

MODELO DE OPTIMIZACIÓN PARA LA COMPRA DE MATERIAL RODANTE DE METRO DE SANTIAGO

Carolina Andrea Matus Morales

Departamento Ingeniería, Gerencia de Operaciones, Metro S.A.

Avda. Libertador Bernardo O'Higgins 1414, 3er Piso – Santiago, Chile

Fono: 56-2-2503401 – Fax: 56-2-2526363

cmatus@metro-chile.cl

RESUMEN

Frente al aumento sostenido de la demanda por el servicio como consecuencia resultado de la expansión continua de la Red de Metro surge la necesidad de optimizar la utilización del material rodante, una variable importante dentro de los costos de la empresa dado su alto valor de adquisición. Luego, en este estudio se presenta un modelo de optimización que permite planificar la inversión en trenes en un horizonte de mediano y largo plazo, minimizando los costos de adquisición y operación de los mismos a partir de un escenario de demandas dado y cumpliendo las restricciones operativas de la Red. Asimismo, el modelo entrega respuestas acerca del dimensionamiento de la flota y variables operativas del sistema.

La modelación del problema se plantea como un problema de programación lineal entera (LIP) basado en una formulación de flujo en redes y para resolverlo se utiliza la herramienta GAMS con el motor C-PLEX.

1. INTRODUCCIÓN

El Gobierno ha nombrado a Metro de Santiago, Eje Estructurante del nuevo Plan de Transporte Urbano para la ciudad de Santiago, conocido como Transantiago. Para enfrentar este desafío se consideró aumentar al doble la cobertura de la red actual, de modo de llegar a puntos estratégicos que faciliten la integración con otros medios de transporte, lo que implicaría un ahorro importante en el tiempo de viaje de las personas.

Frente a esta expansión de la Red y, en consecuencia, al continuo aumento de la demanda, se hace necesario optimizar la utilización de los recursos económicos de la empresa de modo de asegurar el equilibrio operacional y la calidad de servicio por la que siempre se ha caracterizado Metro. El material rodante, el cual es de varios tipos y se utiliza en distintas configuraciones, es un recurso escaso debido a su alto costo de adquisición y además es considerada una variable importante dentro de los costos de la empresa. Por ello se diseña un modelo que optimiza la compra de material rodante a partir de un escenario de demandas dado y cumpliendo las restricciones operativas del sistema.

Hasta la fecha, las compras de trenes se han realizado sólo para enfrentar el crecimiento de demanda producto de la construcción de nuevas líneas o de las extensiones en la Red de Metro. Cuando la demanda por el servicio lo ha requerido se han redistribuido los trenes dentro de la Red, es decir, se han trasladado coches o trenes entre las líneas de modo de reasignar de la mejor manera posible la flota disponible.

El criterio que se utiliza para determinar el requerimiento de trenes es principalmente uno: satisfacer la demanda estimada en los horarios punta. Es decir, cuando los índices de densidad de pasajeros superan la densidad objetivo planeada por Metro, los indicadores de calidad de servicio se ven afectados negativamente. Entonces, se analizan escenarios para la redistribución de trenes entre las líneas. En segundo lugar, se evalúa la compra de trenes o la compra de coches para así aumentar la capacidad de un tren que ya se encuentra en circulación.

2. MODELACIÓN DEL PROBLEMA

El problema se plantea como un modelo de programación lineal entera (LIP) basado en una formulación de flujo en redes que considera la naturaleza dinámica del problema, es decir, las decisiones de un período de tiempo se ven afectadas por las de períodos anteriores, y las decisiones del período actual afectan el comportamiento futuro. Los nodos representan el efecto temporal o dinámico del problema y los arcos el flujo de compra de coches y trenes que existe entre un período y otro. Para resolverlo se utiliza la herramienta GAMS con el motor C-PLEX.

2.1 Conjuntos

s : tipo de tren (configuraciones factibles)

l : línea

t : período (años)

i : tipo de upgrade

c : tipo de coche de trenes NS-74

2.2 Parámetros

$Dda_punta_l^t$: Demanda en una hora punta de la línea l en el período t
$Dda_valle_l^t$: Demanda en una hora valle de la línea l en el período t
δ_l^t	: Densidad máxima planificada en la línea l en el período t
LVn_l^t	: Largo de la vuelta normal de la línea l en el período t
LVb_l^t	: Largo de la vuelta bucle de la línea l en el período t
DVn_l^t	: Duración de la vuelta normal de la línea l en el período t
DVb_l^t	: Duración de la vuelta bucle de la línea l en el período t
Fn_l^t	: Cantidad de vueltas normales de la línea l que recorre un tren en una hora en el período t
Fb_l^t	: Cantidad de vueltas bucle de la línea l que recorre un tren en una hora en el período t
B_s	: Cantidad de coches del tren tipo s
k_s	: Capacidad del tren tipo s
PT_s	: Precio del tren tipo s
PU_i	: Precio del upgrade tipo i de trenes NS-93
α	: Costo unitario del coche-km
W_c	: Cantidad total de coches tipo c de trenes NS-74
A_{sc}	: Cantidad total de coches tipo c de trenes NS-74 asignados al tren tipo s ($\forall s < 10$)
R_c^t	: Cantidad de coches tipo c de trenes NS-74 remanentes para el período t

Estos tres últimos parámetros están asociados al modelamiento de restricciones relativas a la reconfiguración de trenes NS-74.

2.3 Variables

X_s^t	: Cantidad de trenes tipo s operando en el período t
Y_{sl}^t	: Cantidad de trenes tipo s operando en la línea l en el período t
Tbp_{sl}^t	: Cantidad de trenes tipo s circulando durante horas punta en circuito normal de la línea l en el período t
Tnp_{sl}^t	: Cantidad de trenes tipo s circulando durante horas punta en circuito bucle de la línea l en el período t
Tnv_{sl}^t	: Cantidad de trenes tipo s circulando durante horas valle en circuito normal de la línea l en el período t
Tbv_{sl}^t	: Cantidad de trenes tipo s circulando durante horas valle en circuito bucle de la línea l en el período t
C_s^t	: Cantidad de trenes tipo s comprados en el período t
U_i^t	: Cantidad de upgrades tipo i realizados en el período t
ω_{sc}^t	

: Cantidad de coches tipo c correspondientes al tren tipo s en el período t ($\forall s < 10$)

Las primeras seis variables están relacionadas con la disponibilidad de trenes para la operación de cada período y X_s^t es la variable de decisión del modelo ya que un aumento de esta variable implica compras de material rodante.

2.4 Modelo

$$(1) \min \sum_{s,t} \frac{PT_s \times C_s^t}{(1+tax)^t} + \sum_{i,t} \frac{PU_i^t \times U_i^t}{(1+tax)^t} + \alpha \times \sum_{l,t} \left[Fn_l^t \times LVn_l^t \times \sum_s \frac{B_s (HP^t \times Tnp_{sl}^t + HV^t \times Tnv_{sl}^t)}{(1+tax)^t} \right] + \alpha \times \sum_{l,t} \left[Fb_l^t \times LVb_l^t \times \sum_s \frac{B_s (HP^t \times Tbp_{sl}^t + HV^t \times Tbv_{sl}^t)}{(1+tax)^t} \right]$$

s.a.

$$(2) (Fn_l^t \times \sum_s k_s \times Tnp_{sl}^t) + (Fb_l^t \times \sum_s k_s \times Tbp_{sl}^t) \geq 6 \times \delta_l^t \times Dda_punta_l^t$$

$$(3) Fn_l^t \times \sum_s k_s \times Tnv_{sl}^t + Fb_l^t \times \sum_s k_s \times Tbv_{sl}^t \geq Dda_valle_l^t$$

