dots, K+1$  donde consideramos  $K$  restricciones de producción y una restricción de ganancia. Para resolver dicho problema, ocupamos el algoritmo MART presentado en Fang et al. (1997) para encontrar los multiplicadores correspondientes a los valores óptimos. El algoritmo MART asegura convergencia a la solución optima - que es única - del problema de minimización de la entropía cruzada, si se cumple la siguiente hipótesis:  $F = \{Y \mid AY = b\}$  tiene interior no vacío,  $b_i \geq 0$ ;  $0 \leq a_{ij} \leq 1 \forall i = 1, \dots, K+1 \forall j = 1, \dots, J$ .

En nuestro caso, asumiendo ganancias positivas, para asegurar que se cumplen las condiciones anteriores, basta escoger unidades de magnitud tal que los niveles de precios y costos sean menores a uno. Debemos notar, sin embargo, que el algoritmo MART únicamente asegura

convergencia pero no permite predecir el signo de  $\alpha$  (multiplicador de la restricción de ganancia). Es crucial entonces verificar si  $\alpha > 0$  para que sea válida la interpretación de ganancia estocástica.

## 4.2. Modelos Restringidos

Para la familia de modelos restringidos, consideramos la convexidad de la función de entropía e implementamos algoritmos basados en el método simplificado de multiplicadores expuesto por Bertsekas (1996), que realiza cálculos sucesivos del vector de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  partiendo de una valor inicial  $\lambda^0$  hasta llegar a sus valores óptimos. Para ello, expresamos el problema (P) como una minimización de una función convexa (igual a  $-S$ , con  $S$  la función de entropía) sujeta a restricciones lineales.

Puede demostrarse que las funciones de entropía, para cada una de las tres etapas de producción en el caso de modelos restringidos, son funciones  $C^2$  y convexas. En consecuencia, se tiene el siguiente resultado de convergencia para nuestro caso: si el vector inicial de multiplicadores de Lagrange  $\lambda^0$  está suficientemente cercano al vector óptimo  $\lambda^*$ , el Método de Multiplicadores converge a la solución óptima.

## 5. IMPLEMENTACION DEL MODELO

Con los modelos presentados anteriormente consideraremos ahora dos temas de implementación, los procesos de calibración y predicción. La calibración de los multiplicadores consiste obtener una estimación de los multiplicadores óptimos de Lagrange  $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})$  mediante los algoritmos anteriormente expuestos. Con estos valores se derivan los correspondientes valores óptimos de la oferta  $(\hat{Q}, \hat{L}, \hat{X})$  con las fórmulas de la Tabla 1. La predicción del precio de equilibrio, por su parte, utiliza los valores calibrados  $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})$  aplicados a los puntos fijos que se resuelven usando el método de bisección.

### 5.1. Aplicación a la Ciudad de Santiago

Aplicamos el modelo a la ciudad de Santiago, considerando 34 zonas ( $I=34$ ), 5 tipos de lotes ( $K=5$ ) y 3 tipos de viviendas ( $V=3$ ). Para implementar los algoritmos anteriores, se usaron los datos siguientes. Los precios de las viviendas, por zonas, tipos de lote, y tipos de viviendas ( $r_{vki}$ ), se estimaron de datos de arriendo obtenidos de la encuesta Origen-Destino de 1991. Los precios de los lotes, por zonas y tipos,  $p_{ki}$ , y precios de suelo  $p_i$  por zonas se obtuvieron de información disponible correspondiente al año 1997. Los costos de producción se estimaron, debido a la falta de datos, como una fracción de 10% de los niveles de precios correspondientes. Adicionalmente, se efectuaron ajustes en la base de datos de niveles de precios de suelo  $p_i$  para asegurar que  $p_{ki} > p_i * q_k$  para cada par  $(k, i)$ . No se disponía de datos para los niveles de ganancia para cada etapa de producción, por lo tanto se fijaron arbitrariamente para el análisis de sensibilidad efectuado. Tampoco se disponía de datos para los niveles de producción total , por lo tanto se fijaron en valores arbitrarios. Naturalmente, los valores arbitrarios de ganancia y de niveles de producción total se definen de manera que el problema de optimización sea factible.

