

## **CONTROL PREDICTIVO HIBRIDO PARA UN SISTEMA PERSONALIZADO DE TRANSPORTE PÚBLICO PUERTA A PUERTA PROGRAMADO EN TIEMPO REAL**

Cristián E. Cortés

Departamento de Ingeniería Civil  
Universidad de Chile, Santiago, Chile.  
Fono: (56-2) 678 4380, Fax: (56-2) 689 4206  
e-mail : ccortes@ing.uchile.cl

Doris Sáez H.

Departamento de Ingeniería Eléctrica  
Universidad de Chile, Santiago, Chile  
Fono: (56-2) 678 4207, Fax: (56-2) 695 3881  
e-mail: dsaez@ing.uchile.cl

Felipe Murcia M.

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile, Santiago, Chile.  
Fono: (56-2) 678 4026, Fax: (56-2) 689 7895  
e-mail: fmurcia@ing.uchile.cl

Alfredo Núñez V.

Departamento de Ingeniería Eléctrica  
Universidad de Chile, Santiago, Chile  
Fono: (56-2) 678 4207, Fax: (56-2) 695 3881  
e-mail: alfnunez@ing.uchile.cl

### **RESUMEN**

En este artículo se sintetiza el diseño de un modelo de programación de itinerarios de vehículos pertenecientes a un sistema de transporte de pasajeros con demanda dinámica, puerta a puerta y operando sobre un área urbana. El objetivo central de este trabajo es la formulación de un modelo de programación de itinerarios de vehículos que se adapte a las condiciones del sistema y que sea capaz de predecir las condiciones futuras de acuerdo con datos históricos y respondiendo a la demanda que se genera en tiempo real. Se utilizó una estrategia de control del tipo control predictivo adaptivo híbrido, que se caracteriza por trabajar con variables tanto continuas como enteras. En primer lugar, se formula el problema en variables de estado, las cuales son carga esperada y tiempo esperado de llegada a cada parada. De esta formulación, se desarrolla modelos de carga y tiempo de llegada con capacidad de predicción en el instante posterior (un paso) y en dos instantes futuros (dos pasos), de acuerdo con funciones de costo *ad hoc*, considerando tanto usuarios como operadores. Se muestra con un ejemplo, los beneficios en ahorro en tiempos de espera y viaje globales por efecto de usar una estrategia predictiva a más de un paso.

## 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas más estudiados en logística es el problema de recoger y dejar pasajeros, caracterizado por satisfacer un conjunto de requerimientos de servicio a partir de una flota de vehículos de tamaño fijo, y donde cada vehículo inicialmente se localiza en terminales o bodegas predeterminadas (Desrosiers *et al.*, 1995; Savelsberg y Sol, 1995). El problema puede generalizarse al caso dinámico, en el cual los requerimientos de servicio no son conocidos *a priori*, y por lo tanto, las decisiones de ruteo en el futuro podrían afectar a los usuarios cuya asignación se hace en tiempo presente (Psaraftis, 1988).

En este trabajo, se aborda el problema del ruteo de vehículos de transporte de pasajeros con servicio puerta a puerta, el cual presenta complejidad para la toma de decisiones de despacho cuando la demanda aparece en tiempo real. Estas decisiones tenderían a afectar el rendimiento del sistema percibido por los usuarios, lo que debiera reflejarse en baja demanda y deficiente productividad. Uno de los tópicos más relevantes para mejorar la eficiencia de estos sistemas es una definición apropiada de la función de costos de decisión, que debiera incluir tiempo de viaje y espera de los usuarios, así como costos de operación de los vehículos. Sin embargo, cuando el problema es dinámico, un efecto adicional debiera ser considerado dentro de la especificación analítica de tales funciones de costo, cual es el costo adicional asociado con potenciales reruteos futuros provocados por la demanda incierta, en las decisiones tomadas en tiempo real. Este problema fue tratado heurísticamente por Cortés y Jayakrishnan (2004) quienes formulan conceptualmente el problema dentro del marco de la teoría de control predictivo.

