EL PROBLEMA DE RECOGER Y DEJAR PASAJEROS INCORPORANDO TRASBORDOS

Claudio Contardo
Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile
Av. Blanco Encalada 2120
Santiago, Chile
ccontard@dim.uchile.cl

Cristián E. Cortés
Departamento de Ingeniería Civil
Universidad de Chile
Av. Blanco Encalada 2002
Santiago, Chile
ccortes@ing.uchile.cl

Martín Matamala
Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Chile
Av. Blanco Encalada 2120
Santiago, Chile
mmatamal@dim.uchile.cl

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla una formulación estricta del tradicional problema de recoger y dejar pasajeros, pero agregando la posibilidad de realizar trasbordos. Se dispone de una flota de vehículos de ciertas características que debe atender un conjunto de clientes. Cada cliente tiene asociado un par origen/destino indicando los lugares donde debe ser recogido y entregado respectivamente. La formulación propone una manera flexible de formular este problema permitiendo la incorporación de trasbordos si fuese necesario, definiendo trasbordo como el lugar en que dos o más vehículos interactúan intercambiando pasajeros. En primer término se presenta en detalle la formulación, con todas las variantes posibles (agregando ventanas de tiempo, limitar el número de trasbordos, etc.), enfatizando la necesidad de agregar variables adicionales que den cuenta de la identificación de los pasajeros en los vehículos en cada parada. Luego, se discuten algunas estrategias de solución al problema, considerando métodos exactos y heurísticas, todos ya implementados computacionalmente, haciendo un análisis crítico de las fortalezas y debilidades en cada caso. Finalmente, mostramos un ejemplo en que el uso de un trasbordo permite obtener una solución óptima mejor (en el sentido de incrementar el espacio de soluciones factibles) que aquella obtenida en el caso tradicional, con la restricción de no permitir trasbordos.

1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Para motivar la discusión, consideremos el siguiente problema: una empresa de transporte de pasajeros consta de una flota predefinida de m vehículos con capacidad igual a Q pasajeros por vehículo. Además, existe una demanda ubicada en distintos puntos de la ciudad, en donde cada cliente desea viajar desde un punto origen a un punto destino. La pregunta que cabe hacerse entonces es, ¿cuál es la manera óptima de rutear los vehículos con el fin de satisfacer toda la demanda de clientes minimizando cierta función objetivo?

El problema aquí descrito es conocido como el Problema de Recoger y Dejar Pasajeros (PRDP), problema computacionalmente difícil de resolver según se observa en la literatura. Este problema ha sido formulado (Savelsbergh y Sol, 1995) y resuelto usando distintos métodos por un sinnúmero de autores, tanto de manera exacta como de manera aproximada. Entre los métodos exactos usados para resolverlo podemos destacar los de programación dinámica (Psaraftis 1980, 1983; Desrosiers *et al.*, 1986), generación de columnas (Dumas *et al.*, 1991) y ramificación y corte (Ruland y Rodin, 1997; Lu y Dessouky, 2004). Entre los métodos aproximados podemos destacar los de tipo inserción, cuyo trabajo más destacado es el de Jaw *et al.* (1986). Varios de estos autores consideran variantes al problema, tales como demanda dinámica (Psaraftis, 1988), ventanas de tiempo, etc., pero pocos de ellos se han concentrado en la inclusión de flexibilidad adicional, permitiendo que los vehículos intercambien pasajeros en puntos especialmente definidos que llamaremos trasbordos.

El punto de discusión es claro, si por ejemplo suponemos que existe un punto de la ciudad en el cual los vehículos pueden interactuar entre ellos traspasándose pasajeros unos a otros, es decir, un nodo de transferencia o nodo de trasbordo, y quisiéramos resolver el mismo problema planteado antes pero con la libertad de permitir a los vehículos interactuar en el nodo de trasbordo, ¿Podríamos obtener mejores soluciones que aquellas del problema sin transferencia? La respuesta a priori debería ser SÍ, ya que una solución factible para el problema sin trasbordo ES (o debería ser al menos en un problema bien planteado) una solución factible para el problema en que se permiten trasbordos, y por lo tanto en un eventual problema con trasbordos estaremos incrementando el conjunto de soluciones factibles. Sin embargo el problema de recoger y dejar pasajeros con trasbordos no sólo debiera ser visto como una generalización del problema de recoger y dejar pasajeros clásico, sino que también debiera modelar sistemas que intrínsecamente deben operar con trasbordos, y que el problema de recoger y dejar pasajeros clásico no logra modelar. Deberá notarse que un desafío importante que surge es identificar apropiadamente sistemas en los cuales sea conveniente incluir trasbordos (dependiendo de la distribución e intensidad de la demanda), y ya en una etapa posterior, es relevante pensar en como diseñar la localización óptima de puntos de trasbordo dadas las condiciones de demanda y flota disponible.

