UN MODELO DE USO DE SUELO CON INGRESO ENDOGENO

Pedro Jara
Depto. de Ingeniería Matemática, U.de Chile,
Blanco Encalada 2120 5º piso, Fax: 6883821,
e-mail: pjara@dim.uchile.cl,

Alejandro Jofré
Centro de Modelamiento Matemático, U.de Chile,
Blanco Encalada 2120 7º piso, Fax: 6889705,
e-mail: ajofre@dim.uchile.cl

Francisco Martínez
Departamento de Ingeniería Civil, División Transporte, U. de Chile,
Blanco Encalada 2120 4º piso, Fax: 6894206,
e-mail: fmartine@ing.uchile.cl

RESUMEN

En el presente trabajo se introduce un nuevo modelo de equilibrio en uso de suelo basado en un proceso de intercambio de bienes de consumo y localización (vivienda), incluyendo ingresos endógenos. Definimos dos posibles condiciones de equilibrio de mercado: mediante remates (bid-rent theory) y maximización de utilidad (utility maximization approach). Se demuestra que, en el marco del modelo, ambos enfoques son equivalentes bajo condiciones débiles. Además, se establece un resultado de existencia para el enfoque de maximización de utilidad.

1. INTRODUCCION

En la historia del estudio del Uso de Suelo se puede distinguir dos grandes enfoques para modelar la toma de decisiones de agentes económicos que buscan localizarse en una ciudad y el mecanismo de asignación de los recursos de localización. El primero es el enfoque de subastas, establecido desde los trabajos de Von Thünen (ver Von Thünen, 1966) y Alonso (1964), en el cual los agentes compiten por el uso del suelo con su disposición a pagar. En el segundo enfoque, los agentes eligen su localización maximizando su utilidad dados los precios del suelo que están fijos (Anas, 1982). Podemos destacar los trabajos que introducen la Teoría de Utilidad Aleatoria y Elecciones Discretas (McFadden, 1978). En ambos enfoques se buscan precios de equilibrio que permitan que todos los agentes, siguiendo el proceso correspondiente, puedan localizarse. En Martínez (1992) se discute sobre estas dos grandes líneas de modelos. Se reconoce que estos dos enfoques parecen ser distintos, sin embargo, se argumenta a favor del hecho que estos enfoques en realidad son equivalentes, en el sentido de que entregan la misma distribución de ciudad, y complementarios, en el sentido de que entregan información complementaria sobre el mecanismo de ajuste de mercado y comportamiento de los consumidores.

En este trabajo se formaliza y generaliza esta intuición. Para poder hacer un juicio sobre la equivalencia de los enfoques es necesario mirar las condiciones de equilibrio de cada uno, y para poder compararlas se necesita definirlas en un único contexto económico general que sea suficientemente flexible para soportar ambos enfoques. En el presente documento se introduce un nuevo marco teórico para un modelo de localización que puede sustentar los dos enfoques. En la sección 2 se define una economía de intercambio con localización. Sobre éste marco, en la sección 3, se define, de manera precisa, qué se entiende al usar cada uno de los dos enfoques mencionados. En la sección 4 se encontrarán condiciones para las cuales efectivamente se puede hablar de equivalencia entre éstos sin necesidad de restringir la forma de las funciones de disposición a pagar. El modelo describe una economía de intercambio en que se busca equilibro de mercado para dos tipos de bienes: consumo y localización. En la sección 5 se entrega un resultado de existencia para el equilibrio con maximización de utilidad. En esta versión del modelo se asume que la interacción vía externalidades de localización ocurre en una extensión dinámica del mismo. Para mayores detalles en las propiedades de las funciones involucradas y demostraciones referirse a Jara (2003).

2. ECONOMIA DE INTERCAMBIO CON LOCALIZACION

Comenzamos presentando el modelo de localización, en el que toda la propiedad está concentrada en los agentes participantes. El modelo se basa en una economía de intercambio en la que uno de los bienes es la localización. Consideremos un número finito de agentes a localizarse, denotados por $h \in \{1, ..., \bar{h}\}$. Cada agente es un representante de un grupo homogéneo de consumidores con tamaño N_h, el cual es un elemento de una partición del total de consumidores. En esta economía, existe un número finito de alternativas de localización disponibles, particionadas en categorías por tipo de construcción v y zona i; y existe un número f_{vi} de construcciones de cada tipo $vi \in \mathcal{V} := \{1, ..., \bar{v}\} \times \{1, ..., \bar{\imath}\}$. El uso del suelo está descrito por una matriz $H \in \mathbb{R}_+^{\bar{h} \times \bar{v} \times \bar{\imath}}$ cuyo valor para cada hvi, H_{hvi}, indica el número de agentes de tipo h localizados en viviendas de tipo v en la zona i. Cada alternativa vi está completamente caracterizada por un vector de atributos $z_{vi}(H) \in \mathbb{R}^a$, donde a es el número de atributos, que incluye, entre otros, el tamaño del terreno, un conjunto de características de construcción, índices de calidad del vecindario o zona, ventajas de accesibilidad y atractividad, etc.. La dependencia en H viene del hecho que algunos atributos que describen las localizaciones y el entorno de éstas están condicionadas al uso del suelo. Es decir, en el vector z_{vi} está considerada la información que tiene que ver con la estructura de la ciudad, que influye en las decisiones de los agentes. Los agentes deciden su consumo en bienes y dónde localizarse. El número total de bienes es $l+1$. Para un agente h las cantidades consumidas de los primeros l bienes, están dadas por el vector $x \in I\!R^l$; mientras que en localización se consume sólo una unidad. Luego, el consumo de un agente es un vector,

$$(x^h, x^h_{l+1}) = (x^h_1, ..., x^h_l, vi) \in I\!R^l \times \mathcal{V}.$$

La localización de firmas que proveen bienes y servicios también se ve afectada por H, por lo que el conjunto de consumos factibles para cualquier agente h en cualquier zona i también se ve afectado. Este efecto es modelado por el operador multívoco $X_h : I\!R_+^{\bar{h}\times\bar{v}\times\bar{\imath}} \rightrightarrows I\!R^l_+$ de manera que a cada h se le asocia un conjunto de consumos factibles que asumimos al menos convexo y cerrado, y que también incluye a los bienes que no se ven afectados por H, pero no incluye a la localización. El vector $x \in I\!R^l_+$ se podría detallar como el conjunto de actividades realizadas por el agente, incluyendo bienes, servicios y tiempo, y el operador X_h puede incluir dependencias tales como restricciones de tiempo, espaciales y/o tecnológicas, entre otras. Esta interpretación podría incluir, entonces, las especificaciones descritas por Jara-Díaz y Martínez (1999) para el problema del consumidor que enfrenta este tipo de decisiones. En contraste con el modelo clásico, la dotación está dividida en dos componentes. Una asociada a la propiedad de viviendas, denotada $w^h \in [0,1]^{\bar{v}*\bar{\imath}}$, y otra asociada a la propiedad del resto de los bienes, denotada $e^h \in I\!R^l_{++}$, independiente de la localización. El término w^h_{vi} entrega la fracción del valor de una localización de tipo vi que recibe un agente de tipo h. Asumimos que cada localización es completamente propiedad de algún conjunto de agentes participantes por lo que debemos tener $\sum_{h=1}^{\bar{h}} w^h_{vi} = 1$. El ingreso del agente h está dado por el valor de su dotación inicial relativo a un par de vector de precios (p, r), y es igual a $p \cdot e^h + r \cdot w^h$. Este agente puede comprar un vector de bienes x^h y localizarse en vi siempre que $x^h \in I\!R^l_+$ y que el valor $p \cdot x^h + r_{vi}$ no exceda su ingreso. Siguiendo el enfoque de Teoría de Elecciones Discretas se define un conjunto de presupuesto, en el que la localización es fija. El *Conjunto de Presupuesto Condicional en la Localización* vi, es el conjunto[1]:

$$C_{hvi}(p,r) := \left\{ y \in I\!R^l_+ \ : \ p \cdot y \leq p \cdot e^h + r_{-vi} \cdot w^h_{-vi} - r_{vi}(1 - w^h_{vi}) \right\}, \tag{1}$$

Cada agente tiene una función de utilidad $U_h : I\!R^l_+ \times I\!R^a \to I\!R$ que depende de un vector de consumo $x \in I\!R^l_+$, que no incluye localización, y un vector $z \in I\!R^a$ que representa atributos de localizaciones. Diremos que el agente h prefiere (estrictamente) un vector $(x, vi) \in I\!R^l_+ \times \mathcal{V}$ a $(y, v'i') \in I\!R^l_+ \times \mathcal{V}$, si y sólo si $U_h(x, z_{vi}) \geq U_h(y, z_{v'i'})$ $(>)$. De esta manera, la función de utilidad representa una relación de preferencias racional sobre $I\!R^l_+ \times \mathcal{V}$. Como nos interesa seguir un enfoque de Elecciones Discretas, se estudiarán las preferencias condicionales en las localizaciones. Entonces, en este contexto supondremos que las funciones de utilidad $U_h(\ \cdot \ , z_{vi})$ son semi-continuas superiores, cuasi-cóncavas, localmente no saciadas y no decrecientes en cada coordenada x_j de x, para cualquier par $vi \in \mathcal{V}$. Con todos estos elementos podemos establecer el marco del modelo.

[1] r_{-vi} es la notación habitual para el vector de precios de todas las localizaciones salvo vi, y w^h_{-vi} es el vector de dotación en localización del agente h salvo por su dotación de vi.