En la literatura especializada, es común que el tiempo de viaje entre paradas se asuma constante para efectos de computar el costo detrás de las reglas de programación dinámica y ruteo de vehículos (por ejemplo, Jaw *et al.*, 1986; Psaraftis, 1986). En esta investigación, proponemos un esquema para estimar el costo real de una inserción basado en información futura, con el objeto de tomar mejores decisiones dinámicas de inserción, en base a las condiciones de los vehículos y del sistema en todo instante. Notar que este análisis se sustenta en satisfacer las necesidades de servicio de clientes desconocidos que entrarán al sistema en el futuro, provocando el menor impacto posible (en términos de costo) sobre el operador y los usuarios que ya están en el sistema al momento de tomar la decisión. Sistemas de control de rutas e itinerarios que permitan tomar decisiones de despacho en tiempo real se hacen cada vez más atractivos principalmente debido al desarrollo de la tecnología en temas tan diversos como tecnologías de navegación, sistemas de posicionamiento satelital y sistemas de identificación automática de vehículos.

Aquí, el problema se formula bajo un enfoque de control híbrido, ya que se introducen variables tanto continuas como discretas, y se resuelve para un horizonte de predicción de dos pasos, el cual se compara con los resultados a un paso. Para esto, el sistema es definido en términos de variables de estado, cuales son la carga y el tiempo de llegada esperado en cada parada programada de los vehículos, se formulan las funciones de costo a uno y dos pasos y se resuelve usando enumeración explícita, considerando las restricciones físicas típicas de precedencia y capacidad de los vehículos. En la siguiente sección se hace referencia a la literatura en ruteo dinámico de vehículos y a los conceptos y formulaciones básicas de control predictivo. Luego se formula nuestro problema (en términos de variables de estado y funciones de costo), para terminar con una prueba empírica que muestra la necesidad de incorporar enfoques predictivos de este tipo en la toma de decisiones de sistemas dinámicos.



## 2. REVISIÓN DE LA LITERATURA: RUTEO DE VEHÍCULOS Y CONTROL PREDICTIVO

En esta sección, nos parece interesante revisar la literatura en temas de ruteo dinámico de vehículos, y por otra parte identificar los elementos de la teoría de control predictivo que fuesen aplicables al problema de ruteo de vehículos en tiempo real bajo nuestro enfoque. Psaraftis (1988), definió el problema de ruteo dinámico de vehículos de pasajeros como la programación de un conjunto de rutas para todos los vehículos, las cuales cambian dinámicamente sobre el tiempo según los requerimientos de demanda. Se destacan las complicaciones adicionales del programa dinámico sobre el estático, enfatizando detalles tales como lo insensato que parece definir ventanas de tiempo duras en problemas dinámicos. Minkoff (1993) propuso un modelo de decisión markoviano y una heurística de descomposición para el despacho dinámico de vehículos. Adicionalmente, Bertsimas y Simchi-Levi (1996), propusieron una nueva generación de investigación en ruteo de vehículos basado en algoritmos de optimización robusta, con estocacidad.

Una muy buena fuente de información para efectos de nuestra investigación, resulta ser la literatura respecto del problema de ruteo estocástico de vehículos. Se destaca el trabajo de Bertsimas *et al.* (1990) enfocado a situaciones donde el tamaño de la demanda es desconocida. Este problema es resuelto creando un conjunto de rutas que minimizan el costo esperado antes de que la demanda ocurra, asignando dicha demanda automáticamente a una ruta y a una posición sobre la ruta, de acuerdo con una programación *a-priori* (por soluciones *a-priori* se entiende que el planificador determina una o más rutas basadas en información probabilística de requerimientos futuros de servicio, demanda de clientes, tiempos de viaje, etc.). Los costos esperados incluyen el costo de viaje esperado entre los clientes sobre las rutas y los costos de penalización en los que se incurre si se necesitan rutas adicionales, cuando la demanda excede la capacidad. Adicionalmente, Bertsekas y Tsitsiklis (1996) proponen un enfoque de programación neuro dinámica que también permite resolver el problema de despacho dinámico de vehículos. Esta metodología permite a los sistemas “aprender a tomar buenas decisiones por observación de su propio comportamiento (simulación) y usar mecanismos incorporados para mejorar sus acciones a través de mecanismos de refuerzo (esquemas iterativos usados para mejorar la calidad de la función de costo).

Una investigación más reciente realizada por Malucelli (1999) describe un nuevo sistema de transporte flexible. Su sistema considera líneas de ruta fijas convencionales combinadas con líneas basadas en itinerarios flexibles y programados. Zhu y Ong (2000), proponen un método reactivo para resolver el problema de ruteo dinámico de vehículos. Ichoua (2000), propone una metodología para caracterizar los aspectos de diversión o divergencia de vehículos en tiempo real usando avances tecnológicos recientes en sistemas de comunicación que permiten la utilización de información en tiempo real para el ruteo dinámico de vehículos y programación.

Respecto del control predictivo con variables enteras (control híbrido), Bemporad y Morari (1999) presentan un esquema de control predictivo para sistemas híbridos incluyendo restricciones operacionales que también fueron resueltas usando programación cuadrática entera mixta. Bemporad *et al* (2002) desarrollan un trabajo sobre control predictivo basado en modelos resuelto por una técnica de programación entera denominada enumeración explícita. Ellos proponen un algoritmo tipo *Branch and Bound* con gran eficiencia al aplicarse al problema de

control predictivo híbrido. Finalmente, Borrelli *et al.* (2003) presentan un algoritmo eficiente para resolver el problema de control óptimo en tiempo finito basado en sistemas híbridos lineales de tiempo discreto con un criterio de desempeño cuadrático. Todos los trabajos en control predictivo referenciados arriba muestran mayoritariamente aplicaciones vía simulación para problemas de control típicos. Una contribución del presente artículo es formular el problema de transporte real descrito como un problema de control predictivo híbrido y resolverlo.

### 3. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Suponga que se tiene un conjunto de vehículos  $VF$  de tamaño de flota  $F$ . En algún instante de tiempo se asume que cada vehículo  $j \in VF$  ha sido asignado a una serie de tareas que incluyen recogidas y entregas de pasajeros, las que pueden ser representadas por una secuencia  $S_j = \{1, 2, \dots, i, \dots, w_j\}$ , en la cual el  $i$ -ésimo elemento de la secuencia representa una parada específica a lo largo de la ruta del vehículo  $j$ . La posición del vehículo  $j$  en el instante  $k$  se denota por  $v_j$  y este corresponde al primer elemento de la secuencia  $S_j$ .

Los requerimientos de servicio entran al sistema dinámicamente y las decisiones tienen que ser tomadas en tiempo real basadas en algún tipo de algoritmo de inserción perteneciente al controlador. La decisión final está dada por la inserción de nuevos requerimientos dentro de la mejor secuencia  $S_j$ , (aquella con el mínimo costo incremental de inserción) sujeto a las restricciones de factibilidad. En este trabajo se desarrolla un esquema de control predictivo adaptivo para modelar tal problema. La formulación se basa en la siguiente premisa: los tiempos esperados de viaje y espera en que todos los usuarios ya programados podrían incurrir durante su viaje podrían verse fuertemente afectados por futuras reasignaciones de los vehículos al programar llamadas futuras mientras van entrando dinámicamente al sistema. La idea es introducir dentro de las funciones de costo de asignación vehículo-pasajero una componente de predicción estocástica de forma de estimar de mejor manera y más realista los tiempos de viaje y espera que realmente experimentarán los individuos a lo largo de su viaje, de donde se debieran obtener mejores reglas de despacho en el sentido de minimizar el costo total del sistema.

El esquema propuesto es predictivo en el sentido de tomar decisiones de menor impacto futuro, y es adaptivo en la forma de generar reglas que se adapten dependiendo de cómo varíen las condiciones del sistema en el tiempo. Dado que las decisiones lógicas de asignación involucran acciones discretas, conceptualmente este problema puede ser considerado como una forma de un sistema de control híbrido adaptivo predictivo cuasi óptimo (HAPC en la literatura especializada). Para describir la formulación, asumimos que se trabaja sobre un área de influencia  $A$ , dentro de una red de servicio de longitud  $D$ , -en unidades de distancia [UD]-. También contamos con una flota de vehículos de tamaño  $F$  moviéndose dentro del área de acuerdo con reglas de ruteo y programación determinadas por el algoritmo despachador. La demanda por servicio es desconocida y se genera en tiempo real (cuya media es  $\mu$  en llamadas por unidad de tiempo [llamada/UT]). El controlador predictivo toma las decisiones de ruteo en tiempo real basado en la información del sistema (proceso), y de los valores esperados tanto para el tiempo de viaje como para otros atributos de la flota de vehículos (modelo). Dicho controlador predictivo toma las decisiones de asignación de pasajero a las rutas de los vehículos siempre que un nuevo



requerimiento entre al sistema. En otras palabras, el mecanismo de control es activado siempre que una nueva llamada ingrese. Por lo tanto, en lugar de definir un lapso de tiempo fijo, en este esquema de control se formula el problema en términos de un lapso de tiempo variable, el cual representa el intervalo de tiempo entre los requerimientos  $k-1$  y  $k$ .

El estado del sistema en el instante  $k$  (por ejemplo, cuando un requerimiento entra al sistema) está determinado por los atributos de cada vehículo, denominados  $M_j(i-1, i)$  para el vehículo  $j$  sobre el segmento  $(i-1, i)$  de la secuencia de la ruta. Estos atributos incluyen todas las características de los vehículos cuando parten desde la  $i$ -ésima parada de su secuencia. En la formulación propuesta el vector de atributos está compuesto por el tiempo de reloj de llegada  $T_j^i(k)$  y por la carga del vehículo  $L_j^i(k)$ , ambos para cada parada  $i$  dentro de la ruta del vehículo  $j$  en el instante  $k$ . En un contexto más general, otras variables podrían ser añadidas para obtener una visión más completa del estado de los vehículos, tales como el tiempo acumulado de viaje experimentado por todos los pasajeros a bordo después de la parada  $i$  y una posible medida de disponibilidad de espacio en otros vehículos para potenciales pasajeros en la proximidad del segmento  $(i-1, i)$  (Cortés y Jayakrishnan, 2004). El controlador  $u(k)$  puede ser visualizado como las decisiones de despacho del módulo de ruteo representadas por el conjunto de secuencias asignadas a cada vehículo en el instante  $k$ . Analíticamente,

$$u(k) = \{S_j\}_k = \{S_j(k)\} \quad \forall j: 1, \dots, F \quad (1)$$

Notar que las secuencias  $S_j(k)$  se mantienen fijas durante el intervalo de tiempo completo  $(k, k+1)$ . El vector de medida de proceso  $y$ , puede ser computado midiendo los tiempos de viaje para los segmentos observados  $T_j^{(i-1, i)}(k)$ , ocurridos durante el intervalo de tiempo  $(k, k+1)$  para todos los vehículos  $j$  y para todos los pares de paradas  $(i-1, i)$ . Cabe anotar que cada pasajero que se incorpora al sistema, genera dos puntos de referencia, cuyas coordenadas geográficas definen el lugar exacto de recogida y de entrega de dichos pasajeros. La decisión de despacho dinámico depende de la función de costo que se utilice (ver sección 4), la cual está expresada en términos del tiempo de viaje del segmento  $T_j^{(i-1, i)}(k)$  como su principal componente. Adicionalmente, la formulación permite la medición del tiempo de espera y el tiempo de viaje del segmento medido, como un indicador decisivo de la acción de control.

El valor esperado de los atributos de cada vehículo (carga y tiempo de llegada en cada parada), - calculados para un horizonte de predicción  $N$  -, se entregan para cada instante  $k$  usando un modelo en variables de estado. Este modelo se usa para predecir la salida del sistema futuro  $y(k+l)$  con  $l=1, \dots, N$ , basado en el pasado y en los valores actuales de las variables de estado y las acciones de control futuras  $u(k+l-1)$ . Los valores predichos  $y(k+l)$  para  $l=1 \dots N$  dependen de los valores conocidos en el instante  $k$  (entradas y salidas anteriores) y la señal de control  $u(k+l-1)$ . Analíticamente, los tiempos de viaje por trayecto se computan directamente como  $T_j^{(i-1, i)}(k) = T_j^i(k) - T_j^{i-1}(k)$ . Se entiende que los pares de paradas  $(i-1, i)$ , son adyacentes en la secuencia actual  $S_j(k)$ . Entonces, por ejemplo, cuando  $l=1$ , la variable  $x(k)$  representa a los atributos (carga y tiempo de llegada) que un vehículo tiene entre un par de puntos (paradas) en un

instante de tiempo determinado,

$$x(k) = \{M_j(i-1, i)\}_{|_k} \quad \forall j: 1, \dots, F \quad (2)$$

$$y(k) = \{T_j^{(i-1, i)}(k)\} \quad \forall j: 1, \dots, F \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ y(k+1) &= g(x(k+1)) \end{aligned} \quad (4)$$

Después de evaluar una cierta función de costo (ver sección 5), el controlador decide la localización óptima de requerimientos  $k+1$ , generando el vector final de secuencias  $S^*(k)$ . En los casos donde  $l > 1$  (el horizonte de predicción es mas grande que el lapso de tiempo siguiente al momento actual), el controlador adiciona el elemento predictivo dentro de la formulación, ya que las decisiones que fueron tomadas en  $k+1$  podrán depender de los posibles eventos a ocurrir en instantes futuros. El proceso de decisión de la secuencia de cada vehiculo, requiere datos obtenidos del desempeño del periodo para un horizonte  $H_e$  medido hacia atrás desde la ocurrencia del evento  $k$ . Un elemento central para poder establecer la dinámica del problema es la formulación en variables de estado del problema específico de ruteo dinámico de vehículos descrito aquí, tal como se desarrolla en la siguiente sección. En la sección 5, se explica el mecanismo adaptivo basado en la actualización de los parámetros del modelo dados los datos observados (procedimiento de calibración).

#### 4. FORMULACIÓN EN VARIABLES DE ESTADO PARA EL PROBLEMA DE RUTEO DINÁMICO DE VEHÍCULOS

Esta investigación considera los modelos en variables de estado híbridos, específicamente los asociados a la formulación *MLD* (*Mixed Logical Dynamical systems*). Por lo tanto, lo que se decide realizar es adaptar el problema a un esquema de control similar al de los modelos híbridos en variables de estado para expresar la carga y los tiempos de arribo a cada parada, explicitando la primera ecuación en expresión (4), de la forma

$$\begin{bmatrix} L(k+1) \\ T(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_L(L(k), S(k)) \\ f_T(T(k), S(k)) \end{bmatrix} \quad (5)$$

##### 4.1. Modelo en variables de estado de la carga del vehículo

El comportamiento de la carga del vehículo se obtiene usando el siguiente modelo

$$L(k+1) = A_L L(k) + B_L(S(k)) \quad (6)$$

La variable manipulada  $S(k)$  esta representada por expresión (7), donde la primera y segunda columna representan la recogida y la entrega en la parada  $i$  respectivamente.



$$S(k) = \begin{bmatrix} p^i & d^i & t^i & label^i \\ p^{i+1} & d^{i+1} & t^{i+1} & label^{i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{(w_j+3) \times 4} \quad (7)$$

donde

$$p^i = \begin{cases} 1 & \text{si } label^i \text{ es una parada tipo } pick-up \\ 0 & \text{Caso contrario} \end{cases} \quad y \quad d^i = \begin{cases} 1 & \text{si } label^i \text{ es una parada tipo } delivery \\ 0 & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

Nótese que  $p^i = 1 - d^i$ . Se asume que cada requerimiento de servicio se asocia a un solo pasajero, modelación que fácilmente se puede extender a múltiples pasajeros en cada lugar de recogida. La tercera columna representa la función externa de tiempo de viaje (asumida exógena y siempre conocida por el controlador en este trabajo), donde  $t^i$  es el tiempo de viaje de la red entre los puntos  $i-1$  y  $i$ . Finalmente, la última columna  $label^i$  indica la identificación del pasajero. El vector de carga se puede escribir como

$$L(k) = [L_j^0(k) \quad L_j^1(k) \quad \dots \quad L_j^{w_j}(k)]_{(w_j+1) \times 1}^T \quad (8)$$

Donde  $L_j^i(k)$  representa la carga del vehículo  $j$ , cuando dicho vehículo abandona la parada  $i$  en el periodo de decisión  $k$ , y  $w_j$  es el número de paradas pertenecientes a una secuencia de un vehículo elegido. Las matrices del modelo en variables de estado, definidas en la ecuación (6) son las siguientes:

$$B_L(S(k)) = B_L^2 \cdot (S(k) \cdot B_L^1)$$

$$A_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(w_j+3) \times (w_j+1)}; \quad B_L^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1}; \quad B_L^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(w_j+3) \times (w_j+3)}$$

Las matrices auxiliares  $A_L, B_L^1, B_L^2$  son parámetros adaptivos del modelo en variables de estado para la carga requeridos para ajustar el vector de carga a la dimensión de la secuencia.

#### 4.2. Modelo en variables de estado del tiempo de llegada

Este modelo es definido por el comportamiento del tiempo de llegada del vehículo a sus paradas, obtenido usando una metodología similar, representada en la siguiente expresión

$$T(k+1) = A_T \cdot T(k) + B_T(S(k)) \quad (9)$$

La variable manipulada es de nuevo la secuencia  $S(k)$ , y el vector de tiempo de llegada es:

$$T(k) = [T_j^0(k) \quad T_j^1(k) \quad \dots \quad T_j^{w_j}(k)]_{(w_j+1) \times 1}^T \quad (10)$$

donde  $T_j^i(k)$  representa el tiempo de llegada del vehículo  $j$  a la parada  $i$  medida en el intervalo

$k$ . Así mismo,  $w_j$  es el número de paradas en una secuencia de un vehículo dado. Las matrices del modelo en variables de estado definidas en la ecuación (9) son en este caso las siguientes:

$$\mathbf{B}_T(\mathbf{S}(k)) = \mathbf{B}_T^2(\mathbf{S}(k))\mathbf{B}_T^1$$

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(w_j+3) \times (w_j+1)}; \mathbf{B}_T^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(w_j+3) \times (w_j+3)}; \mathbf{B}_T^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{(4) \times 1}$$

Similarmente al modelo de carga, la matrices  $\mathbf{A}_T, \mathbf{B}_T^1, \mathbf{B}_T^2$  son parámetros adaptivos del modelo en variables de estado para el tiempo de arribo. La dimensión de estas matrices también depende de la dimensión de la secuencia.

## 5. ALGORITMOS DE CONTROL HÍBRIDO ADAPTIVO PREDICTIVO (HAPC) PARA EL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN Y RUTEO DINÁMICO DE VEHÍCULOS

En esta sección se explicitan los algoritmos con los cuales el controlador toma las decisiones. La función de costos es la métrica de desempeño con la cual el controlador toma cada decisión de ruteo. El controlador debe asignar cada llamada -que aparece aleatoriamente en el tiempo y el espacio-, a la ruta del vehículo más conveniente (aquel que minimice la función de costos para todo el sistema). Uno podría plantear el problema genérico a  $n$  pasos, sin embargo en este trabajo lo plantearemos a uno y dos pasos como horizonte de evaluación, y se resolverá con enumeración explícita para comprobar empíricamente las ventajas de introducir el elemento predictivo en la asignación pasajero-vehículo.

### 5.1 Esquema de control a un paso

El esquema de control a un paso tiene una función de desempeño económico dada por la función de costos de un vehículo en particular midiendo una nueva inserción, expresada como un costo incremental; la asignación se evalúa en base a dicha función determinando la mejor secuencia que podría tener cada vehículo, dentro de todas las secuencias factibles (en términos de precedencia y capacidad de los vehículos), dado que se debe satisfacer el requerimiento de la nueva llamada que entra al sistema. La función de costos del vehículo elegido será la siguiente:

$$J_j = \{\Delta C_j\}_{S_j(k)} = \{C_j(k+1) - C_j(k)\} \quad (11)$$

La expresión (11) debe ser computada para cada secuencia posible  $S_j(k)$  en el instante  $k$ . La matriz de secuencia óptima  $S_j^*(k)$  se obtiene comparando los costos en (11) entre todas las secuencias factibles. Analíticamente,  $S_j^*(k) = \arg \min_{S_j(k)} \{J_j(S_j(k))\} \quad \forall S_j(k)$ . Conceptualmente,  $J_j$  representa el costo de inserción computado en tiempo real dentro de una secuencia particular



cuando el sistema acepta una nueva llamada (en tiempo  $k+1$ ). Finalmente, la llamada se asigna al vehículo con menor costo, es decir,  $j^* = \arg \min_j \{J_j(S_j^*(k))\} \quad \forall j: 1..F$ . Se utiliza la siguiente expresión para la función de costos:

$$C_j(k+1) = \sum_{i=1}^{w_j} \left\{ \underbrace{[L_j^i(k+1)+1][T_j^i(k+1)-T_j^{i-1}(k+1)]}_{\text{Tiempo Viaje}} + \underbrace{r_j^i(k+1) \cdot \alpha \cdot T_j^i(k+1)}_{\text{Tiempo Espera}} \right\} \quad (12)$$

donde  $L_j^l(k+1)$  y  $T_j^l(k+1)$  son el tiempo de llegada y la carga pertenecientes a la secuencia del vehículo en un instante dado  $(k+1)$  para cada parada  $l$ , respectivamente. Adicionalmente,

$$r_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si el elemento } i\text{ésimo de la secuencia del vehiculo } j \text{ es un pick up} \\ 0 & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

La función de costos  $C_j(k+1)$  en (12), se puede separar en una componente de tiempo de espera y otra de tiempo de viaje. Ambas están escritas en función del tiempo de llegada y de la carga del vehículo (representada por el número de pasajeros más el conductor de cada vehículo con el fin de incorporar de alguna forma el costo del operador por mover vehículos vacíos). La componente de costo de espera es ponderada por un coeficiente  $\alpha$ . Usualmente  $\alpha > 1$ , de donde se asume que los pasajeros están dispuestos a pagar más por disminuir el tiempo de espera que el tiempo de viaje.

## 5.2 Esquema de control a dos pasos

La función de costos asociada al esquema de control predictivo a dos pasos requiere que el cálculo de una expresión para  $J_j$  dependa de la incertidumbre de la posición de la llamada que podría entrar en el futuro al sistema. En la formulación planteada en este trabajo, la decisión de asignar dicha llamada que aparecerá en el futuro (predecir la llamada futura) se basa en los datos históricos del sistema. Para especificar la función de costos, se utiliza una expresión para la probabilidad de la llamada potencial que recibirá el sistema en el instante de tiempo futuro, de acuerdo a su ubicación espacial dentro de la red urbana.

Complementariamente, se define un centro de masa para las llamadas en un área específica como la coordenada geográfica de mayor concentración de llamadas a ocurrir durante un periodo de tiempo específico. Para realizar la predicción a dos pasos, se requiere de una probabilidad asociada a que un nuevo requerimiento (como par origen-destino) ocurra dentro de un par de áreas geográficamente cercanas al trayecto del vehículo, en un intervalo de tiempo conocido. Entonces, la nueva entrada de llamadas tiene una probabilidad  $p_h^{\Delta T(k+2)}$ , donde  $h$  denota el par específico de zonas y  $\Delta T(k+2)$  representa el intervalo de tiempo que contiene al instante  $(k+2)$ , y que dependerá de cuan fino se quiera discretizar el tiempo total de modelación considerando la calidad de la información histórica. El tiempo entre llamadas se asume siguiendo una exponencial negativa. Con el fin de aplicar esta metodología, la zona de estudio es dividida en áreas más pequeñas, tomando en cuenta cada problema específico. El controlador predictivo a dos pasos selecciona la secuencia de aquel vehículo que minimiza la función de costos global.

Esta función de costos representa el costo de la inserción potencial de una posible nueva llamada que aparece cerca de la trayectoria espacial en un intervalo de tiempo dado, y es función de la probabilidad  $p_h^{\Delta T(k+2)}$  de ocurrencia de la siguiente llamada entre un par de zonas  $h$ , en un intervalo de tiempo  $\Delta T(k+2)$  y que cambia dinámicamente dependiendo de la intensidad de la demanda en un periodo particular de tiempo asociada a cada par de zonas  $h$ . El criterio de asignación de un requerimiento a un vehículo está determinado por la secuencia óptima en cada instante de tiempo. La asignación de la llamada en  $(k+1)$  en este caso se determina de resolver el siguiente problema de optimización:

$$\text{Min } J(S(k)) = \sum_{j=1}^F C_j(k+2) \Big|_{S_j(k)} \quad \text{de donde se obtiene } S^*(k) = (S_1^*(k), S_2^*(k), S_3^*(k), \dots, S_F^*(k))$$

y la llamada será asignada al vehículo que corresponda según lo establecido en  $S^*(k)$ . La expresión que representa al costo de un vehículo dado en el instante futuro  $(k+2)$  es la siguiente:

$$C_j(k+2) = \sum_{h \in H} \sum_{i=1}^{w_j} p_h^{\Delta T(k+2)} \{ [L_j^{ih}(k+2) + 1] [T_j^{ih}(k+2) - T_j^{(i-1)h}(k+2)] + r_j^{ih}(k+2) \cdot \alpha \cdot T_j^{ih}(k+2) \} \quad (13)$$

donde

$L_j^{ih}(k+2)$  es la carga del vehículo  $j$  en el instante  $(k+2)$  para cada parada  $i$  (recogida o entrega) dado que la llamada potencial ocurre en el par  $h$ .

$T_j^{ih}(k+2)$  es el tiempo de arribo esperado del vehículo  $j$  en el instante  $(k+2)$  a cada parada  $i$  (recogida o entrega) dado que la llamada potencial ocurre en el par  $h$ .

Se puede demostrar que la optimización en este caso es independiente del paso intermedio  $k+1$ , sin embargo las variables en (13) dependen implícitamente de la decisión que se haya tomado en el paso intermedio, totalmente definidas a partir del vector  $S(k)$ . Además, y tal como se mencionó anteriormente, la probabilidad que una nueva llamada aparezca en un par específico  $h \subseteq H$  dentro del intervalo de tiempo  $\Delta T(k+2)$  se computa como

$$p_h^{\Delta T(k+2)} = \frac{N_h^{\Delta T(k+2)}}{\sum_{g \in H} N_g^{\Delta T(k+2)}} \quad (14)$$

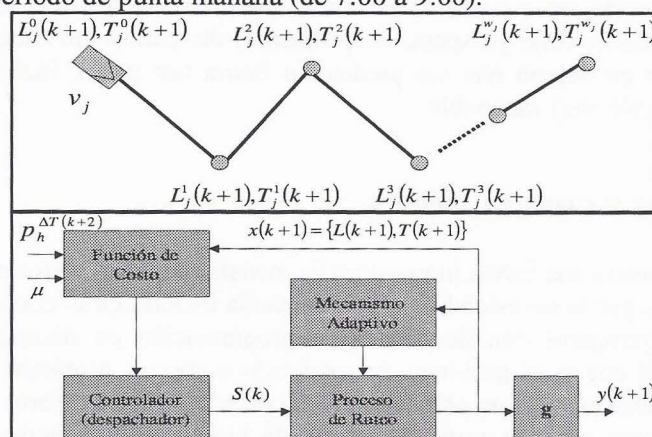
donde  $N_h^{\Delta T(k+2)}$  es el número total de requerimientos de viaje observados entre un par de zonas  $h$ , en un intervalo específico de tiempo  $\Delta T(k+2)$ . Notar que  $\sum_{h \in H} p_h^{\Delta T(k+2)} = 1$ .

Gráficamente el sistema trabaja tal como se ilustra en la figura 1. El proceso de ruteo ha sido representado por las variables de estado carga y tiempo del vehículo para un instante futuro. Del bloque **g** se obtiene las variables observadas (tiempos de viaje y espera finales), y que servirán para determinar la calidad de la modelación, y la necesidad de adaptar los parámetros del modelo. El controlador genera la mejor secuencia entre todas las posibles y finalmente el mecanismo adaptivo corresponde al mecanismo de variación (actualización) de las matrices **A, B** con el propósito de actualizar los vectores de carga y tiempo de arribo a la dimensión de la secuencia.



## 6. PRUEBAS EXPERIMENTALES

En esta sección se sintetiza una primera implementación del método vía simulación a partir de datos históricos de viaje en la ciudad de Santiago de Chile, obtenidos de la encuesta origen destino realizada el año 2001. Con este experimento, queremos visualizar las ventajas de utilizar control predictivo a dos pasos versus decisiones en tiempo real a un paso. Se eligió realizar la simulación para el periodo de punta mañana (de 7:00 a 9:00).



**Figura 1 a) Secuencia de un vehículo con variables de estado, b) Esquema de control híbrido adaptativo predictivo (HAPC) aplicado al problema de ruteo dinámico de vehículos**

Se asume que la distribución de demanda por el servicio de transporte propuesto (servicio puerta a puerta similar al radiotaxi), sigue la misma distribución de viajes motorizados observada de la encuesta. Se observa que el 90% de estos viajes ocurren en seis pares de comunas de Santiago ( $H=6$ ). Las probabilidades promedio observadas en el período de análisis (se asumen constantes durante todo el período) son entonces, las que se observan en tabla 1. La flota de vehículos considerada es de tamaño 10 (cada uno con capacidad para 6 pasajeros). Los vehículos inician su recorrido en centros de masa preasignados, promediando una velocidad comercial de 20 kilómetros por hora, siguiendo las secuencias generadas en tiempo real de acuerdo a la distribución de requerimientos de servicio.

**Tabla 1: Probabilidades de ocurrencia de 1 llamada por zona.**

| Origen      | Destino     | Probabilidad |
|-------------|-------------|--------------|
| Puente Alto | Puente Alto | 0.3048       |
| Vitacura    | Santiago    | 0.1940       |
| La Florida  | La Florida  | 0.1859       |
| Las Condes  | Las Condes  | 0.1399       |
| Maipú       | