EQUILIBRIO SIMULTÁNEO EN REDES DE TRANSPORTE: UN ENFOQUE DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA MULTI-OBJETIVO

Joaquín de Cea Ch., J. Enrique Fernández L.
Profesores Titulares Depto. Ingeniería de Transporte, Pontificia Universidad Católica de Chile, Casilla 306, Santiago 22, CHILE. FAX:(56-2) 686 4818

Louis de Grange C.
Fernández y De Cea Ingenieros Ltda. Apoquindo 3650, Of. 902, Santiago, CHILE.
FAX: (56-2) 435 0099; e-mail: ldegrang@FDCconsult.com

RESUMEN

En este trabajo se propone un enfoque de programación matemática multi-objetivo para resolver diversos problemas de equilibrio simultáneo oferta-demanda en redes de transporte. La formulación asociada a los modelos de demanda se basa en la maximización de formulaciones entrópicas, mientras que para el caso de la oferta, el modelo es consistente con el equilibrio de Wardrop. A partir del enfoque desarrollado, es factible obtener diversos modelos de equilibrio reportados en la literatura, partiendo de los más elementales que consideran costos y demandas fijas, hasta los más complejos que consideran demanda variable e interacciones de flujos entre los distintos arcos de las redes. El principal aporte de este trabajo es que permite entender e interpretar económicamente cada una de las componentes de los modelos de equilibrio, así como también los parámetros y variables asociados a cada formulación. Como conclusión del trabajo se deduce que prácticamente cualquier problema estático de equilibrio simultáneo oferta-demanda de corto plazo en sistemas de transporte puede ser obtenido a partir de una formulación multi-objetivo, lo que permite entender más profundamente el concepto de equilibrio en sistemas de transporte y desarrollar modelos diversos alternativos dependiendo de las necesidades del modelador.

1. INTRODUCCIÓN

Los modelos de equilibrio oferta-demanda en sistemas de transporte han sido desarrollados ampliamente en la literatura; Fernández y Friesz (1983) presentan una revisión muy detallada del estado del arte en esta material hasta antes de la década del ochenta, incluyendo múltiples referencias sobre la existencia de la solución. También se puede consultar el trabajo reciente de De Cea et al (2005).

Beckmann et al. (1956) proponen un primer modelo de equilibrio con demanda elástica para el caso de funciones de demanda y costo separable, y una única clase de usuario, a partir de un problema simple de programación matemática. Después de este trabajo, múltiples modelos de distribución de viajes fueron estudiados de manera conjunta con la asignación (modelos simultáneos de distribución y asignación de viajes), considerando siempre funciones de costo separables (Bruynooghe, 1969; Florian et al. 1975; Evans, 1976, etc.). En particular, Evans propone un problema de optimización (del tipo Beckmann), combinando un modelo entrópico doblemente acotado con una de óptimo de usuarios (transformada Beckmann). Si bien existen múltiples trabajos de combinaciones particulares de modelos de equilibrio a partir de problemas de optimización convexos, no se ha formulado aún un enfoque unificado que acepte una base teórica para derivar dichos modelos. Sólo Oppenheim (1995) presenta una metodología para predecir demandas de viajes urbanos basado en el concepto de racionalidad de los individuos o consumidores; el principio básico de todos los modelos presentados en su libro es la maximización de la utilidad, y aunque la metodología de Oppenheim parece interesante, no se han realizado nuevos desarrollos posteriores.

El principal objetivo de este trabajo es presentar un enfoque de modelación general para formular diversos modelos de equilibrio simultáneo oferta-demanda en sistemas de transporte con funciones de costo aditivas y separables[1], usando para ello un enfoque de optimización multi-objetivo. Las características y supuestos más relevantes de el enfoque propuesto son las siguientes:

i. Elecciones de demanda (destino y modo) tienen una estructura jerárquica y, en cada nivel del árbol de decisiones, la entropía debe ser maximizada sujeto a las correspondientes restricciones.
ii. Los usuarios sobre las distintas redes se comportan de acuerdo al primer principio de Wardrop (asignación de equilibrio determinística); no obstante, es factible incorporar una asignación de tipo estocástica (Fisk, 1980). Las funciones de costo de los arcos de las redes son convexas y separables.
iii. Un problema de optimización convexo no puede ser formulado si existen interacciones asimétricas en las funciones de costo de las redes; no obstante, una desigualdad variacional puede ser formulada, y utilizar el problema diagonalizado como sustituto.