Definición 1. *Una* Economía de Intercambio con Localización *con $\hbar \in I\!N$ clases de agentes, $\bar{v} \in I\!N$ tipos de localización, en una ciudad con $\bar{\imath} \in I\!N$ zonas, es una tupla:*

$$\langle (U_h, e^h, w^h, X_h)_{h=1}^{\hbar}, (z_{vi})_{vi \in \mathcal{V}} \rangle.$$

Donde $U_h : I\!R_+^l \times I\!R^a \to I\!R$, $X_h : I\!R_+^{\hbar \times \bar{v} \times \bar{\imath}} \rightrightarrows I\!R_+^l$, $z_{vi} : I\!R_+^{\hbar \times \bar{v} \times \bar{\imath}} \to I\!R^a$, $e^h \in I\!R_{++}^l$, $w^h \in [0,1]^{\bar{v} * \bar{\imath}}$. Cada clase h (vi) de agentes (localizaciones) tiene tamaño N_h (f_{vi}).

3. EQUILIBRIO

Los agentes reciben ingreso por su dotación inicial de bienes y posesiones de localización de manera que su capacidad de consumir está determinada, de manera endógena, por los precios de equilibrio de todos los bienes. Dada una Economía de Intercambio con Localización y una estructura de ciudad H_0, podemos obtener funciones de utilidad indirecta y de disposición a pagar y conjuntos óptimos de consumo para cada agente en cada localización. Éstas herramientas se usarán para obtener una nueva estructura de ciudad como consecuencia del intercambio de bienes entre consumidores y su decisión de localización, bajo los dos posibles mecanismos de asignación de localización: Subastas y Maximización de Utilidad. La condición de equilibrio es que todos los agentes deben estar localizados y la demanda agregada por bienes de consumo debe ser satisfecha.

Dado $p \in I\!R_+^l$ y $r \in I\!R_+^{\bar{v} * \bar{\imath}}$, el agente h elige, en cada localización vi, algún punto $d_{hvi} = (x, vi) \in I\!R_+^l \times \mathcal{V}$ que maximice su utilidad en vi. Entonces d_{hvi} debe estar en el Conjunto de Presupuesto Condicional en la Localización $C_{hvi}(p, r)$, definido en (1), y en $X_h(H_0)$. Definimos entonces el *Problema de Maximización de Utilidad, Condicional en la Localización*.

Definición 2. *Llamamos* Problema de Maximización de Utilidad, Condicional en la Localización*, notado $(\mathcal{P}_{hvi})$, al siguiente problema:*

$$(\mathcal{P}_{hvi}) \qquad \sup_{x \in I\!R^l} \left\{ U_h(x, z_{vi}(H_0)) : \ x \in C_{hvi}(p, r) \cap X_h(H_0) \ \right\}$$

El valor de $(\mathcal{P}_{hvi})$, es una función que a una tupla (vi, p, r) le asocia:

$$V_{hvi}(p, r, z_{vi}(H_0)) := \sup_{x \in I\!R^l} \left\{ U_h(x, z_{vi}(H_0)) : \ x \in C_{hvi}(p, r) \cap X_h(H_0) \ \right\}, \tag{2}$$

y la llamamos Función de Utilidad Indirecta, Condicional en la Localización*. La* Aplicación de Demanda Maximizadora de Utilidad, Condicional en la Localización *entrega el conjunto :*

$$D_{hvi}(p, r, z_{vi}(H)) := \operatorname*{argmáx}_{x \in I\!R^l} \left\{ U_h(x, z_{vi}(H_0)) : \ x \in C_{hvi}(p, r) \cap X_h(H_0) \ \right\} \tag{3}$$

La Función de Utilidad Indirecta, Condicional en la Localización vi, para el agente h es la mayor utilidad alcanzable en vi por h a precios (p, r), dada la estructura H_0 de la ciudad. Es importante notar que la dependencia de vi viene, no sólo de evaluar la utilidad directa U_h en el vector z_{vi}, si no también de la restricción de presupuesto que define al conjunto $C_{hvi}(p, r)$ (ver ecuación (1)).

Las Funciones de Disposición a Pagar nos dicen cuánto está dispuesto a pagar un agente h por una localización vi para obtener un nivel específico de utilidad u dado un vector de precios de bienes y localización (excepto vi). En el contexto actual, en contraste con el modelo Bid-Choice (Martínez, 1992), en el que el ingreso es fijo y el consumo en otros bienes no se considera, obtendremos una aplicación de consumo óptima como función de estas variables y condicional en la localización. La siguiente definición está íntimamente relacionada con el problema dual en Teoría Clásica del Consumidor de Minimización de Gasto. Siguiendo la definición en Jara (2003) la Disposición a Pagar se calcula como lo que más puede pagar un agente h por localizarse en vi dado un nivel de utilidad y los precios.