En esta investigación quisimos desarrollar una formulación extendida del problema de recoger y dejar pasajeros, incluyendo explícitamente la posibilidad que los vehículos hagan trasbordos, independiente de la función objetivo que se desee optimizar. El problema es una extensión de la formulación tradicional (Savelsbergh y Sol, 1995), y se torna conceptualmente interesante, principalmente debido a la adición de dos fenómenos que aparecen en el nuevo problema: la necesidad de identificar los pasajeros que están a bordo de cada vehículo en cada parada del trayecto, para poder producir la interacción de pasajeros entre vehículos en forma completamente definida, y además, la necesidad de coordinar la llegada y salida de vehículos interactuando para poder realizar físicamente el trasbordo de pasajeros. Esta coordinación también puede ser optimizada, si la función objetivo es definida apropiadamente. Con estos antecedentes, proponemos una nueva formulación, la que representa correctamente el problema descrito (Contardo, 2005). Variantes, tales como la definición del caso dinámico, o la inclusión de ventanas de tiempo, son consideradas también en esta formulación.

La inclusión de trasbordos en operaciones de este tipo ha sido tratada en la literatura con anterioridad. Sorprendentemente, no existe una formulación estricta del problema basándose en el problema original sin trasbordos, más bien se proponen formas de operación a priori, y se optimizan etapas del viaje, o bien, se optimiza la operación dentro de zonas alimentadoras, y se coordina la operación en los trasbordos con líneas troncales de ruta fija. Podemos encontrar muchos trabajos donde se trata la operación eficiente de los nodos de trasbordo. Cortés y Jayakrishnan (2005) hacen una completa revisión de la operación en trasbordos y proponen un método heurístico para optimizar la asignación vehículo-pasajero en los puntos de trasbordos, esencialmente para problemas dinámicos con decisiones tomadas en tiempo real. Recientemente, los trabajos de Malucelli *et al.* (1999) y Crainic *et al.* (2001), proponen y formulan la operación de sistemas más flexibles basados en servicios alimentadores conectados con líneas troncales, basándose en las ideas de Schneider and Smith (1981). Horn (2001, 2002) proponen una interesante heurística para resolver problemas con trasbordo, pero entre diferentes modos.

En lo que sigue proponemos una formulación del problema de recoger y dejar pasajeros con trasbordos, primeramente explicando la forma en que hemos modelado los nodos de trasbordo y luego escribiendo las variables y restricciones que definen el problema. Se discuten distintos algoritmos de solución, y luego, se muestra un ejemplo en que se visualiza claramente que la incorporación de trasbordos genera soluciones mejores que en el caso sin trasbordos, lo que justificaría resolver nuestra formulación en reemplazo de la formulación original. Concluimos con una discusión de los elementos más relevantes y las líneas de investigación futuras.

2. MODELACIÓN DE UN TRASBORDO

En el problema de recoger y dejar pasajeros clásico, se pueden distinguir esencialmente dos categorías de nodos dentro del grafo que modela el problema: por una parte los nodos de comienzo y término de las rutas para los vehículos, y por otra, los nodos origen y destino de clientes. En general, cada uno de estos nodos tiene asociada una única operación que debe realizar cada vehículo al pasar y luego salir del nodo en cuestión. Para los nodos de comienzo y término de ruta, tal operación es que el vehículo salga o arribe al nodo. Para los nodos asociados a la atención de clientes, la operación es de subida de pasajeros (nodos origen) y bajada de pasajeros (nodos destino). En nuestro problema incorporamos una nueva categoría, cuales son los nodos de trasbordo. En un nodo de esta clase, se desarrollan dos operaciones: bajada y subida de pasajeros. Para hacer énfasis en la bi-funcionalidad del nodo de trasbordo, lo que hacemos es para cada trasbordo $r \in T$ definir una tupla de subnodos $(e(r), s(r))$, por lo cual, las restricciones del problema atingentes a un trasbordo, se dividen en restricciones asociadas a la entrada de vehículos al trasbordo $e(r)$ y a la salida del trasbordo $s(r)$, tal como se muestra gráficamente en figura 1.

Figura 1: Modelación de un nodo de trasbordo

3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Habiendo explicado la forma de modelar los nodos de trasbordo, presentaremos la formulación del problema de recoger y dejar pasajeros con trasbordos, primeramente definiendo el grafo *G=(V,E)* sobre el cual se mueven los vehículos. De la formulación que mostraremos más adelante, encontraremos un problema de optimización del tipo Problema de Programación Entera Mixta de la forma

$$\min \quad f(x,D,z) \tag{1}$$

$$s.a.$$

$$Ax \leq a \tag{2}$$

$$Bx + CD \leq b \tag{3}$$

$$Ex + Fz \leq c \tag{4}$$

$$GD + Hz \leq d \tag{5}$$

$$x \in \{0,1\}^n \tag{6}$$

$$D, z \geq 0 \tag{7}$$

Las variables x definen el conjunto de rutas de los $|M|$ vehículos, como en el problema de recoger y dejar pasajeros clásico (Savelsbergh y Sol, 1995). Las variables D entregan la información temporal, asociadas al momento en que los nodos son visitados. Estas variables son típicas también en la formulación del problema de recoger y dejar pasajeros clásico. En esta formulación sin embargo, se agregan las variables z que entregan información respecto de la carga de los vehículos y su identificación en términos de pasajeros. Estas variables no aparecen en el problema de recoger y dejar pasajeros tradicional, y básicamente se justifican dado que en el caso con trasbordos es relevante saber qué clientes están sobre los vehículos al momento de llegar al trasbordo para poder realizar el intercambio. La forma en que se relacionan estos tipos de variables se puede resumir en las restricciones (2) a (7). En adelante, describiremos e interpretaremos los distintos tipos de relaciones que aparecen aquí, dando argumentos también para construir las posibles representaciones de $f(x,D,z)$ dependiendo del tipo de objetivo que se quiera optimizar.

Consideremos C el conjunto de los clientes, cada uno de ellos asociado a un único par origen-destino (i^+, i^-), para todo $i \in C$. Consideremos una flota M de $|M|$ vehículos, cada uno de ellos asociado a un par depot origen – depot destino (k^+, k^-) para todo $k \in M$. Sea T el conjunto de los trasbordos. Para cada trasbordo $r \in T$ consideramos el par de entrada y salida del trasbordo $(e(r), s(r))$. Consideremos el grafo *G=(V,E)* definido como

$$V = \{i^+, i^- : i \in C\} \cup \{k^+, k^- : k \in M\} \cup \{e(r), s(r) : r \in T\}$$

$$E = \{(k^+,k^-),(k^+,i^+),(k^+,e(r)) : k \in M, i \in C, r \in T\} \cup$$
$$\{(i^+,j^+),(i^+,j^-),(i^-,j^+),(i^-,j^-),(i^+,e(r)),(i^-,e(r)),(s(r),i^+),(s(r),i^-) : i,j \in C, i \neq j, r \in T\} \cup$$
$$\{(i^+,i^-) : i \in C\} \cup \{(e(r),s(r)),(s(r),e(t)) : r,t \in T, r \neq t\} \cup \{(i^-,k^-),(s(r),k^-) : i \in C, r \in T, k \in M\}$$

Además, por conveniencia notacional, llamaremos $N = \{i+, i- : i \in C\}$, $N^{+(-)} = \{i^{+(-)} : i \in C\}$, $e(T) = \{e(r) : r \in T\}$, $s(T) = \{s(r) : r \in T\}$.

La formulación propuesta deberá satisfacer las siguientes propiedades

a. Para cada vehículo $k \in M$ existe una ruta R_k que parte en k^+, termina en k^- y no contiene ciclos.
b. Todos los nodos en N son visitados por algún vehículo
c. El nodo origen de un cliente siempre es visitado antes que su nodo de destino
d. Si un cliente hace trasbordo en $r \in T$, digamos del vehículo k_1 al k_2, entonces el vehículo k_2 deja el trasbordo después de que k_1 haya llegado.

Las condiciones a)-d) son básicas y fundamentales en la definición operativa del problema, y por eso debemos ser cuidadosos en formular las restricciones apropiadas para representarlas.

Definimos la **variable binaria** x_{ij}^k que vale 1 si el vehículo k usa el arco $(i, j) \in E$, 0 en caso contrario. El siguiente conjunto de restricciones define $|M|$ pseudo-rutas de vehículos, cada una de ellas comenzando en el depot origen del vehículo correspondiente, y terminando en el depot destino del vehículo.

$$\sum_{\{i|(k^+,i)\in E\}} x_{k^+i}^k = 1 \qquad \forall k \in M \tag{8}$$

$$\sum_{\{i|(i,k^-)\in E\}} x_{ik^-}^k = 1 \qquad \forall k \in M \tag{9}$$

$$\sum_{m\in M^+} \sum_{\{i\in V:(m,i)\in E\}} x_{mi}^k \leq 1 \qquad \forall k \in M \tag{10}$$

$$\sum_{\{j|(i,j)\in E\}} x_{ij}^k - \sum_{\{j:(j,i)\in E\}} x_{ji}^k = 0 \qquad \forall i \in N, \forall k \in M \tag{11}$$

$$\sum_{\{i|(i,e(r))\in E\}} x_{ie(r)}^k - x_{e(r)s(r)}^k = 0 \qquad \forall r \in T, \forall k \in M \tag{12}$$

$$\sum_{\{j|(s(r),j)\in E\}} x_{s(r)j}^k - x_{e(r)s(r)}^k = 0 \qquad \forall r \in T, \forall k \in M \tag{13}$$

Las ecuaciones (8) y (9) aseguran que cada vehículo salga de su respectivo depot origen y llegue a su respectivo depot destino. La ecuación (10) asegura que un vehículo no pueda comenzar dos rutas desde depot distintos. La ecuación (11) es de conservación de flujo en los nodos de N. Las ecuaciones (12) y (13) muestran la conservación de flujo en los nodos de trasbordo. En conjunto estas restricciones definen para cada vehículo $k \in M$, rutas R_k que parten en k^+, terminan en k^- y (eventualmente) contienen ciclos. El conjunto de restricciones antes descrito no asegura que se cumpla la propiedad b. Para ello agregamos las siguientes restricciones

$$\sum_{k\in M}\sum_{\{j|(j,i^-)\in E\}} x_{ji^-}^k = 1 \qquad \forall i\in C \tag{14}$$

$$\sum_{k\in M}\sum_{\{j|(i^+,j)\in E\}} x_{i^+j}^k = 1 \qquad \forall i\in C \tag{15}$$

La ecuación (14) obliga a que exactamente 1 vehículo pase por el nodo destino del cliente $i\in C$, mientras que la ecuación (15) obliga a que se haga lo mismo con su nodo de origen. Acá tenemos la primera gran diferencia con el problema de recoger y dejar pasajeros clásico, en el cual un mismo vehículo debe atender tanto al nodo origen como al nodo de destino de un cliente. En esta nueva formulación, el par origen-destino de un cliente puede ser atendido por dos vehículos distintos. Las ecuaciones (8) a (15) representan en detalle la relación entre variables *x,* tal como se muestra genéricamente en ecuación (2).

Además, para poder asegurar el cumplimiento de las propiedades *a, c* y *d,* definimos las siguientes variables

- D_i: Tiempo en que se atiende al nodo $i\in N$.
- $D_{e(r)}^k, D_{s(r)}^k$: Tiempo en que el vehículo $k\in M$ llega y se va del trasbordo $r\in T$ respectivamente.
- z_j^{ki}: 1 si el cliente $i\in C$ está en el vehículo $k\in M$ cuando éste llega al nodo $j\in V$. En caso contrario vale 0.

Notemos que por su naturaleza, las **variables *D* son reales**, mientras que las **variables *z* son binarias**. Más adelante veremos que esto se puede relajar para que las variables *z* sean también reales. Tal como se mencionó antes, las variables *z* asocian al cliente *i* con el vehículo *k* y con la parada *j*, identificando la información necesaria para modelar las operaciones de trasbordo apropiadamente. Consideremos las siguientes restricciones sobre las variables *D*

$$x_{k^+i^+}^k = 1 \Rightarrow t_{k^+i^+} \le D_{i^+} \qquad \forall i\in C, \forall k\in M \tag{16}$$

$$x_{k^+e(r)}^k = 1 \Rightarrow t_{k^+e(r)} \le D_{e(r)}^k \qquad \forall i\in C, \forall k\in M \tag{17}$$

$$x_{ij}^k = 1 \Rightarrow D_i + t_{ij} \le D_j \qquad \forall i,j\in N \tag{18}$$

$$x_{ie(r)}^k = 1 \Rightarrow D_i + t_{ie(r)} \le D_{e(r)}^k \qquad \forall i\in N, \forall k\in M, \forall r\in T \tag{19}$$

$$x_{e(r)s(r)}^k = 1 \Rightarrow D_{e(r)}^k + t_{e(r)s(r)} \le D_{s(r)}^k \qquad \forall k\in M, \forall r\in T \tag{20}$$

$$x_{s(r)j}^k = 1 \Rightarrow D_{s(r)}^k + t_{s(r)j} \le D_j \qquad \forall j\in N, \forall k\in M, \forall r\in T \tag{21}$$

$$x_{s(r)e(t)}^k = 1 \Rightarrow D_{s(r)}^k + t_{s(r)e(t)} \le D_{e(t)}^k \qquad \forall k\in M, \forall r\in T, \forall t\in T\setminus\{r\} \tag{22}$$

donde t_{ij} representan el tiempo de viaje entre paradas *i* y *j*, y son exógenos Con estas restricciones se previene la aparición de ciclos, pues en caso de que exista alguno $S=(i_1,i_2,\ldots,i_n=i_1)$ las restricciones (16)-(22) implicarían que $D_{i_1} < D_{i_1}$ (si $i_1\in N$) ó $D_{i_1}^k < D_{i_1}^k$ (si $i_1\in e(T)\cup s(T)$) para algún *k*, lo que obviamente es imposible. Con esto ya podemos asegurar el cumplimiento de la propiedad *a.* Las ecuaciones (16)-(22) representan ecuación (3) en el modelo genérico.

Consideremos ahora las siguientes restricciones sobre las variables z, representando ecuación (4):

$$z_{k^+}^{ki} = z_{k^-}^{ki} = 0 \qquad \forall k \in M, \forall i \in C \tag{23}$$

$$x_{lj}^{k} = 1 \Rightarrow z_l^{ki} = z_j^{ki} \qquad \forall i \in C, \forall (l,j) \in E \setminus \{(e(r), s(r) : r \in T\} \text{tq.} l \neq i^+, i^- \tag{24}$$

$$x_{i^+j}^{k} = 1 \Rightarrow z_j^{ki} = 1 \qquad \forall i \in C, \forall j \text{ tq.} (i^+, j) \in E \tag{25}$$

$$x_{i^-j}^{k} = 1 \Rightarrow z_j^{ki} = 0 \qquad \forall i \in C, \forall j \text{ tq.} (i^-, j) \in E \tag{26}$$

$$\sum_{k \in M} z_{e(r)}^{ki} = \sum_{k \in M} z_{s(r)}^{ki} \qquad \forall r \in T, \forall i \in C \tag{27}$$

$$\sum_{\{l \mid (l,j) \in E\}} x_{lj}^{k} = 0 \Rightarrow \sum_{i \in C} z_j^{ki} \leq 0 \qquad \forall k \in M, \forall j \in V \setminus \{k^+, k^-\} \tag{28}$$

La restricción (23) asegura que los vehículos parten y terminan vacíos en sus depot origen y destino. La restricción (24) dice que los clientes no se suben ni se bajan en un nodo, si no es ni su nodo origen ni su nodo destino. La restricción (25) (resp.(26)) establece que los clientes se suben (resp. bajan) al (resp. del) vehículo que pasa por el nodo origen (resp. destino). La restricción (27) asegura que los clientes que llegan al trasbordo en algún vehículo deban luego dejarlo en algún otro (eventualmente el mismo). Finalmente la restricción (28) señala que si z_j^{ki} es igual a 1 entonces el vehículo k pasa por el nodo $j \in V \setminus \{k^+, k^-\}$.