Este trabajo esta organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se analizan algunos aspectos relevantes de la programación multi-objetivo. En la sección 3 se expone el concepto de entropía en el

1 Si los costos no son separables, o si son asimétricos, no existe un problema de optimización equivalente con solución única, por lo que es necesario diagonalizar para aplicar el enfoque expuesto en este trabajo. Luego, se puede considerar la aplicación del enfoque para el problema diagonalizado en la solución de equilibrio.

contexto de los modelos de demanda de transporte. En la sección 4 la atención se centra en la formulación de los modelos de equilibrio simultáneo a partir de los conceptos definidos en las secciones anteriores. Finalmente, en la sección 5 se reportan las principales conclusiones.

2. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA PROGRAMACIÓN MULTI-OBJETIVO

2.1 Introducción

A fin de entender el enfoque metodológico que se propone en las secciones siguientes, a continuación se presentan conceptos básicos relevantes asociados a los modelos de programación multi-objetivo; detalles pueden ser consultados en Marler y Arora (2004).

El problema general de optimización multi-objetivo puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\min_{\{x\}} \quad F(x) = \left[f_1(x), f_1(x), ..., f_k(x)\right]^T \tag{1}$$

s.a.:

$$g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1,2,....,m \qquad (\mu_i) \tag{2}$$

$$h_j(x) = 0 \quad \forall j = 1,2,....,r \qquad (\eta_j) \tag{3}$$

donde $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$. En este caso, n es el número de variables de decisión, k es el número de funciones objetivo, m es el número de restricciones de desigualdad, y r es el número de restricciones de igualdad. Los componentes del vector $x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ son escalares que se denominan variables de diseño. El vector $F(x) = \left[f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)\right]^T$ también está compuesto por funciones escalares $f_i(x)$, las cuales son denominadas criterios, objetivos o funciones de costo. x_i^* es un vector que minimiza la función objetivo escalar $f_i(x)$. Luego, $f_i(x_i^*)$ es el mínimo valor de la función objetivo $f_i(x)$; adicionalmente, $\nabla_x f_i(x)$ es el gradiente de $f_i(x)$ con respecto a x, y los μ_i y η_j son las variables duales correspondientes a las restricciones de desigualdad e igualdad respectivamente. El lagrangeano correspondiente al problema (1) - (3) es el siguiente:

$$L(x, \mu, \eta) = \theta^T \cdot F(x) + \mu^T \cdot g(x) + \eta^T \cdot h(x) \tag{4}$$

donde $\theta^T = [\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k]$ es el vector de pesos de los distintos objetivos.

El espacio factible de diseño X está definido por el conjunto de restricciones (2) y (3). El espacio factible de criterio $Z = F(x)$ está definido por el conjunto de valores $\{F(x) | x \in X\}$. Luego, tal como el espacio de diseño está definido por las variables de diseño, el espacio de criterio está definido en términos de los criterios $f_i(x)$; ello implica que cada $x \in X$ genera un punto con coordenadas $f_1(x), ..., f_k(x)$. En consecuencia, el conjunto de puntos definidos por Z es la imagen de X en el espacio de criterios. Un punto $x^* \in X$ es óptimo débil de Pareto si y sólo si no existe otro punto $x \in X$ tal que $F(x) < F(x^*)$.

Stadler (1979), Vincent y Grantham (1981), y Miettinen (1999) proporcionan una revisión de las condiciones de optimalidad para problemas de programación matemática multi-objetivo.

La resolución de los problemas de programación matemática multi-objetivo envuelve potencialmente un conjunto infinito de soluciones. A fin de obtener una única solución, el tomador de decisiones normalmente manipula preferencias, las cuales posteriormente le permiten aplicar un determinado algoritmo para obtener finalmente una solución única que refleja las preferencias consideradas.