Definición 3. *La* Función de Disposición a Pagar *del agente h por la localización vi, notada $B_{hvi}(u, p, r_{-vi}, z_{vi}(H_0))$, se define como:*

$$B_{hvi}(u, p, r_{-vi}, z_{vi}(H_0)) := \sup_{(b,x)} \left\{ b \in I\!R_+ : \begin{array}{c} p \cdot x + b(1 - w^h_{vi}) \leq p \cdot e^h + r_{-vi} \cdot w^h_{-vi} \\ U_h(x, z_{vi}(H_0)) \geq u \\ x \in X_h(H_0) \end{array} \right\}. \quad (4)$$

Definimos la Aplicación de Consumo a Mínimo Gasto*, como:*

$$D_{hvi}(u, p, z_{vi}(H_0)) := \text{argmín} \left\{ p \cdot x : \begin{array}{c} U_h(x, z_{vi}(H_0)) \geq u \\ x \in X_h(H_0) \end{array} \right\}. \quad (5)$$

En esta definición, el agente h elige la canasta de consumo más económica que entregue un nivel de utilidad u. La condición $b \in I\!R_+$ asegura consistencia en le sentido de que un agente no podrá localizarse donde no tenga ingreso disponible (si la menor cota para b es negativa entonces $B = -\infty$) y en que se obtenga la factibilidad del consumo en la restricción de presupuesto. Los agentes entregan una demanda condicional çomo si"estuviesen pagando su disposición a pagar en cada localización, lo que es completamente racional.

3.1. Definición de Equilibrio

Los agentes en la economía deben localizarse y, dada su localización, la demanda agregada por bienes de consumo debe ser satisfecha. Por consistencia , y dado que las opciones de localización son fijas, asumimos que el número total de viviendas es igual al número de agentes a localizarse. También asumimos que no hay propiedad de localización concentrada en un único dueño de manera de obtener buenas propiedades para las funciones de disposición a pagar, es decir $\forall$ $hvi \in \left\{1, ..., \bar{h}\right\} \times \mathcal{V}$, $w^h_{vi} \in [0, 1[$. Para un tratamiento más profundo de esta situación ver Jara (2003).

Equilibrio con Subastas: Siguiendo el enfoque de Alonso (1964), los precios de las localizaciones se determinan mediante subastas en las que las posturas de los agentes son las funciones de disposición a pagar. La localización se asigna mediante la regla del mejor postor. La asignación y precios de equilibrio deben satisfacer una condición de Equilibrio de Walras en los bienes de consumo

Para describir la asignación usamos una matriz $\mu \in M_{\bar{h} * \bar{v} * \bar{\imath}}\{[0, 1]\}$ cuyos coeficientes μ_{hvi} indican la proporción de consumidores del tipo h elegidos mediante la regla del mejor postor en localizaciones de tipo vi. Cada columna de μ, μ_{vi} se puede ver como una distribución de probabilidad sobre el conjunto $\{1, ..., \bar{h}\}$. Con esto, μ_{hvi} puede entenderse como la probabilidad de que un agente de tipo h sea mejor postor en una localización de tipo vi. Para cada localización tendremos entonces una distribución sobre los tipos de consumidores. Cada columna μ_{vi} de μ, satisface entonces, $\mu_{vi} \in \Delta_{\hbar}$[2].

Definición 4. *Un vector* $(\bar{u}, \bar{p}, \bar{r}, \bar{\mu}) \in I\!R^{\hbar} \times I\!R^{l}_{+} \times I\!R^{\bar{v}*\bar{\imath}}_{+} \times \prod_{vi} \Delta_{\hbar}$ *es un* Equilibrio de Localización con Subastas *si satisface :*

$$\begin{array}{rrcll} (i) & 0 & = & \bar{\mu}_{hvi}(B_{hvi}(\bar{u}_h, \bar{p}, \bar{r}_{-vi}, z_{vi}(H_0)) - \bar{r}_{vi}) & \forall \;\; hvi \\ (ii) & N & \leq & \bar{\mu} f & \\ (iii) & 0 & \leq & \sum_h e^h N_h - \sum_h \sum_{vi} \mu_{hvi} f_{vi} d_{hvi} & \\ (iv) & \bar{r}_{vi} & = & \text{máx}_h \, B_{hvi}(\bar{u}_h, \bar{p}, \bar{r}_{-vi}, z_{vi}(H_0)) & \forall \;\; vi \end{array}$$

donde $d_{hvi} \in D_{hvi}(\bar{u}, \bar{p}, \bar{r}_{-vi}, z_{vi}(H_0))$ *para todo* vi *tal que* $\bar{\mu}_{hvi} > 0$.

La condición (i) dice que si hay agentes de tipo h asignados a vi, entonces su disposición a pagar es igual al precio del inmueble. La condición (ii) asegura que todos los agentes participantes se localicen en algún lugar[3]. La ecuación (iii) es la condición de Walras en el mercado de bienes de consumo y (iv) dice que los precios de las localizaciones se obtienen por remates. El número de agentes de tipo h asignados a localizaciones de tipo vi es $H_{hvi} := \mu_{hvi} f_{vi}$, lo que entrega la nueva matriz de localización H_1 que reemplaza a H_0. Por último hay que observar que para determinar la demanda agregada del cluster h en la ecuación (iii), sólo se consideran las localizaciones vi para las cuales $H_{hvi} > 0$.

Equilibrio con Maximización de Utilidad: Según la Teoría de Elecciones Discretas, los agentes deciden el consumo de una unidad de un bien que está disponible en un conjunto finito de alternativas caracterizadas por sus atributos, maximizando su utilidad en dos pasos. En contexto del modelo, cada agente resuelvo su problema de maximización de utilidad condicional a la localización para cada alternativa de vivienda y luego elige la alternativa que le reporta una mayor utilidad, dado un vector de precios (ver por ejemplo Mc Fadden, 1978; Annas, 1982). Los precios y asignaciones de equilibrio deben satisfacer que se satisfaga la demanda en todos los mercados.

Al igual que antes, la descripción de la asignación está dada por la matriz $\mu \in M_{\hbar * \bar{v} * \bar{\imath}}\{[0,1]\}$ donde ahora las columnas de μ satisfacen $\mu_h \in \Delta_{\bar{v}*\bar{\imath}}$[4], pues ahora son los agentes los que eligen vivienda en oposición al enfoque de remates donde las viviendas eligen sus moradores a través de las subastas. Entonces, la cantidad de agentes que eligen viviendas de tipo vi se calcula como $H_{hvi} := \mu_{hvi} N_h$, y la condición ”Todos se Localizan”se cumple automáticamente[5] por lo que sólo hay que pedir que todas las viviendas estén ocupadas.

[2] $\Delta_{\hbar} := \left\{ \mu_{vi} \in I\!R^{\hbar}_{+} \; : \; \sum_h \mu_{hvi} = 1 \right\}$

[3] por la suposición de que hay igual cantidad de agentes y localizaciones, en equilibrio, la condición (ii) se tendrá que satisfacer con igualdad y se tendrá que todas las localizaciones están ocupadas

[4] $\Delta_{\bar{v}*\bar{\imath}} := \left\{ \mu_h \in I\!R^{\bar{v}*\bar{\imath}}_{+} \; : \; \sum_{vi} \mu_{hvi} = 1 \right\}$.

[5] Claramente la suma de H_{hvi} sobre vi es igual a N_h por lo que todos los agentes h están localizados

Definición 5. *Un vector* $(\bar{p}, \bar{r}, \bar{\mu}) \in I\!R^l_+ \times I\!R^{\bar{v}*\bar{\imath}}_+ \times \prod_h \Delta_{\bar{v}*\bar{\imath}}$ *es un* Equilibrio de Localización Walrasiano*, si satisface:*

$$\begin{array}{rrcl} (i) & 0 & = & \bar{\mu}_{hvi}(V_{hvi}(\bar{p}, \bar{r}, z_{vi}(H_0)) - \bar{u}_h) \qquad \forall \;\; hvi \\ (ii) & f & \leq & \bar{\mu}^T N \\ (iii) & 0 & \leq & \sum_h e^h N_h - \sum_h \sum_{vi} \bar{\mu}_{hvi} N_h d_{hvi} \\ (iv) & \bar{u}_h & = & \text{máx}_{vi}\, V_{hvi}(\bar{p}, \bar{r}, z_{vi}(H_0)) \end{array}$$

donde $d_{hvi} \in D_{hvi}(\bar{p}, \bar{r}, z_{vi}(H_0))\ \forall\ hvi$ *tal que* $\mu_{hvi} > 0$.

Las condiciones (i) y (iv) imponen que los agentes se localicen sólo en lugares que maximicen su utilidad. La condición (ii) es la condición de Walras en el mercado de viviendas y la condición (iii) es la condición de Walras en mercados de bienes.

4. SUBASTAS v/s MAXIMIZACION DE UTILIDAD

En Rosen (1974) y Martínez (1992) se estudia la maximización de utilidad relativo a los atributos de los bienes de consumo. En el modelo Bid-Choice (Martínez, 1992), la maximización del excedente del consumidor se usa para ilustrar un resultado intuitivo de equivalencia entre los enfoques de subastas y maximización de utilidad en Modelos de Uso de Suelo. Sin embargo, el desarrollo está limitado a Funciones de Utilidad Indirecta lineales en r_{vi} lo que no necesariamente se ajusta a las propiedades clásicas de éstas funciones ni a las propiedades las Funciones de Disposición a Pagar, como se puede ver Jara (2003). En esta sección nos enfocamos a obtener condiciones para obtener, de manera general, equivalencia entre los dos enfoques en el contexto del modelo; sin embargo, los mismos argumentos se pueden usar para concluir equivalencia en modelos con ingreso fijo y sin endogeneidad del mercado de bienes de consumo. Se compararán las condiciones de equilibrio descritas en las Definiciones 4 y 5.

Proposición 1. *Si* $U_h(\;\cdot\;, z_{vi}(H_0))$ *es continua, sea* $(\bar{u}, \bar{p}, \bar{r}, \bar{\mu})$ *un Equilibrio de Localización con Subastas, tal que* $\forall\ h \in \{1, ..., \bar{h}\}$,

$$\bar{u}_h \;\; \geq \;\; \text{máx}_{\{vi\,:\,\bar{\mu}_{hvi}>0\}} \{u^{min}_{hvi}(\bar{p})\},$$

donde $u^{min}_{hvi}(\bar{p})$ *es la mayor utilidad que entregan las canastas de consumo de menor valor en* $X_h(H_0)$. *Entonces,*

$$\bar{\mu}_{hvi} > 0 \implies V_{hvi}(\bar{p}, \bar{r}, z_{vi}(H_0)) = \underset{(vi)'}{\text{máx}}\, V_{h(vi)'}(\bar{p}, \bar{r}, z_{vi}(H_0))$$

Demostración.
De las definiciones 2 y 3 podemos calcular el valor de la Función de Utilidad Indirecta Condicional en los valores de equilibrio, para un agente h que, en equilibrio, sea mejor postor en vi y no en $(vi)'$, obteniendo:

$$V_{hvi}(\bar{p}, \bar{r}, z_{vi}(H_0)) \;\; \geq \;\; \bar{u}_h \;\; > \;\; V_{h(vi)'}(\bar{p}, \bar{r}, z_{(vi)'}(H_0))$$

Es decir, en un Equilibrio de Localización con Subastas el nivel de utilidad alcanzado por los agentes en sus asignaciones, es mayor al que alcanzarían si se localizaran en otra alternativa a precios de equilibrio. Sin embargo, no podemos asegurar que el nivel de utilidad de equilibrio $\bar{u}_h$, se el nivel que efectivamente alcanzan los agentes de tipo h al localizarse según el equilibrio con subastas[6]. Por lo tanto falta probar que

$$\bar{\mu}_{hvi} > 0 \Longrightarrow V_{hvi}(\bar{p}, \bar{r}, z_{vi}(H_0)) = \bar{u}_h.$$

Esto se obtiene de la condición $\bar{u}_h \geq u_{hvi}^{min}(\bar{p})$, pues esta implica que

$$d_{hvi} \in D_{hvi}(\bar{u}_h, \bar{p}, z_{vi}(H_0)) \quad \Rightarrow \quad U_h(d_{hvi}, z_{vi}(H_0)) = \bar{u}_h,$$

ya que si no, utilizando la convexidad de $X_h(H_0)$ y de los conjuntos de nivel de U_h y la continuidad de U_h podemos encontrar otro consumo de menor valor que entregue un nivel de utilidad mayor que $\bar{u}_h$ contradiciendo la ecuación (5) y la definición 4.

De la condición de subasta y la definición de las funciones involucradas se puede concluir que para cualquier $x \in X_h(H_0) \cap C_{hvi}(\bar{p}, \bar{r})$, se debe tener $U_h(x, z_{vi}(H_0)) \leq \bar{u}_h$ con lo que se concluye el resultado

Esta proposición nos permite identificar Equilibrios de Localización con Subastas en que los agentes estén maximizando su utilidad a localizarse.

Ahora estudiaremos las condiciones de asignación de maximización de utilidad para establecer condiciones que permitan concluir que un Equilibrio de Localización Walrasiano proviene de un proceso de remate. Para esto debemos verificar que los agentes asignados a las distintas viviendas sean mejores postores en éstas, por lo que debemos calcular las funciones de Disposición a Pagar de todos los agentes en todas las localizaciones y evaluarlas en un punto que satisface las condiciones de Equilibrio de Localización Walrasiano.

Proposición 2. *Sea $(\bar{p}, \bar{r}, \bar{\mu}')$ un Equilibrio de Localización Walrasiano. Definiendo:*

$$\begin{aligned} \bar{u}_{hvi} &:= V_{hvi}(\bar{p}, \bar{r}, z_{vi}(H_0)) \\ \bar{u}_h &:= \max_{vi} \bar{u}_{hvi} \end{aligned}$$

Si $(\bar{p}, \bar{r}, \bar{\mu}')$ satisface la siguiente condición:

$$\bar{u}_{hvi} = \bar{u}_h \Longrightarrow D_{hvi}(\bar{p}, \bar{r}, z_{vi}(H_0)) \subseteq \mathrm{int} X_h(H_0) \tag{6}$$

Entonces:

$$\begin{array}{lllll} \text{(i)} & \bar{u}_{hvi} = \bar{u}_h & \Longrightarrow & B_{hvi}(\bar{u}_h, \bar{p}, \bar{r}_{-vi}, z_{vi}(H_0)) = \bar{r}_{vi} \\ \text{(ii)} & \bar{u}_{hvi} < \bar{u}_h & \Longrightarrow & B_{hvi}(\bar{u}_h, \bar{p}, \bar{r}_{-vi}, z_{vi}(H_0)) < \bar{r}_{vi} \end{array}$$

[6]Pues en alguno de los lugares donde un agente es mejor postor, podría obtener un nivel estrictamente mayor que el de equilibrio, y además el nivel de utilidad efectivo no es necesariamente igual en todos los lugares asignados

Demostración.
El segundo ítem es simple de obtener de las definiciones 3 y 2. También es fácil ver que si $\bar{u}_{hvi} = \bar{u}_h$, entonces $B_{hvi}(\bar{u}_h, \bar{p}, \bar{r}_{-vi}, z_{vi}(H_0)) \geq \bar{r}_{vi}$. Sin embargo, en un Equilibrio de Localización Walrasiano es posible que un agente maximice su utilidad en un lugar en el cual no está asignado. La condición (6) nos permite concluir que si ese es el caso, su Disposición a Pagar en tal lugar es menor que el precio de equilibrio. Si la Disposición a Pagar fuese estrictamente mayor que el precio de equilibrio, entonces la condición (6) permite encontrar un consumo que entregue una utilidad estrictamente mayor a $\bar{u}_h$ lo que es una contradicción. Esto implica que los precios de localizaciones provienen de una subasta.

Corolario 3. *Si $X_h(H_0) \equiv I\!R^l_+$ y $(\bar{p}, \bar{r}, \bar{\mu}')$ es un Equilibrio de Localización Walrasiano, con $\bar{p} >> 0$. Entonces los precios $\bar{r}$ son el resultado de una subasta.*

Las Proposiciones 1 y 2 y el Corolario 3 permiten establecer el siguiente resultado.

Teorema 4 (Equivalencia). *Si las funciones de utilidad $U_h(\,\cdot\,, z_{vi}(H_0))$ son continuas, $X_h(H_0) \equiv I\!R^l_+$, y se satisfacen las siguientes condiciones :*

(i) $\forall\ z \in I\!R^a, \quad \inf_{x \in I\!R^l_+} U_h(x, z) = U_h(0, z) = u_h^{min}$ *para algún* $u_h^{min} \in I\!R$
(ii) $\bar{p} >> 0$.

Entonces:

$$\begin{array}{lcl} (\bar{p}, \bar{r}, \bar{\mu}') \text{ es un Equilibrio de} & \Longleftrightarrow & (\bar{u}, \bar{p}, \bar{r}, \bar{\mu}) \text{ es un Equilibrio} \\ \text{Localización Walrasiano} & & \text{de Localización con Subastas} \\ & & \text{con } \bar{u}_h \geq u_h^{min} \end{array}$$

donde $\bar{u}_h := \max_{vi} V_{hvi}(\bar{p}, \bar{r}, z_{vi}(H_0))$; y se tiene la siguiente relación:

$$\bar{\mu}'_{hvi} N_h = \bar{\mu}_{hvi} f_{vi}$$

El argumento central de esta equivalencia es simplemente la monotonicidad de las Funciones de Disposición a Pagar en la utilidad. Las condiciones del Teorema 4 permiten invertir, en los puntos de equilibrio, las Funciones de Utilidad Indirecta para obtener las de Disposición a Pagar evaluadas en tales puntos, lo que lleva a la conclusión. El mismo argumento se puede usar para demostrar la equivalencia mencionada en el Modelo Bid-Choice (Martínez, 1992).

5. EXISTENCIA

Presentamos un resultado de existencia de equilibrio para el enfoque de Maximización de Utilidad. Haremos los siguientes supuestos: $X_h(H_0) \equiv X$, definido por, $X := \left\{x \in I\!R^l_+ : x \leq e\right\}$[7], de

[7] e es la oferta total de bienes de consumo de la economía

manera que X es compacto. Además de lo mencionado en la Sección 2, consideramos Funciones de Utilidad directa continuas estrictamente cóncavas y positivas y que satisfacen:

$$\begin{aligned} \exists\, j \text{ tal que } x_j = 0 \quad &\Rightarrow \quad U_h(x, z_{vi}(H_0)) = 0 \\ x >> 0 \quad &\Rightarrow \quad U_h(x, z_{vi}(H_0)) > 0. \end{aligned}$$

es decir, los agentes siempre prefieren un consumo estrictamente positivo, sin importar la localización; y $\forall\, vi\ u_h^{max} = U_h(e, z_{vi}(H_0)) > U_h(x, z_{vi}(H_0))\ \forall\, x \in X$[8].

Consideramos el conjunto $P_{hvi} := \left\{(p,r) \in I\!R_+^{l+\bar{v}*\bar{\imath}} : pe^h + rw^h - r_{vi} \geq 0\right\}$. Para que la demanda del agente h sea no vacía y la utilidad mayor que $-\infty$ buscamos precios en el conjunto $P_h = \cup_{vi\in\mathcal{V}} P_{hvi}$. Además queremos que los precios (p,r) pertenezcan a todos los conjuntos P_h, por lo que el conjunto de precios es P, dado por $P := \left(\bigcap_{h\{1,\ldots,\bar{h}\}} \bigcup_{vi\in\mathcal{V}} P_{hvi}\right)$

Por último, suponemos que:
1. $\forall\, (p,r) \in \Delta$[9] $\forall\, h\, \exists\, vi$ tal que $I_{hvi}(p,r) > 0$. Para cualquier par de precios en Δ todos los agentes pueden consumir una canasta estrictamente positiva en alguna localización[10].
2. $I_{hvi}(0,r) \neq 0\ \ \forall\, hvi\ \ \ \forall\, r$ tal que $(0,r) \in \Delta$.
Los supuestos hechos sobre las funciones de utilidad implican que si el ingreso es estrictamente positivo en alguna localización, entonces la Utilidad Indirecta Condicional también lo es. Si $I_{hvi}(p,r) = 0$ y $p \neq 0$, el agente h sólo puede consumir en vi bienes j tales que $p_j = 0$, por lo tanto $p_j > 0$ implica $d_{hvi}^j = 0$ y luego $V_{hvi}(p, r, z_{vi}(H_0)) = 0$. El supuesto 1. implica que $\Delta \subseteq P$ por lo que nos restringimos a Δ que es compacto. Por 1. y 2., obtenemos que para cualquier vector de precios los agentes maximizan su utilidad en un lugar que entregue ingreso estrictamente positivo.