Como consecuencia de lo anterior, si tanto el origen como el destino de un cliente i están en la ruta del vehículo k, entonces el nodo i^+ siempre es visitado **antes** que i^-. En efecto, consideremos al vehículo que recoge al cliente i, y supongamos que visita el nodo i^- antes de visitar i^+. Al no poder pasar nuevamente por el nodo i^- por la restricción (14) entonces el vehículo termina su ruta con el cliente i en su interior, lo que es imposible por la restricción (23). Para el caso en que el cliente hace trasbordo necesitamos que se satisfaga la propiedad *d*. Notemos además que, como consecuencia de la forma en que se ligan las variables x con z, estas últimas pueden relajarse para restringirlas en el intervalo $[0,1]$. Con las restricciones antes descritas no se satisface necesariamente la propiedad *d*, luego agregamos la siguiente restricción (restricción (5) en el problema sintético)

$$z_{e(r)}^{ki} + z_{s(r)}^{vi} = 2 \Rightarrow D_{e(r)}^{k} + \Delta \leq D_{s(r)}^{v} \qquad \forall r \in T, \forall k, v \in M, \forall i \in C \tag{29}$$

donde Δ es una constante que representa algo así como el tiempo que los pasajeros necesitan para abordar un nuevo vehículo luego de haber llegado al trasbordo. La lectura de esta restricción es exactamente lo que en palabras se pide para cumplir la propiedad *d*.

Nos faltaría ver que se cumpla la propiedad c en el caso general en que los nodos origen y destino de un cliente están en rutas distintas. Supongamos que el nodo i^+ está en la ruta del vehículo k_1 e i^- está en la ruta del vehículo k_2. Por las restricciones (24) y (25) para todos los nodos j siguientes a i^+ se tiene $z_j^{k_1 i} = 1$ a menos que antes el vehículo k_1 pase por un trasbordo. Si nunca pasa por un trasbordo, entonces el vehículo termina su ruta con el cliente i en su interior lo que no es posible por la restricción (23). Luego el vehículo k_1 pasa por el trasbordo r_1 y el cliente es recogido por algún vehículo que sale del trasbordo con el cliente i en su interior. Si esto pasa n veces y ninguno de los n vehículos tiene el nodo i^- en su ruta, entonces por el mismo argumento anterior deberán pasar al trasbordo. Esto ocurre hasta que el vehículo que recoge al cliente i en el trasbordo, tiene a i^- en su ruta. Este vehículo necesariamente tiene al nodo i^- después del trasbordo en que recoge al cliente i, pues en caso contrario el vehículo terminaría su ruta con el cliente i en su interior lo que nuevamente no puede pasar por (23). Por las restricciones (16)-(22) y (29) se tendrá que $D_{i^-} < D_{i^-}$.

Finalmente, si los vehículos tienen cada uno capacidad Q_k (pax/veh.), se debe agregar la restricción $\sum_{i\in C} z_j^{ki} \leq Q_k \ \forall k\in M, \forall j\in V$.

4. VARIANTES Y SITUACIONES ESPECIALES

Hasta ahora, el problema que hemos resuelto permite una flexibilidad total del sistema. Sin embargo, preguntas como ¿cuántos trasbordos permitiré hacer a cada cliente?, ¿cómo considerar la inclusión de ventanas de tiempo?, ¿cómo permitir que un trasbordo pueda ser usado más de una vez por cada vehículo? son preguntas que vale la pena hacerse y a las cuales damos una alternativa de respuesta en esta sección.

Número Máximo de Trasbordos Permitidos por Cliente: En general, el efecto de trasbordar es molesto para los pasajeros de un servicio de transporte. Para limitar el número máximo de veces que un pasajero acepta trasbordar a L veces agregamos la restricción (en particular, L podría ser igual a uno, y no permitir que un pasajero trasborde más de una vez).

$$\sum_{r\in T}\sum_{k\in M} z_{e(r)}^{ki} \leq L \qquad \forall i\in C \qquad (30)$$

Ventanas de Tiempo: Supongamos ahora que los clientes tienen asociados intervalos de tiempo deseados, en los cuales un vehículo puede pasar a buscarlos y/o a dejarlos a su lugar de origen o destino. Esto puede hacerse esencialmente de dos formas: agregando restricciones duras, o bien penalizando las violaciones de estos intervalos en la función objetivo. Si se quieren agregar como restricciones duras, esto puede hacerse simplemente agregando las restricciones

$$l_i \leq D_i \leq u_i \qquad \forall i\in N \qquad (31)$$

En cambio, para agregarlas de manera blanda como **penalización a las violaciones de las ventanas de tiempo**, esto puede hacerse definiendo nuevas variables δ_i, σ_i para todo $i\in N$, que deben satisfacer las siguientes restricciones

$$\delta_i \geq D_i - u_i \qquad \forall i\in N \qquad (32)$$
$$\sigma_i \geq l_i - D_i \qquad \forall i\in N \qquad (33)$$
$$\delta_i, \sigma_i \geq 0 \qquad \forall i\in N \qquad (34)$$

y en la función objetivo se deben agregan penalizaciones de la forma $F(\delta,\sigma)$, para completar la inclusión de ventanas de tiempo blandas. Este último caso tiene mucho sentido, especialmente en el caso de problemas dinámicos.