En la literatura especializada existe un importante número de métodos y algoritmos diversos para resolver los problemas de programación matemática multi-objetivo. El método de las sumas ponderadas permite, mediante la formulación de un problema sustituto, especificar dichas preferencias, las cuales pueden ser definidas en términos de metas o en términos de importancia relativa de cada función objetivo, obteniéndose una solución Pareto óptima. A continuación se expone brevemente el método de las sumas ponderadas.

2.2 Método de Sumas Ponderadas

A fin de determinar una solución no arbitraria del problema multi-objetivo, es factible considerar las preferencias del tomador de decisiones como una función $P[F(x)]$ que depende a su vez de las distintas funciones objetivos $\left(F(x) = [f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)]^T\right)$. Dicha función de preferencias es una abstracción de puntos en el espacio de criterios, dentro de la mente del tomador de decisiones, que incorpora perfectamente sus decisiones (Marler y Arora, 2004).

La función de preferencias $P[F(x)]$ puede ser expresada como una expansión de términos de una serie de Taylor, en un punto factible $\hat{x}$, de la siguiente forma:

$$P[F(x)] \approx P[F(\hat{x})] + \nabla_{F(x)} P[F(\hat{x})] \cdot (F(x) - F(\hat{x})) \tag{5}$$

Definiendo $\nabla_{F(x)} P[F(\hat{x})] = \theta$, y eliminando de la toma de decisiones los términos constantes de (5) ya que no alteran el resultado de la optimización, la función de preferencias del tomador de decisiones a ser optimizada puede escribirse finalmente de la siguiente forma:

$$P[F(x)] \approx \theta^T F(x) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i f_i(x) \tag{6}$$

Al término de la derecha de la expresión (6), que es una aproximación lineal de las preferencias (en el espacio de criterios), se le denomina **suma ponderada** de las funciones objetivos. Si todos los pesos son positivos $(\theta_i > 0, \forall i = 1, 2, ..., k)$ la minimización del problema (6) proporciona una condición de suficiencia para un óptimo de Pareto (ver Zionts, 1988).

Por otra parte, si alguno de los componentes de θ es cero, la solución obtenida es potencialmente un óptimo débil de Pareto. Adicionalmente, si se cumple que $\sum_{i=1}^{k}\theta_i = 1$, $\theta_i > 0\ \forall i$, y si cada una de las funciones $f_i(x)$ es convexa $(\forall i = 1,2,....,k)$, la suma ponderada de dichas funciones también será convexa. Adicionalmente, aunque $\theta_i > 0\ \forall i$ asegura suficiencia, no proporciona una condición necesaria para un óptimo de Pareto. Ello implica que no necesariamente existe un conjunto de pesos para cada solución óptima de Pareto (Zionts, 1988).

Sin embargo, la minimización de la suma ponderada sí proporciona una condición necesaria para óptimo de Pareto si la función multi-objetivo es convexa, lo que significa que el espacio de diseño factible y todas las funciones objetivo son convexas (Geoffrion, 1968; Koski, 1985; Miettinen, 1999). Por lo tanto, si la expresión (6) es convexa, su solución es óptima de Pareto.

2.3 Interpretación Económica de los Pesos

El valor de los pesos θ_i sugieren la importancia relativa de cada función objetivo. Sin embargo, la selección de un conjunto de pesos que reflejen las preferencias hacia un objetivo o hacia otro puede generar dificultades, ya que las preferencias tienden a ser indistinguibles. En consecuencia, la solución óptima de Pareto obtenida dependerá de qué valores de pesos hayan sido utilizados.
En este sentido, el método de suma ponderada puede ser utilizado para obtener el gradiente de la función de preferencias:

$$\nabla_x P\left[F(x)\right] = \sum_{i=1}^{k}\left(\theta_i \nabla_x f_i(x)\right) \tag{7}$$

Cada componente del vector gradiente $\nabla_x P\left[F(x)\right]$ representa, cualitativamente, cómo varía la satisfacción del tomador de decisiones cuando varía el punto de diseño y en consecuencia los valores de las funciones. Por otra parte, para comparar la importancia relativa de los distintos objetivos, es necesario definir un objetivo como referencia, típicamente la primera función objetivo $f_1(x)$, la cual servirá de referencia. En consecuencia, la expresión (7) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\nabla_x P\left[F(x)\right] = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial P/\partial f_i}{\partial P/\partial f_1}\cdot \nabla_x f_i(x)\right) \tag{8}$$

y en consecuencia $\theta_i = \dfrac{\partial P/\partial f_i}{\partial P/\partial f_1}$, $\forall i = 1,2,...,k$.

Sin pérdida de generalidad, considerando $\dfrac{\partial P}{\partial f_1} > 0$, esta misma actúa como un factor de escala para el gradiente de la función de preferencias. Considerando además que el problema es tal que todas las funciones objetivo requieren ser minimizadas, las derivadas $\dfrac{\partial P}{\partial f_i}$ tendrán por lo tanto el mismo signo, el que será positivo en el caso que $\theta_i > 0\ \forall i$. Una interpretación conceptual interesante que se le puede dar a los pesos, dado que $\theta_i = \dfrac{\partial P/\partial f_i}{\partial P/\partial f_1}$, es que el peso i (θ_1) corresponde a la razón entre el efecto en P de variar la función i y el efecto en P de variar la función 1; dicho de otra forma, es la importancia relativa de la función i en relación a la función 1.

Dado que la función $f_1(x)$ es la función de referencia, se puede definir $f_1 = 1$ como el peso de referencia, con el cual serán comparados todos los otros pesos. En consecuencia, los pesos θ_1 representan la cantidad en que f_1 debe aumentar a fin de compensar un decrecimiento de la función f_1, para mantenerse en un punto óptimo de Pareto (Tasa Marginal de Sustitución de f_1 por f_1). Por ora parte, si uno considera un conjunto de puntos óptimo de Pareto en el espacio de criterios (Z), conceptualmente θ_1 indica aproximadamente cuánto debe cambiar f_1 en respuesta a un decrecimiento de f_1, a fin de mantenerse en un óptimo de Pareto.

3. MODELOS DE DEMANDA ENTRÓPICOS

El concepto de entropía, integrado en las formulaciones de modelos de programación matemática no lineales de transporte, ha sido incorporada principalmente en los modelos de distribución de viajes (Wilson, 1970). Sin embargo, como ya hemos mencionado anteriormente, muchas otras combinaciones de modelos pueden ser formuladas a partir del concepto de maximización de entropía. Algunos ejemplos son: elección de origen y destino (distribución), elección de modo (partición modal), elección simultánea de destino y modo, elección de hora de salida, elección de ruta, o cualquier combinación de estas elecciones puestos como ejemplo.

A fin de simplificar la notación, las formulaciones matemáticas de este trabajo considera un único propósito de viaje y una única clase de usuario. No obstante, la formulación es fácilmente generalizable para múltiples propósitos y categorías de usuarios (De Cea et al, 2004).

Considerando primero la distribución de viajes (decisión de destino de los viajeros), representada como una matriz cuyas celdas son la cantidad de viajes realizados por unidad de tiempo entre un determinado par O-D (w), la entropía $E(T_w)$ de dicha matriz está dada por (Wilson, 1970):

$$E(T_w) = \frac{T!}{\prod_w T_w!} \tag{9}$$

Análogamente, considerando ahora simultáneamente las decisiones de los individuos asociadas a la elección de par O-D (w) y modo (m), la entropía está dada por la siguiente expresión:

$$E(T_w^m) = \prod_w \left(\frac{T_w!}{\prod_m T_w^m!} \right) = \frac{\prod_w T_w!}{\prod_w \prod_m T_w^m!} \tag{10}$$

Notar que una transformación monótona creciente de las expresiones anteriores de entropía puede ser obtenida aplicando logaritmos naturales:

$$\ln E(T_w) = \ln T! - \sum_w \ln T_w! \tag{11}$$

$$\ln E\left(T_w^m\right) = \sum_w \ln T_w! - \sum_w \sum_m \ln T_w^m \tag{12}$$

Luego, utilizando la aproximación de Stirling ($\ln x! = x(\ln x - 1)$) se obtienen las típicas expresiones entrópicas:

$$E\left(T_w\right) = T\left(\ln T - 1\right) - \sum_w T_w\left(\ln T_w - 1\right) \tag{13}$$

$$E\left(T_w^m\right) = \sum_w T_w\left(\ln T_w - 1\right) - \sum_w \sum_m T_w^m\left(\ln T_w^m - 1\right) \tag{14}$$

De la misma manera, la entropía asociada a otras decisiones de los viajeros también pueden ser obtenidas (elección de ruta o elección de horario de viaje, por ejemplo). Finalmente, debe notarse que maximizar la entropía equivale a minimizar el negativo de la entropía.

4. FORMULACIÓN DE MODELOS DE EQUILIBRIO SIMULTÁNEO

4.1 Formulación del Modelo de Distribución y Partición Modal

Utilizando el enfoque de optimización multi-objetivo descrito en la sección 2, una estructura entrópica general puede ser transformada en un problema simple de optimización equivalente. Luego, el problema de equilibrio puede ser formulado de la siguiente forma:

$$\min_{\{T_w, T_w^m\}} \sum_m \sum_w T_w^m c_w^m \tag{15}$$

$$\max_{\{T_w, T_w^m\}} E(T) = \frac{T!}{\prod_w T_w!} \tag{16}$$

$$\max_{\{T_w, T_w^m\}} E(T^m) = \frac{\prod_w T_w!}{\prod_w \prod_m T_w^m!} \tag{17}$$

$s.a.:$

$$\sum_j T_w = O_i \quad \forall i \qquad (\mu_i) \tag{18}$$

$$\sum_i T_w = D_j \quad \forall j \qquad (\gamma_j) \tag{19}$$

$$\sum_m T_w^m = T_w \quad \forall w \qquad (u_w) \tag{20}$$

donde, en adición a la notación ya utilizada, O_i y D_j son las generaciones y atracciones de viajes para las distintas zonas de origen y destino; c_w es el costo entre el par $w = (i, j)$. Notar que el problema parcial definido únicamente por (15), (18) y (19) corresponde al clásico problema de transporte de Hitchcock.

Aplicando logaritmo natural a las funciones objetivo (16) y (17), usando la aproximación de Stirling y minimizando en lugar de maximizar, las siguientes expresiones son obtenidas (los términos que contienen T son constantes, por lo que no se consideran):

$$\min_{\{T_w, T_w^m\}} \sum_m \sum_w T_w^m c_w^m \tag{21}$$

$$\min_{\{T_w, T_w^m\}} \sum_w T_w \left(\ln T_w - 1\right) \tag{22}$$

$$\min_{\{T_w, T_w^m\}} \sum_w \sum_m T_w^m \left(\ln T_w^m - 1\right) - \sum_w T_w \left(\ln T_w - 1\right) \tag{23}$$

Utilizando ahora los resultados expuestos en la sección 2 (ver (6)) y los objetivos definidos por (21), (22) y (23), el problema multi-objetivo descrito en (15) a (20) puede ser transformado en un problema de optimización clásico con un solo objetivo, donde $\hat{\theta}^T = (1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, ..., \hat{\theta}_k)$ son los pesos calibrados de los diferentes objetivos[2]:

$$\min_{\{T_w, T_w^m\}} \sum_m \sum_w T_w^m c_w^m + \hat{\theta}_2 \sum_w T_w \left(\ln T_w - 1\right) + \hat{\theta}_3 \left[\sum_w \sum_m T_w^m \left(\ln T_w^m - 1\right) - \sum_w T_w \left(\ln T_w - 1\right) \right] \tag{24}$$

s.a.:

$$\sum_j T_w = O_i \qquad \forall i \qquad (\mu_i) \tag{25}$$

$$\sum_i T_w = D_j \qquad \forall j \qquad (\gamma_j) \tag{26}$$

$$\sum_m T_w^m = T_w \qquad \forall w \qquad (u_w) \tag{27}$$

La función objetivo (24) es la suma ponderada de los objetivos (21), (22) y (23), que representa el costo total del sistema menos las entropías asociadas a la elección de modo y destino de los viajeros. Adicionalmente, y como se definió en la sección 2, la función objetivo de referencia $\left(\sum_m \sum_w T_w^m c_w^m \right)$ se definió con un peso igual a 1. Finalmente, μ_i, γ_j, u_w son las variables duales o multiplicadores de Lagrange correspondientes a las restricciones. Notar que dada la naturaleza logarítmica de los objetivos entrópicos, la restricción de no negatividad de T_w , T_w^m no es necesaria.

El Lagrangeano correspondiente del problema (24)-(27) anterior es el siguiente:

$$\begin{aligned} L = {} & \sum_w \sum_m T_w^m c_w^m + \hat{\theta}_2 \sum_w T_w \left(\ln T_w - 1\right) + \hat{\theta}_3 \left(\sum_w \sum_m T_w^m \left(\ln T_w^m - 1\right) - \sum_w T_w \left(\ln T_w - 1\right) \right) \\ & - u_w \left(T_w - \sum_m T_w^m \right) - \mu_i \left(O_i - \sum_j T_w \right) - \gamma_j \left(D_j - \sum_i T_w \right) \end{aligned} \tag{28}$$

Las condiciones de optimalidad del problema (24) a (27) son obtenidas derivando el Lagrangeano (28) respecto a T_w y T_w^m . Redefiniendo $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$ como $1/\beta$ y $1/\lambda$ respectivamente, a fin de mantener

2 Notar que aquí los pesos se suponen conocidos (calibrados) y por ende el problema se reduce a obtener un único óptimo en lugar de una superficie de óptimos de Pareto, como resulta en los casos en que los pesos son variables del problema.

consistencia con las notaciones en esta área del transporte, las condiciones de primer orden entregan los siguientes resultados:

Distribución: $T_w = A_i O_i B_j D_j e^{-\beta L_w}$, donde $L_w = -\frac{1}{\lambda} \ln \sum_m e^{-\lambda c_w^m} \quad \forall w$

Partición Modal: $P_w^m = \dfrac{e^{-\lambda c_w^m}}{\sum_{m'} e^{-\lambda c_w^{m'}}} \quad \forall w, m$

donde P_w^m corresponde a la probabilidad de escoger el modo m para viajar entre el par w. Es interesante notar que la función de distribución corresponde al tradicional modelo gravitacional doblemente acotado, y la partición modal corresponde a un modelo del tipo Logit Multinomial equivalente al que se obtiene de la teoría de la utilidad aleatoria (McFadden, 1974).
Analizando la función objetivo (24) y las restricciones lineales definidas entre (25) y (27), el problema expuesto tendrá solución única sólo si $\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$ son positivos y $(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_3) \geq 0$ (condiciones de convexidad correspondientes a las condiciones de segundo orden para la obtención de un mínimo). En términos de los parámetros λ y β, ambos debes ser positivos y además debe cumplirse que $\beta \leq \lambda$. Definiendo $\phi = \beta/\lambda$, entonces $\beta, \lambda, \phi > 0$ son condiciones para que las decisiones de distribución y partición modal sean consistentes. Finalmente, debe notarse que para $\phi = 1$ (es decir, $\beta = \lambda$), el problema anterior colapsa a un modelo como el siguiente en que las decisiones de los individuos en términos de elección de destino y de modo de transporte son igualmente importantes:

$$\min_{\{T_w, T_w^m\}} \sum_m \sum_w T_w^m c_w^m + \frac{1}{\beta}\left(\sum_w \sum_m T_w^m \left(\ln T_w^m - 1 \right) \right) \tag{29}$$

s.a.:

$$\sum_{j,m} T_w^m = O_i \quad \forall i \qquad (\mu_i) \tag{30}$$

$$\sum_{i,m} T_w^m = D_j \quad \forall j \qquad (\gamma_j) \tag{31}$$

4.2 Formulación del Modelo de Distribución, Partición Modal y Asignación con Costos Simétricos en los Arcos de la Red Vial

El problema multi-objetivo en este caso también puede ser transformado en un problema de optimización equivalente con un solo objetivo, donde las restricciones entrópicas aparecen ponderadas por los respectivos pesos de calibración.

$$\min_{\{h_p^m\}} \sum_m \sum_a \int_0^{f_a^m} c_a^m(x)dx \tag{32}$$

$$\min_{\{T_w\}} \sum_w T_w \left(\ln T_w - 1 \right) \tag{33}$$

$$\min_{\{T_w, T_w^n\}} \sum_w \sum_n T_w^n \left(\ln T_w^n - 1 \right) - \sum_w T_w \left(\ln T_w - 1 \right) \tag{34}$$

s.a.:

$$T_w = \sum_m T_w^m \;\; , \;\; \forall\, w \qquad (u_w) \tag{35}$$

$$T_w^m = \sum_{p \in P_w^m} h_p^m \;\; , \;\; \forall\, w,m \qquad (u_w^m) \tag{36}$$

$$O_i = \sum_j T_w \;\; , \;\; \forall\, i \qquad (\mu_i) \tag{37}$$

$$D_j = \sum_i T_w \;\; , \;\; \forall\, j \qquad (\eta_j) \tag{38}$$

donde f_a^m corresponde al flujo en el arco a de la red del modo m, y h_p^m corresponde al flujo en la ruta p de la red del modo m. Debe notarse que, para el caso general con funciones de costos en los arcos no separables y asimétricas, el problema puede plantearse como una desigualdad variacional; si la solución de equilibrio es conocida, es factible plantear un problema de optimización diagonalizado equivalente a la desigualdad variacional cuyas condiciones de equilibrio serán las mismas. Por lo tanto, en el equilibrio, la solución del problema diagonalizado equivale a la solución de la desigualdad variacional.

El problema equivalente, considerando como objetivo de referencia el término asociado al equilibrio en las redes, está definido por (39) a (43). Las restricciones (40)-(43), de no negatividad de flujos y continuidad, se mantienen.

$$\min_{\{h_p^m, T_w, T_w^m\}} \;\; Z = \sum_m \sum_a \int_0^{f_a^m} c_a^m(x)dx + \frac{1}{\beta} \sum_w T_w \left(\ln T_w - 1 \right) + \frac{1}{\lambda} \left(\sum_w \sum_n T_w^n \left(\ln T_w^n - 1 \right) - \sum_w T_w \left(\ln T_w - 1 \right) \right) \tag{39}$$

sa.:

$$T_w = \sum_m T_w^m \;\; , \;\; \forall\, w \qquad (u_w) \tag{40}$$

$$T_w^m = \sum_{r \in P_w^m} h_r^m \;\; , \;\; \forall\, w,m \qquad (u_w^m) \tag{41}$$

$$O_i = \sum_j T_w \;\; , \;\; \forall\, i \qquad (\mu_i) \tag{42}$$

$$D_j = \sum_i T_w \;\; , \;\; \forall\, j \qquad (\eta_j) \tag{43}$$

Las condiciones de equilibrio de este ultimo problema de optimización son las siguientes:

Equilibrio en Redes de Transporte (Wardrop)

$$C_r^{m^*} - u_w^{m^*} \begin{cases} = 0 & si \;\; h_r^{m^*} > 0 \\ \geq 0 & si \;\; h_r^{m^*} = 0 \end{cases} \; ; \quad \forall \;\; r \in P_w^m, w \in W \tag{44}$$

Distribución de Viajes (Modelo Gravitacional Doblemente Acotado)

$$T_w^* = A_i O_i B_j D_j e^{-\beta \cdot L_w^*}\ ,\ L_w = -\frac{1}{\lambda} \ln \sum_{m'} e^{-\lambda c_w^{m'}} \tag{45}$$

Partición Modal de Viajes (Logit Multinomial)

$$P_w^m = \frac{T_w^m}{T_w} = \frac{e^{-\lambda u_w^{m*}}}{\sum_{m' \in n} e^{-\lambda u_w^{m*}}} \tag{46}$$

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto un enfoque de programación matemática multi-objetivo que permite formular una amplia variedad de diversos problemas de transporte usualmente utilizados en la planificación de sistemas de transporte. Todos estos problemas, derivados de manera simple y siguiendo una metodología deductiva, se transforman en un problema de optimización simple de carácter convexo.