Teorema 5 (Existencia). *Bajo todos supuestos mencionados, entonces existe un* Equilibrio de Localización Walrasiano .

Demostración.
Para obtener el resultado generamos una aplicación de exceso de demanda para todos los mercados, φ. Se demuestra que un par de precios $(\bar{p}, \bar{r})$ que satisface $0 \in \varphi(\bar{p}, \bar{r})$ genera un Equilibrio de Localización Walrasiano. Con las suposiciones hechas, podemos concluir que esta aplicación satisface las hipótesis del Teorema Debreu-Gale-Nikaïdo (Aubin, 1997) lo que entrega la existencia de tal vector de precios.

6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha desarrollado un nuevo marco teórico para modelar las decisiones de localización de las personas en un entorno urbano. Se definió lo que es una economía de intercambio con localización. Al estar la propiedad de los bienes de la economía, concentrada en los agentes

[8] Una función Cobb Douglas satisface todas las propiedades pedidas
[9] $\Delta := \left\{(p,r) \in I\!R_+^{l+\bar{v}*\bar{\imath}} : \sum_{j=1}^{l} p_j + \sum_{vi\in\mathcal{V}} r_{vi} = 1\right\}$
[10] $I_{hvi}(p,r) := p \cdot e^h + r \cdot w^h - r_{vi}$

participantes, los ingresos de los agentes son endógenos y dependen de los precios de equilibrio. Se incorporan nuevas restricciones sobre el consumo, distintas a las restricciones de presupuesto, como por ejemplo, restricciones de tiempo, capacidad o espaciales. Estas restricciones se modelan mediante una multiaplicación que depende de la estructura de la ciudad. Se definen entonces dos tipos de equilibrio. El Equilibrio de Localización con Subastas, en que los agentes compiten por localizarse con sus disposiciones a pagar y los precios de localizaciones se obtienen con remates; y el Equilibrio de Localización Walrasiano, en el que los agentes eligen las localizaciones que les reportan mayor utilidad, dados los precios de los bienes y localizaciones. Se presentó un nuevo método de cálculo, más simple y directo y que además extiende la génesis teórica de estas funciones conocida hasta ahora. Las funciones de disposición a pagar se obtienen directamente del problema de minimización de gasto de los consumidores. Así, toda la complejidad que se agrega al problema condicional en la localización, con la incorporación de las restricciones definidas por la multiaplicación mencionada anteriormente, es traspasada directamente al problema de gasto mínimo y se evitan las indefiniciones producidas por el cálculo habitual de las disposiciones a pagar. Se establece uno de los resultados principales de este trabajo, a saber, en qué condiciones son equivalentes un equilibrio de localización mediante subastas y un equilibrio de localización mediante maximización de utilidad. Para funciones de utilidad continuas en el consumo, se demuestra que, si para una tupla de equilibrio se cumple que las demandas por consumo en las localizaciones asignadas se encuentran en el interior del conjunto de consumo, tal tupla es un equilibrio de localización con subastas, y que maximiza utilidad. Se concluye el trabajo demostrando un resultado de existencia de equilibrio de localización mediante maximización de utilidad para el caso de funciones de utilidad continuas y estrictamente cóncavas. Para este último resultado sólo se considera la restricción de ingreso en el problema del consumidor.

REFERENCIAS

Alonso, W. (1964). **Location and Land Use**. Cambridge, Harvard University Press.

Anas, A. (1982). **Residential Location Markets and Urban Transportation**. Academic Press, London.

Aubin, J.P.(1997). **Optima and Equilibria**. Springer Verlag.

Jara, P. (2003). **Un Modelo de Equilibrio en Uso de Suelos con Ingreso Endógeno**. Tesis de Magíster y Memoria de Ingeniero.

Jara-Díaz, S. and Martínez, F.J. (1999). On The Specification of Indirect Utility and Willingness to Pay for Descrete Residential Location Models. **Journal of Regional Science, Vol. 39, 675-688.**

Martínez, F.J. (1992) The Bid-Choice Land Use Model: an Integrated Economic Framework. **Environment and Planning A. Vol. 24, 871-885**.

McFadden,D.L.(1978). Modelling the choice of residential location, in Karlqvist et. al. (eds), **Spatial Interaction Theory and Planning Models**. North-Holland, Amsterdam, 75-96.

Von Thünen, J.H. (1863). See **Von Thünen Isolated State**, (ed) Peter Hall, Pergamon Press, London (1966).