Usar un Trasbordo más de Una Vez: Notemos que las restricciones (12) y (13) implican que un vehículo k puede pasar por un trasbordo $r \in T$ a lo más una vez, y en general desearíamos que esta limitante no existiera. Para resolver este problema, se puede considerar una cantidad MT de "copias" de cada trasbordo. Cuando un vehículo necesite usar un trasbordo r más de una vez, podrá hacerlo pasando una vez por cada copia del trasbordo r.

Caso dinámico: En sistemas que consideren la entrada de llamadas en tiempo real (como sistemas de tipo transfer, por ejemplo, en que una llamada puede entrar mientras los vehículos están siguiendo rutas ya definidas), se requiere que el despachador defina en qué vehículo insertará tal llamada y con qué criterio de optimización lo decidirá. En el marco de lo que se propone en este artículo, esta posibilidad puede ser incluida de al menos 3 formas (para mayor detalle, ver Contardo, 2005): 1) Reescribir la formulación agregando los nodos correspondientes al origen y destino del nuevo cliente, así como todos los arcos nuevos que aparecen, cada uno con sus respectivos costos. Fijar todas las variables que no pueden ser objeto de optimización (por ejemplo, si el vehículo k ya usó el arco (i,j), entonces imponer $x_{ij}^{k}=1$) y optimizar el nuevo modelo. 2) Usando heurísticas de inserción para insertar la nueva llamada en un conjunto de rutas definido a priori. 3) Usando algoritmos de programación dinámica para re-optimizar el sistema a partir del estado en que se encuentra el sistema al momento de la nueva llamada.

5. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Para resolver el problema descrito en las secciones 3, 4 y 5, se han implementado métodos exactos y aproximados. Dentro de los métodos exactos, podemos mencionar métodos de ramificación y acotamiento (RA), ramificación y corte (RC), entre otros. Usando estos métodos podemos resolver instancias del Problema de recoger y dejar pasajeros con trasbordos de hasta 10 clientes y 3 vehículos como máximo.

El método de ramificación y acotamiento usa la formulación lineal del problema junto con funciones objetivo lineales. Podemos resolver instancias de hasta 6 clientes y 2 vehículos. El método de ramificación y corte, también para problemas lineales, consiste en usar una variante del algoritmo de descomposición de Benders (Benders, 1962), que explota la estructura particular del problema, pudiendo resolver instancias mayores (hasta 10 clientes, 3 vehículos y 1 trasbordo) a las posibles con un simple algoritmo de ramificación y acotamiento. Este algoritmo fue recientemente presentado por Codato y Fischetti (2004). Todos los métodos anteriores no son realmente prácticos, dado el limitado tamaño de los problemas que permiten resolver. Todos, sin embargo son un buen *benchmark* para probar la calidad y robustez de algoritmos aproximados para problemas de mayor envergadura. Los algoritmos aproximados desarrollados son del tipo inserción (Contardo, 2005). Se proponen estrategias para insertar clientes en rutas parciales. Este método en cada iteración resuelve un PL (Problema de Programación Lineal) y el número de iteraciones necesario para resolver una instancia es mucho menor que para cualquiera de los métodos exactos. Sin embargo, este método es exponencial en el número de vehículos o en la tasa

$\frac{\text{clientes}}{\text{vehículos}}$ (según cual sea la función objetivo que se considere). Se han logrado resolver instancias de hasta 25 clientes, 5 vehículos y 1 trasbordo. Actualmente, se trabaja en mejorar el algoritmo para resolver problemas aún más grandes.

6. EJEMPLO NUMÉRICO

La Figura 2 muestra una instancia del problema de recoger y dejar pasajeros con trasbordos, en un caso con 12 clientes, 3 vehículos y 1 trasbordo. Los vehículos pueden pasar máximo una vez por el trasbordo. El largo de un arco corresponde a la distancia euclidiana entre los nodos que une. El método usado para encontrar las soluciones que acá se proponen como óptimas es un método heurístico de inserción.