$$(4) IMin_l \times \sum_s Tnp_{sl}^t \leq DVn_l^t$$

$$(5) IMin_l \times \sum_s Tbp_{sl}^t \leq DVb_l^t$$

$$(6) IMin_l \times \sum_s Tnv_{sl}^t \leq DVn_l^t$$

$$(7) IMax_l \times \sum_s Tnp_{sl}^t \geq DVn_l^t$$

$$(8) IMax_l \times \sum_s Tbp_{sl}^t \geq DVb_l^t$$

$$(9) IMax_l \times \sum_s Tbv_{sl}^t \geq DVn_l^t$$

$$(10) DVb_l^t \times \sum_s Tnp_{sl}^t = DVn_l^t \times \sum_s Tbp_{sl}^t$$

$$(11) X_s^t + C_s^t \pm U_i^t = X_s^{t+1}$$

$$(12) W_c = \sum_s \omega_{sc}^t + R_c^t$$

$$(13) \omega_{sc}^t = A_{sc} \times \sum_l Y_{sl}^t$$

$$(14) \sum_s Tnp_{sl}^t + \sum_s Tbp_{sl}^t = Y_{sl}^t$$

$$(15) \sum_s Tnv_{sl}^t + \sum_s Tbv_{sl}^t \leq Y_{sl}^t$$

$$(16) \sum_l Y_{sl}^t = X_s^t$$

2.5 Función Objetivo

La función objetivo, ecuación (1), busca minimizar los costos de inversión en trenes y los costos de operación de los mismos. Ambos costos, de compra y operacionales, se determinan para cada período y para efectos de actualizar estos valores en el tiempo se actualizan a la tasa *tax*.

El costo de inversión queda determinado por la sumatoria de los costos de compra de todos los tipos de trenes y de los upgrades realizados durante el horizonte de tiempo evaluado.

Los costos de operación se obtienen a partir del costo unitario del coche-km que incorpora el costo de energía de tracción, el costo de mantenimiento y el costo asociado a la conducción de trenes multiplicados por la cantidad de coche-km recorridos para la operación en circuito normal y para la operación en circuito bucle. Entonces la cantidad de coche-km anual queda determinada por la cantidad total de coches que circulan durante el año multiplicados por la cantidad de horas de operación en el año. Estas horas de operación son segregadas en horas punta y horas fuera de punta (en adelante valle) de manera de llegar a un balance entre ambos períodos horarios y así no incentivar la compra de gran cantidad de material rodante para las horas punta que luego significará un gran costo operacional injustificable en las horas valle.

2.6 Restricciones

2.6.1 Restricciones de Satisfacción de Demanda

Las ecuaciones (2) y (3) están relacionadas con la calidad de servicio entregada a los clientes y aseguran que la demanda horaria de cada línea para todos los períodos sea satisfecha. Son restricciones críticas del modelo ya que la demanda por el servicio es el parámetro que hace que incremente la variable cantidad de trenes tipo *s* que operan en el período *t* (X'_s). Un incremento de esta variable provoca que las variables de compra, C'_s y U'_i , también aumenten.

Se formulan a partir de la condición básica que define que la oferta debe ser superior a la demanda con el propósito de mantener los estándares de calidad por los cuales Metro siempre ha sido reconocido.

El término de la izquierda de cada ecuación representa la oferta de pasajeros para una hora de operación y ésta debe ser superior a la cantidad de viajes demandados por los pasajeros. La capacidad de oferta queda definida por la frecuencia del servicio y por la capacidad de los trenes. Es claro que esta última puede variar de acuerdo al número de asientos incorporados en los coches pero este efecto no es considerado en este estudio ya que Metro no contempla la eliminación de asientos para no mermar el confort de los usuarios del servicio.

En la restricción de satisfacción de demanda en horas punta, la demanda se pondera por un factor de densidad (δ'_t) con lo que se restringe la cantidad de pasajeros al interior de los coches. Además β es el factor por el cual se calcula la capacidad de los trenes. Para la solución del modelo se consideró $\beta = 6$ aunque en algún estudio futuro se podría considerar este factor como 5 para favorecer la comodidad en los trenes lo cual redundaría en mayores costos de inversión en

material rodante. Vale destacar que, al igual que la cota de densidad (δ_l^t), el parámetro β es un parámetro crítico ya que si son variados el modelo arroja costos distintos.

Es importante destacar que, para este modelo, la demanda es un parámetro dado.

2.6.2 Restricciones de Intervalo Mínimo

Las ecuaciones (4), (5) y (6) obedecen a restricciones operativas de seguridad e impide que dos trenes consecutivos circulen a un intervalo menor que el intervalo mínimo permitido ($IMin_l$). Se aplican para cada horario (horas punta y horas valle) y para cada tipo de circuito (normal y bucle). Se modelan a partir de la ecuación que define que el intervalo entre trenes es igual a la duración de la vuelta dividida por el número de trenes que circulan en la línea. Luego, este último término debe ser mayor o igual al intervalo mínimo definido.