## 5.2. Ilustración de Resultados Obtenidos y Comentarios

En las simulaciones nos centramos particularmente en la sensibilidad de los modelos al nivel de las restricciones de ganancia, con restricciones de información arbitrarias. Notemos que, la ganancia arbitraria tiene un rango “factible” para cada etapa, definido por:

$$\min_i \left( \frac{\partial \pi^e}{\partial Y_i} \right) \leq \pi^e \leq \max_i \left( \frac{\partial \pi^e}{\partial Y_i} \right).$$

**Modelos no-restringidos:** A partir de las ecuaciones (1), (2) y (3) y dado que  $\partial \pi^e / \partial \alpha^e > 0$ , podemos mostrar vía derivación implícita que  $\partial \alpha^e / \partial \pi^e > 0$ . Luego, para los valores de diferenciales precio-costo fijos, valores más altos en las restricciones de ganancia resultarán en concentrar la producción en las zonas en que el diferencial precio-costo es más alto. Este efecto se muestra en la Figura 2, en que el número de lotes producidos de tipo 5,  $L_{5i}$ , se muestra para tres diferentes niveles de restricción de ganancia (ganancia2=50.000, 100.000 y 200.000).

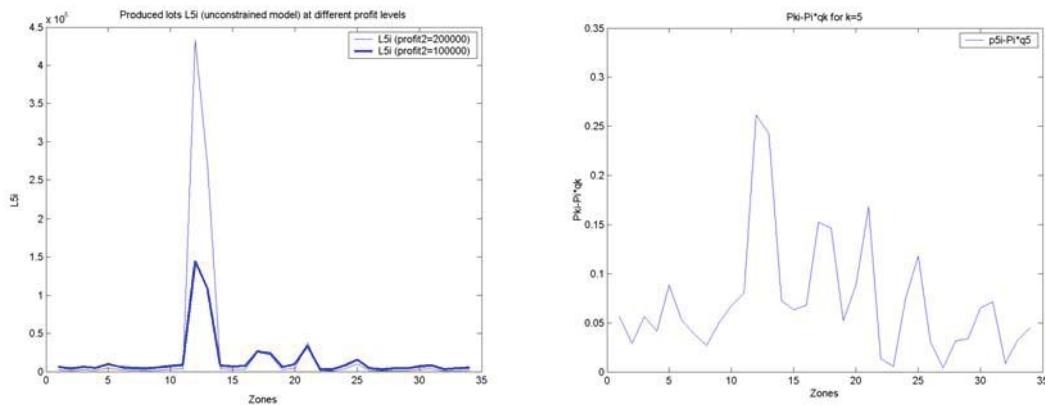
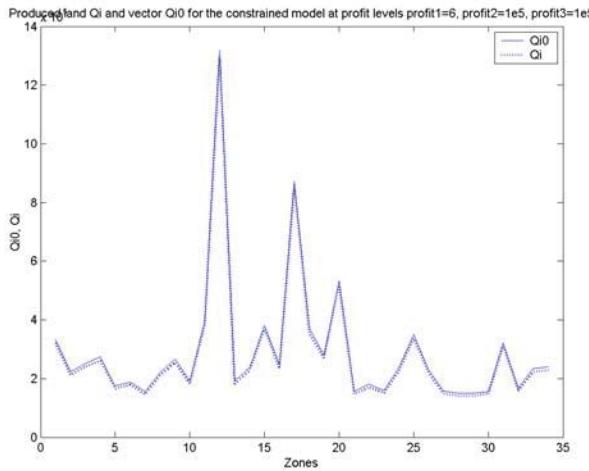


Figura 2: Producción y Diferencial de Precios Dos Niveles de Ganancias ( $k=5$ )

Diferentes restricciones de ganancias resultan en diferentes valores calibrados para los multiplicadores  $\alpha$ , y por lo tanto en diferentes niveles de precios de equilibrio predichos. En la Figura 3 se muestran 2 niveles de precios de equilibrio predichos, donde valores más altos de ganancias inducen mayores valores de precios predichos.