El principal aporte de este trabajo es que permite, a partir de conceptos simples y conocidos de la programación matemática, entender y formular múltiples modelos alternativos, que pueden considerar estructuras de demanda más complejas o incluso enfoques alternativos de asignación.

Es interesante notar que los resultados obtenidos a partir de la resolución de los problemas de programación matemática multi-objetivo con funciones entrópicas son análogos a los reportados en la teoría de la utilidad aleatoria, particularmente en lo que se refiere a modelos Logit (Multinomiales o Jerárquicos). Sin embargo, el enfoque de programación matemática acá expuesto presenta la ventaja de que permite estimar y darle una interpretación económica a los parámetros de escala de la teoría de la utilidad aleatoria, parámetros que en este último caso están asociados a la varianza del término de error de la función de utilidad.

Finalmente, debe notarse que los modelos expuestos en este trabajo son sólo una parte de los modelos que es factible formular, que pueden considerar estructuras de demanda más complejas, como por ejemplo elecciones jerárquicas de los individuos, asignación estocástica, elección de horario, etc. Todas estas alternativas son factibles de formular considerando diferentes objetivos.

REFERENCIAS

Beckman, M.J., C.B. McGuire and C.B. Winsten, (1956). **Studies in the Economics of Transportation.** Yale University Press, New Haven, Connecticut.

Bruynooghe, M. (1969). Un modèle integré de distribution, de traffic sur un réseau. TechnicalReport, Departement de Recherche Operationnelle et Informatique, Arcueil.

De Cea, J., J.E. Fernández, A. Soto and V. Dekock, (2005). Solving network equilibrium on multimodal urban transportation networks with multiple user classes. **Transport Reviews 25**, 293-317.

Evans, S. (1976). Derivation and analysis of some models for combining distribution and assignment. **Transportation Research 10**, 37-57.

Fernández, J.E. and T.L. Friesz, (1983). Equilibrium predictions in transportation markets: the state of the art. **Transportation Research 17B**, 155-172.

Fisk, C. (1980). Some Developments in Equilibrium Traffic Assignement. **Transportation Research 14B**, 243-255.

Florian, M., S. Nguyen and J. Ferland, (1975). On the combined distribution assignment of traffic. **Transportation Science 9**, 43-53.

Geoffrion, A.M. (1968). Proper efficiency and the theory of the vector maximization. **Journal of Mathematical Analysis and Applications 22**, 618-630.

Koski, J. (1985). Defectiveness of weighting method in multicriterion optimization of structures. **Communications in Applied Numerical Methods 1**, 333–337.

McFadden, D. (1974) Conditional logit analysis of qualitative choice behavior. En P Zarembka (editopres), **Frontiers in Econometrics**. Academic Press, Nueva York

Marler, T.and J. Arora, (2004). Review of multi-objective optimizations concepts and algorithms for engineering. **Technical Report Number ODL** 01-04, University of Iowa.

Miettinen, K. (1999**). Nonlinear Multi-Objective Optimization**. Kluwer Academic Publisher, Boston.

Oppenheim, N. (1995**). Urban Travel Demand Modeling**. John Wiley & Sons, New York.

Stadler, W. (1979). A survey of multicriteria optimization or the vector maximum problem, Part 1, 1776 – 1990. **Journal of Optimization Theory and Applications 29**, 1–52.

Vincent, T.L. and W.J. Grantham, (1981). Optimality in Parametric Systems. John Wiley & Sons, New York.

Williams, H.C. (1977). On the Formation of Travel Demand Models and Economic Evaluation Measures of User Benefit. **Environment and Planning 9A, 285-344**.

Wilson, A. G. (1970). Entropy in Urban and Regional Modeling. Pion, London.

Zionts, S. (1988). Multiple criteria mathematical programming: an update overview and several approaches in G. Mitra, (editores), **Mathematical Models for Decisions Support**, 135-167. Springer - Verlag, Berlin.