2.6.3 Restricciones de Intervalo Máximo

Las ecuaciones (7), (8) y (9) están orientadas a velar por la calidad de servicio entregada a los clientes. No permite que los trenes circulen a un intervalo mayor al especificado por el parámetro $IMax_l$, es decir, acota el tiempo que esperan los pasajeros por un tren. Este conjunto de restricciones también se modeló a partir de la ecuación del intervalo. Las ecuaciones (7) y (8) acotan el tiempo de espera durante las horas punta, mientras que la tercera ecuación lo hace para los horarios valle. La primera y tercera de ellas lo hacen para los trenes que operan en circuito normal y la segunda para los trenes que operan en circuito bucle.

2.6.4 Restricciones de Reconfiguración de Trenes NS-74

Estas restricciones son empleadas para lograr una mejor utilización de esta flota. La ecuación (12) restringe la cantidad de coches remanentes del tipo NS-74 para cada período. Cabe señalar que la cantidad de trenes de esta flota se mantendrá invariable en el tiempo, así, para cada período la cantidad total de coches de cada tipo (M, N, R y P) utilizados para la operación, ω_{sc}^t , más los coches remanentes R_c^t debe ser igual a la totalidad de los coches disponibles tipo c, W_c . Asimismo esta ecuación asegura la continuidad de los coches NS-74 para cada período.

La ecuación (13) define la cantidad de coches de trenes NS-74 utilizados en la operación para el período t . Esta restricción se modela multiplicando el total de trenes NS-74 utilizados en la operación de cada línea en cada período, Y_{sl}^t , por la cantidad asociada de coches tipo c asignados a la configuración tipo s, A_{sc} .

2.6.5 Restricciones de Sincronización para Trenes de Circuito Normal y Circuito Bucle

Esta restricción (10) está relacionada con la correcta operación de los trenes que circulan en el circuito normal y los que circulan en el circuito bucle de una misma línea. Para ello se establece la relación que deben cumplir ambos intervalos para que todos los trenes puedan operar

sincronizadamente dentro de la línea. La ecuación (10) se modela a partir de la ecuación que define la igualdad que debe existir entre el intervalo de trenes que operan en circuito normal y los trenes que circulan en circuito bucle.

2.6.6 Restricciones de Continuidad de Trenes NS-93

La ecuación (11) expresa la continuidad de flujo de los trenes NS-93 que debe existir entre un período y otro. Especifica que la flota al final de un período debe ser igual a la flota de trenes con la cual se cuenta al inicio del período siguiente. La flota disponible al final de cada período queda determinada por la suma de los trenes utilizados para la operación de ese período más las compras de trenes y los upgrades realizados al final de dicho ciclo. Ello, porque en este modelo se supone sólo la compra de trenes del tipo NS-93.

2.6.7 Restricciones de Equilibrio del Modelo

Estas restricciones tienen relación con el conocimiento de la flota disponible de material rodante a través de todo el horizonte de análisis. El parque disponible varía, por ejemplo, debido a la llegada de trenes nuevos, reconfiguración de trenes o al mantenimiento de trenes.

La ecuación (14) asegura que la totalidad de la flota disponible para cada línea sea utilizada durante el servicio de horas punta de esa línea. En cambio, la ecuación (15) representa la condición que durante las horas fuera de punta no es necesario operar con todos los trenes disponibles para este efecto.

La ecuación (16) verifica que cada tren disponible en un período sea asignado a alguna línea para que no queden trenes “fuera de operación”.

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

El principal resultado de este estudio es la definición de un calendario de compras de material rodante para el período comprendido entre los años 2004 y 2010 bajo la restricción de densidad de 6 pasajeros por metro cuadrado, equivalente a 114 coches.

Cabe considerar que para el desarrollo de la solución se utilizaron los siguientes parámetros.

- Escenario de demandas construido a partir del Escenario 5.5 de Transantiago¹ proporcionado por SECTRA.
- Flota base (la flota disponible para la operación durante el año 2004), es decir, se fija la cantidad y tipo de trenes asignado a cada línea durante ese periodo.

¹ A partir de la definición de recorridos, tipo de vehículos, frecuencias y otros aspectos relacionados con la infraestructura de cada operador del transporte público se crea el Diseño del Sistema de Transporte. Ello junto con las Matrices de origen-destino de viajes y la Estructura Tarifaria es posible estimar la demanda por viajes en este tipo de transporte segregada por cada tipo de operador, lo cual genera el Escenario 5.5 de Transantiago.

- Con respecto a la operación, en Línea 1 se considera la operación con bucle en los períodos punta.
- Se define no dejar coches remanentes resultantes de la reconfiguración de trenes NS-74 de modo que todo el parque de trenes NS-74 sea utilizado en la operación.
- Se asignan formaciones de trenes a cada línea establecidas según criterios de homogeneidad en el largo de ellos.
- Los tiempos y extensiones de vueltas se consideraron de acuerdo a los proyectos de extensiones de las líneas.
- La primera compra de coches será en 2005 (consideración respecto al lead-time de los proveedores).

Tabla 1. Decisiones de compra de material rodante Período 2004-2010.

Item de Inversión	AÑO							Total Trenes	Total Coches
	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010		
Unidades Compradas de Trenes de 6					1	1		2	12
Unidades Compradas de Trenes de 7		10						10	70
Unidades Compradas de Trenes de 8		3		1				4	32
Cantidad de Upgrades de 6-7									0
Cantidad de Upgrades de 6-8									0
Cantidad de Upgrades de 7-8									0
TOTAL TRENES	0	13	0	1	1	1	0	16	---
TOTAL COCHES	0	94	0	8	6	6	0	---	114
COSTO COMPRA (MMUS\$)	0	140	0	12	9,2	9,2	0	VAN	140,91

La Tabla 1 muestra en detalle el resultado de compras de material rodante por período donde se observa que la mayor cantidad de unidades a comprar es de 94 coches y se concentra a fines del año 2005. Esto se atribuye al fuerte incremento de la demanda de pasajeros en el año 2006 en todas las líneas debido a la puesta en marcha del Plan Transantiago y sus consecuentes extensiones de la Red de Metro. Luego, en los años 2007, 2008 y 2009 se sugieren compras de 8, 6 y 6 coches, respectivamente lo cual responde al crecimiento vegetativo de la demanda durante las horas punta.

La Tabla 2 muestra el detalle de los trenes que operan durante las horas punta. Aquí se aprecia la distribución de trenes entre líneas entre un período y otro. Por ejemplo, a partir del año 2006 en L1 no se opera con trenes NS-74 de 7 coches. Ellos son redistribuidos a las líneas 2 y 5. El criterio de configuraciones “aceptables” en cada línea obedece a un criterio de homogeneidad del largo de los trenes de una misma línea.

Asimismo, para otorgar una buena calidad de servicio a sus clientes, Metro establece ciertos rangos para todas las variables operacionales que determinan este servicio. Dentro de estas variables se encuentran la densidad de pasajeros dentro de los coches y el intervalo entre trenes. Con las decisiones de compra de material rodante determinadas con la resolución del modelo se

logra que estas variables operacionales se mantengan dentro de los límites establecidos como satisfactorios.

Tabla 2. Trenes operando en período punta. Período 2004-2010

Línea	Tipo Tren	No. Coches	AÑO							
			2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	
L1	NS74	5								
		6								
		7	4	4	0	0	0	0	0	
	NS93	6	5	8	0	0	0	0	0	
		7	12	12	22	22	22	22	22	
		8	10	9	13	13	14	14	14	
L2	NS74	5	13	16	11	7	7	6	6	
		6			6	9	9	13	10	
		7								
	NS93	6			11	12	12	9	13	
		7								
		8								
L5	NS74	5	19	19						
		6			4	2	2			
		7			19	21	21	20	20	
	NS93	6			1			4	1	
		7								
		8								
TOTAL TRENES			63	68	87	86	87	88	89	
TOTAL COCHES			382	407	578	578	586	592	598	

Como se demuestra en el siguiente análisis de sensibilidad el modelo es bastante sensible a la densidad y a la demanda de pasajeros. La Tabla 3 se muestran los valores obtenidos para la función objetivo y la cantidad de coches recomendados a comprar para mantener los niveles de densidad deseados.

Tabla 3. Resultados del Análisis de Sensibilidad para la Cota de Densidad.

Cota Densidad	Valor FO	# Coches	GAP
5,6	3,32 E08	233	3,6%
5,7	2,73 E08	186	0,2%
5,8	--	--	--
5,9	1,99 E08	119	1,4%
6,0	1,913 E08	114	4,3%
6,1	1,73 E08	96	0,9%
6,2	1,69 E08	94	1,1%
6,3	1,62 E08	89	0,9%

En segundo lugar se realiza una corrida para un escenario de demanda pesimista. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 4. Con el escenario pesimista se obtienen compras de 95 coches correspondientes a US\$ 47,99 millones, lo cual, en costos de operación e inversión responden a una disminución del 10,5% con respecto a los costos totales del escenario normal resuelto anteriormente. Dados los resultados de todas las corridas realizadas en este estudio, es posible prever que con un escenario de demanda optimista se obtendrían mayores costos asociados a mayores compras de material rodante.

Tabla 4. Resultados Análisis de Sensibilidad para Escenarios de Demandas.

Escenario Demanda	Valor FO	Compras	GAP
Normal	1,913 E08	114	4,3%
Pesimista	1,712 E08	95	1,2%

4. CONCLUSIONES

En el presente estudio se desarrolló una nueva metodología para evaluar la compra de material rodante que permite planificar los costos de inversión en un horizonte de mediano y largo plazo. Esta metodología consiste en un modelo de programación lineal entera (LIP) el cual es un enfoque que, a la fecha, no se había abordado para enfrentar esta problemática en Metro S.A. Esta herramienta se presenta como una alternativa de gran utilidad ya que se ajusta a la problemática actual y futura de la empresa y que tiene aplicaciones, tanto en la toma de decisiones de nivel estratégico como en los niveles táctico y operativo.

El modelo desarrollado está parametrizado en base a las demandas y parámetros de costos, por lo tanto, la modificación de ellos no requiere de un cambio sustancial del modelo. Asimismo, es posible incluir nuevas restricciones o nuevos aspectos operacionales que hasta ahora no se hayan considerado.

La formulación propuesta es altamente representativa de la situación que Metro S.A. deseaba modelar, ya que da cuenta en detalle de la amplia gama de interrelaciones que se producen en un sistema de esta naturaleza. Obviamente el detalle de la representación utilizada depende de los objetivos deseados, lo que debe ser tomado en cuenta al momento de definir la representación a utilizar ya que un mayor detalle redonda en un modelo de mayor tamaño y, por lo tanto, su solución se torna más compleja. Por el contrario, mientras más se relaja el modelo se logran soluciones de menor costo computacional.

Cabe recordar que no es objetivo del estudio estimar la *demand*, sin embargo, se realizó un análisis de sensibilidad para este parámetro. A partir del escenario estimado para el período comprendido entre los años 2004 y 2010 se crearon dos escenarios de demanda: optimista y pesimista. Luego de obtener resultados con este análisis se corroboró que el modelo es altamente sensible al parámetro *demand*. Asimismo, con este análisis se dejó en claro el *trade-off* entre la calidad de servicio que se quiere entregar determinada con la cota de densidad y lo que debe invertir la empresa en compras de material rodante.

Se debe mencionar que el GAP de la solución entera respecto del valor óptimo es menor al 5% en todos los casos que se resolvió el problema. Además, los tiempos de resolución son bajos – del orden de dos minutos–, lo cual permite llevar a cabo varias corridas en un tiempo razonable.

Otro aspecto importante de destacar es que aunque el modelo no considera el *lead-time* de los proveedores, se puede planificar una calendarización de llegada de trenes año a año, permitiendo así mantener las densidades en los niveles deseados.

La utilidad de esta herramienta queda demostrada luego de presentar una calendarización de compras de material rodante para el período comprendido entre los años 2005 y 2010.

Finalmente resulta importante destacar que el modelo recomienda la cantidad de coches y/o trenes adecuada para mantener los estándares de calidad de servicio planificados por Metro; luego, en una etapa posterior, la empresa realiza una evaluación económica. De otro modo, el modelo sólo recomienda configuraciones de trenes y cantidad adicional de coches óptimos para satisfacer la demanda según criterios especificados para cada período.

5. REFERENCIAS

- Assad. A. (1980) Models for Rail Transportation. **Transportation Research 14A** , 205-220.
- Borndörfer R., M. Grötschel y A. Löbel (1998) **Optimization of Transportation Systems**. ZIB - Report 98-09.
- Cordeau J., P. Toth y D. Vigo (1994) A Survey of Optimization Models for Train Routing and Scheduling. **Transportation Science 32**, 380-404.
- Fernández y De Cea Ingenieros (1993) **Optimización de la Flota y Adquisición de Material Rodante para el Metro**
- Gerencia de Operaciones, Metro S.A. (2004) **Manual de Procedimiento para la Planificación de la Oferta de Transporte**
- Flores J. F. y E. Constanzo. (2000) **Planificación de Oferta en el Metro de Santiago**