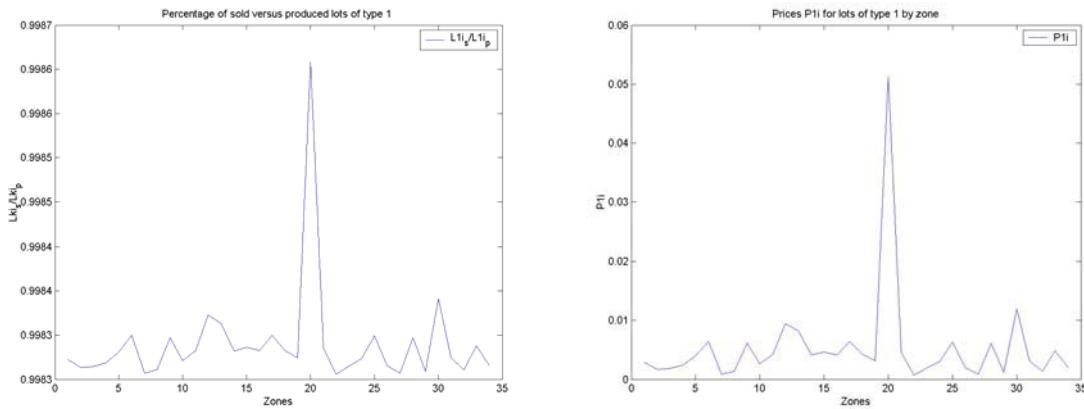
Figura 3: Precios de Equilibrio para Modelo No-Restringido y Dos Niveles de Ganancia

**Modelos restringidos:** Para estos modelos, según la Tabla 1, se requiere conocer valores iniciales en la etapa de Dueños de Suelo (LO) antes de implementar el modelo.



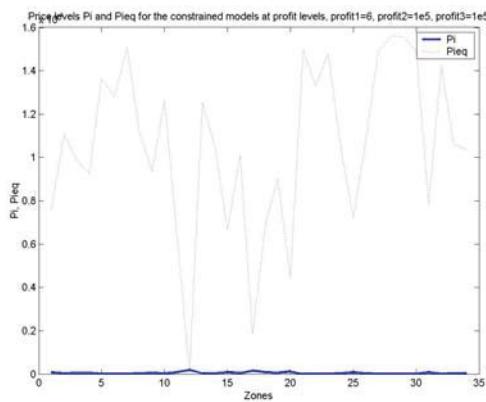
**Figura 4:  $Q_i$  y  $Q_{i0}$  en Modelo Restringido para un Conjunto Dado de Ganancias**

La característica principal del modelo restringido es la diferencia entre vectores de producción y efectivamente vendida, por lo que es relevante analizar la variación del porcentaje de lo vendido en relación a la producido. El análisis permite concluir que la forma de la entropía de Fermi-Dirac impone una elasticidad precio-oferta que crece cuando el gap entre lo vendido y lo producido tiende a cero. Luego, la observación en el mercado real de las diferencias entre lo vendido y los producido entrega una medida del nivel de ganancia correspondiente al escenario observado. La Figura 5 ilustra este resultado, donde se ve que los porcentajes de lo vendido más altos para lotes de tipo 1 se dan en las zonas correspondientes a los valores más altos para los precios de lotes de tipo 1,  $p_{1i}$ .



**Figura 5: Porcentaje de Lotes Tipo 1 Vendidos, a Nivel de Ganancia Dada.**

Se observa que para el modelo restringido, se produce un ajuste muy importante en el precio de equilibrio comparado con el nivel de precios iniciales. Este hecho está ligado con el hecho que el vector inicial  $Q_{i0}$  (arbitrario) se tomó distante del vector  $Q_i$ , lo que induce fuertes ajustes en los precios.