Nodos de la Red de Ejemplo **Grafo completo de la Red de Ejemplo**

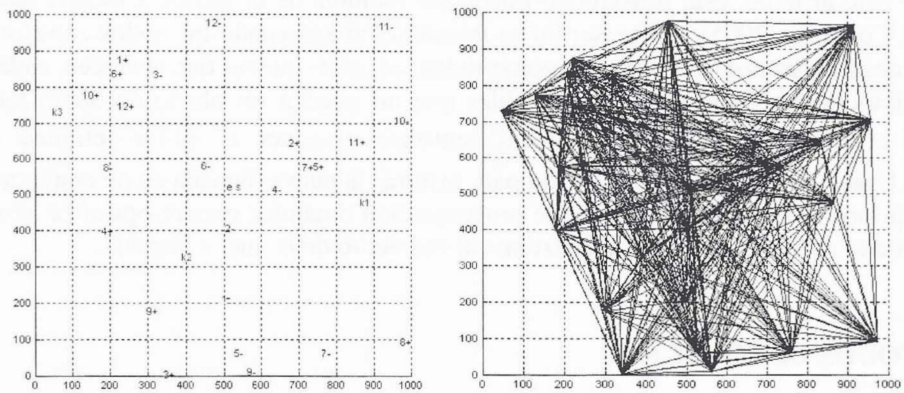

Figura 2: Red de ejemplo

Al considerar la función objetivo $\frac{1}{2}\sum_{i\in C} D_{i^+} + \frac{1}{2}\sum_{i\in C}\left(D_{i^-} - D_{i^+}\right)$ (que denota una expresión ponderada de tiempo total de viaje y tiempo total de espera de los usuarios) las rutas óptimas con y sin trasbordos son las que se muestran en la Figura 3.

Solución Óptima sin Trasbordos. Costo **8148.5** Solución Óptima con Trasbordos. Costo **8057**

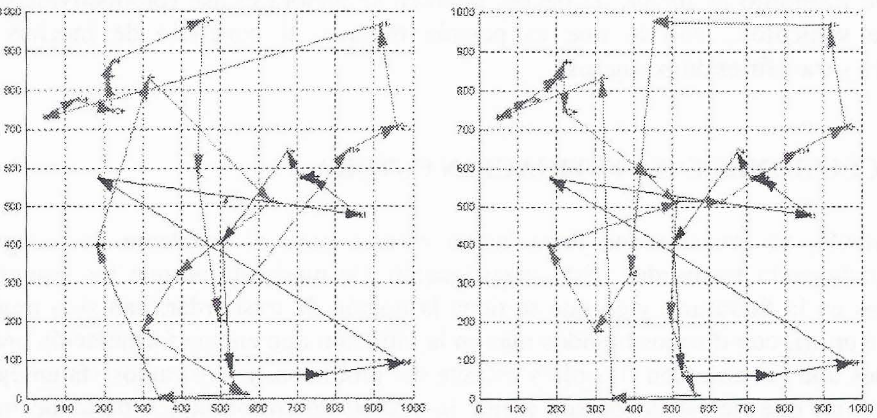

Figura 3: Soluciones del problema para $\frac{1}{2}\sum_{i\in C} D_{i^+} + \frac{1}{2}\sum_{i\in C}\left(D_{i^-} - D_{i^+}\right)$

Si en cambio minimizamos la distancia total recorrida por los vehículos, $\sum_{k\in M}\sum_{(i,j)\in E} t_{ij}x_{ij}^k$, obtenemos los siguientes resultados que se muestran en Figura 4.

Solución Óptima sin Trasbordos. Costo **6573** Solución Óptima con Trasbordos. Costo **6251**

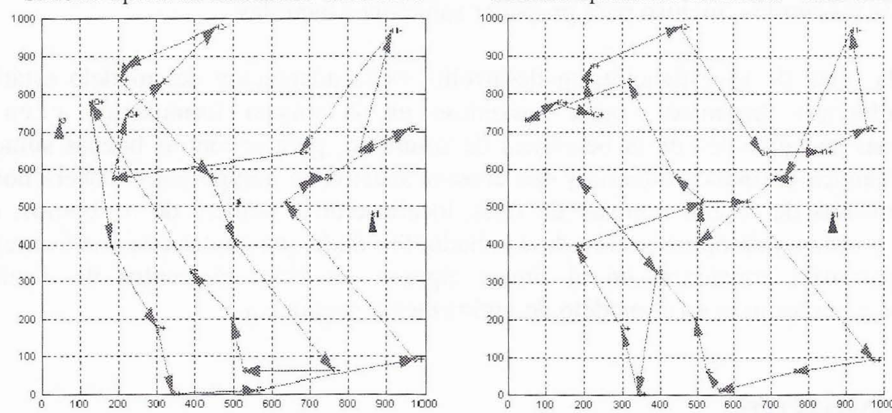

Figura 4: Soluciones del problema para $\sum_{k\in M}\sum_{(i,j)\in E} t_{ij}x_{ij}^k$

Para este ejemplo particular, al considerar ambas funciones objetivo (que no son comparables entre sí), podemos ver que en ambos casos la solución óptima considerando la posibilidad de hacer un trasbordo, es menor (y por ende mejor) que aquella del problema sin trasbordos. De hecho, en el caso de figura 3 la solución sin trasbordo ya es bastante buena, y por lo tanto es una gracia encontrar soluciones con trasbordo mejores. Esta función objetivo considera un costo por no sincronizar las llegadas y salidas en los trasbordos vía tiempo de espera de los pasajeros en los trasbordos.

El caso de la figura 4 que considera tiempo de viaje total recorrido por los vehículos, y a pesar de no considerar los efectos de sincronización en los trasbordos, de todas formas se encuentra que la solución con trasbordo es mejor, de hecho, también se mejora el uso (productividad) de mayor cantidad de vehículos., con lo que es posible rescatar el beneficio de muchos vehículos trasbordando y transfiriendo pasajeros.

7. CONCLUSIONES E INVESTIGACIÓN FUTURA

En este artículo, se muestra una formulación estricta para el problema de recoger y dejar pasajeros, incluyendo trasbordos. Esta investigación fue motivada porque los sistemas de este tipo descritos en la literatura, y en que se tiene la opción de trasbordar, han sido muchas veces propuestos a priori, con diseños basados más en la intuición que en una formulación precisa. Acá, desarrollamos una formulación flexible y estricta del problema, y mostramos vía un ejemplo que existen casos en que de hecho parece mejor la opción de trasbordar, a partir de más de una función objetivo distinta.

Se han desarrollado distintos algoritmos de solución para este problema específico, y últimamente se ha desarrollado una heurística de inserción en base a cortes de ruta y re-optimización ya sea antes o después del trasbordo. Todo el detalle de los algoritmos se encuentran en Contardo (2005). Actualmente, estamos trabajando en optimizar algunos procesos de la heurística, para poder resolver problemas de gran envergadura, donde es más probable que se requiera de trasbordos, incluso para proponer soluciones factibles.

Una segunda línea de investigación en desarrollo, es la adaptación del modelo estático, para resolver problemas dinámicos, ojalá basándose en la misma formulación y en base a modificaciones secuenciales de la heurística de inserción, para encontrar buenas soluciones al problema dinámica (demanda incierta y que entra al sistema en tiempo real). Deberá notarse que algunos elementos de diseño (tamaño de flota, localización y número de trasbordos, etc.) son exógenos al problema de optimización desarrollado. Sin duda que contar con una formulación de este tipo, permitirá considerar en el futuro algunos de estos elementos de diseño como endógenos, e incorporarlos en el modelo de optimización propuesto.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el proyecto FONDECYT N° 1030700, y por el Núcleo Milenio, en sus proyectos "Sistemas Complejos de Ingeniería" e "Información y Aleatoriedad".

REFERENCIAS

Benders, J.F. (1962) Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. **Numerische Mathematik 4**, 238-255.

Codato, G. y M. Fischetti (2004) Combinatorial benders cuts. En G.L. Nemhauser y D. Bienstock (editores), **IPCO, Lecture Notes in Computer Science 3064**, 178-195. Springer.

Contardo, C. (2005) Formulación y solución de un problema de ruteo de vehículos con demanda variable en tiempo real, trasbordos y ventanas de tiempo. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Matemático, Universidad de Chile.

Cortés, C.E. y R. Jayakrishnan (2005) Efficient strategies for passenger assignment and terminal operations in real-time routed transit with transfers. Enviado a Networks and Spatial Economics.

Crainic, T.G., F. Malucelli y M. Nonato (2001) Flexible many-to-few + few-to-many = an almost personalized transit system. **Proceedings of TRISTAN IV,** São Miguel Azores Islands, 435-440.

Desrosiers, J., Y. Dumas y F. Soumis (1986) A dynamic programming solution of the large-scale single-vehicle dial-a-ride problem with time windows. **American Journal of Mathematical and Management Sciences 6**, 301-325.

Dumas, Y., J. Desrosiers y F. Soumis (1991) The pickup and delivery problem with time windows. **European Journal of Operations Research 57**, 7-22.

Horn, M.E.T. (2001) Multi-modal and demand-responsive passenger transport systems: a modeling framework with embedded control systems. **Transportation Research 36A**, 167-188.

Horn, M.E.T. (2002) Fleet scheduling and dispatching for demand-responsive passenger services. **Transportation Research 10C**, 35-63.

Jaw, J.J., A.R. Odoni, H.N. Psaraftis y N.H.M. Wilson (1986) A heuristic algorithm for the multi-vehicle advance request dial-a-ride problem with time windows. **Transportation Research 20B**, 243-257.

Lu, Q. y M. Dessouky (2004) An exact algorithm for the multiple vehicle pickup and delivery problem. **Transportation Science 38**, 503-514.

Malucelli, F., M. Nonato y S. Pallottino (1999) Demand Adaptive Systems: some proposals on flexible transit. En T.A. Ciriani, *et al.* (editores) **Operational Research in Industry**, 157-182. McMillan Press, Londres

Psaraftis, H.N. (1980) A dynamic programming solution to the single-vehicle many-to-many immediate request dial-a-ride problem. **Transportation Science 14**, 130-154.

Psaraftis, H.N. (1983) An exact algorithm for the single-vehicle many-to-many dial-a-ride problem with time windows. **Transportation Science 17**, 351-357.

Psaraftis, H.N. (1988) Dynamic Vehicle Routing Problems. En B.L. Golden y A.A. Assad (editors) **Vehicle routing, methods and studies,** 223-248. North Holland, Amsterdam.

Ruland, K.S. y E.Y. Rodin (1997). The pickup and delivery problem: faces and Branch-and-cut algorithm. **Computers & Mathematics with Applications 33**, 1-13.

Savelsbergh, M.W.P y M. Sol (1995). The general pickup and delivery problem. **Transportation Science 29**, 17-29.

Schneider, J.B. y Smith, S.P. (1981) Redesigning Urban Transit Systems: A Transit-Center-Based Approach. **Transportation Research Record 798**, 56-65.