**Figura 6: Precios de Equilibrio e Inicial en Modelo Restringido para Ganancias Dadas.**

## 6. COMENTARIOS FINALES

Este trabajo ha presentado algoritmos de solución para el reciente modelo de oferta residencial de Martínez-Roy, en el caso de competencia perfecta. Los modelos más complejos (modelos restringidos) requieren de datos más completos, los cuales pueden ser eventualmente de difícil acceso, como se ha podido apreciar a través de la implementación de los algoritmos. La falta de información confiable para algunos datos requeridos (valores de precios de producción, valores de producción total) resultó en la simplificación necesaria de ciertos parámetros del modelo, en particular de reducir el número de restricciones de información y, por lo tanto, el número de multiplicadores correspondientes a las restricciones de información es menor que en la formulación original del modelo.

Lo importante es que los algoritmos propuestos tienen buenas propiedades de convergencia. En el caso no restringido, el algoritmo MART asegura convergencia, lo cual permite obtener fácilmente un mapeo de varios valores óptimos de los multiplicadores (correspondientes a distintos valores de las restricciones de ganancia e información). Para el caso restringido, la convergencia del Método de los Multiplicadores está restringida a escoger un punto inicial (valor inicial de los multiplicadores) suficientemente cercano al óptimo. Si es posible acceder a una base de datos de valores de producción (oferta) relacionada con niveles de precios, una estrategia para obtener valores iniciales cercanos al óptimo es calibrar directamente los multiplicadores para dichos niveles de precios a partir de las ecuaciones dadas por la Tabla 1.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el financiamiento de FONDECYT 1010422 y MILENIO P01-34.

## REFERENCIAS

- Anas, A. (1992). **NYSIM, the New York simulation model: a Model of Cost-Benefit Analysis of Transportation Projects**, New York: New York: Regional Planning Ass.
- Anas, A. (1995). Capitalization of Urban Travel Improvements into Residential and Commercial Real Estate: Simulations with a Unified Model of Housing Travel Modes and Shopping Choices. **Journal of Regional Science**, Vol. 35 No 3, pp. 351-375.
- Bertsekas, D. (1996) **Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods**. Athena Scientific.
- Fang, S.-C, Rajasekera, J. R. y Tsao, H.-S. J. (1997). **Entropy optimization and mathematical programming**. Kluwer. Boston.
- Hansen, W. G. (1959). How accessibility shapes land use, **Journal of American Institute of Planners**, 25, pp. 67-72.
- Lesse, P.F. (1982) A Phenomenological Theory of Socio-economic Systems with Spatial Interactions, **Environment and Planning A**, 14, 869-88.
- Martinez, F. y Roy, J. (2003). A Model for residential supply, **Annals of Regional Science (por aparecer)**.
- Roy, J.R. and Johansson, B. (1993). A Model of Trade Flows in Differentiated Goods, **Annals of Regional Science**, Vol. 27, 95-115.
- Wilson, A.G. (1970). **Entropy in Urban and Regional Modelling**. Pion, London.

**Tabla 1**  
**Resumen de Fórmulas de los Modelos de Martínez-Roy para Competencia Perfecta**

	Entropía	Restricción de Ganancia	Modelos de oferta no restringido
LO	$S^L = -\sum_i \{Q_i(\log Q_i - 1)\}$	$\sum_i Q_i(p_i - \bar{p}_i - \bar{c}_i) = \pi^L$	$Q_i = \exp[\alpha_1(p_i - \bar{p}_i - \bar{c}_i) + \gamma_1]$ (1)
LD	$S^{LD} = -\sum_{ki} L_{ki}(\log L_{ki} - 1)$	$\sum_{ki} L_{ki}(p_{ki} - p_i q_k - \bar{c}_{ki}) = \pi^{LD}$	$L_{ki} = \exp[\gamma_{i2} + \eta_k + \alpha_2(p_{ki} - p_i q_k - \bar{c}_{ki})]$ (2)
HD	$S^{HD} = -\sum_{vki} X_{vki}(\log X_{vki} - 1)$	$\sum_{vki} X_{vki}(r_{vki} - p_{ki} - \bar{c}_{vki}) = \pi^{HD}$	$X_{vki} = \exp[\alpha_3(r_{vki} - p_{ki} - \bar{c}_{vki}) + \gamma_3]$ (3)
	Entropía	Restricción de Ganancia	Modelos de oferta restringidos
LO	$S^L = -\sum_i (Q_i^0 - Q_i^S)[\log(Q_i^0 - Q_i^S) - 1]$ $- \sum_i Q_i^S [\log Q_i^S - 1]$	$\sum_i [Q_i^S(p_i - \bar{c}_i) - Q_i^0 \bar{p}_i]$ $- \sum_i -(Q_i^0 - Q_i^S) I \bar{p}_i = \pi^L$	$Q_i^S = Q_i^o \frac{\exp[\gamma_1 + \alpha_1(p_i + \bar{p}_i I - \bar{c}_i)]}{\{1 + \exp[\gamma_1 + \alpha_1(p_i + \bar{p}_i I - \bar{c}_i)]\}}$ (4)
LD	$S^{HD} = -\sum_{ki} L_{ki}^S[\log L_{ki}^S - 1]$ $- \sum_{ik} (L_{ki}^P - L_{ki}^S)[\log(L_{ki}^P - L_{ki}^S) - 1]$	$\sum_{ki} (L_{ki}^S p_{ki} - L_{ki}^P p_i q_k - L_{ki}^P \bar{c}_{ki})$ $- \sum_{ki} (L_{ki}^P - L_{ki}^S) I p_i q_k = \pi^{LD}$	$L_{ki}^P = \frac{[1 + \exp(\gamma_2 + \alpha_2(p_{ki} + I p_i q_k))]}{\exp[-\phi_2 + \alpha_2(-p_i q_k - \bar{c}_{ki} - I p_i q_k)]}$ (5) $L_{ki}^S = \frac{\exp[\gamma_2 + \alpha_2(p_{ki} + I p_i q_k)]}{\exp[-\phi_2 + \alpha_2(-p_i q_k - \bar{c}_{ki} - I p_i q_k)]}$ (6)
HD	$S^{HD} = -\sum_{ki} \left( L_{ki}^P - \sum_v X_{vki}^P \right) \left[ \log \left( L_{ki}^P - \sum_v X_{vki}^P \right) - 1 \right]$ $- \sum_{vki} \left( X_{vki}^P - X_{vki}^S \right) \left[ \log \left( X_{vki}^P - X_{vki}^S \right) - 1 \right]$ $- \sum_{vki} X_{vki}^S \left[ \log X_{vki}^S - 1 \right]$	$\sum_{vki} (X_{vki}^S r_{vki} - X_{vki}^P (p_{ki} + \bar{c}_{vki}))$ $- \sum_{vki} (X_{vki}^P - X_{vki}^S) I p_{ki} = \pi^{HD}$	$X_{vki}^P = L_{ki}^P \frac{\exp(-\rho_{vki}^P) + \exp(-\rho_{vki}^P - \rho_{vki}^S)}{1 + \sum_v [\exp(-\rho_{vki}^P) + \exp(-\rho_{vki}^P - \rho_{vki}^S)]}$ (7) $X_{vki}^S = L_{ki}^P \frac{\exp(-\rho_{vki}^P - \rho_{vki}^S)}{1 + \sum_v [\exp(-\rho_{vki}^P) + \exp(-\rho_{vki}^P - \rho_{vki}^S)]}$ (8) con $-\rho_{vki}^P = \alpha_3(p_{ki} - \bar{c}_{vki} + I p_{ki}) - \gamma_3$ $-\rho_{vki}^S = \alpha_3(r_{vki} + I p_{ki}) + \phi_3$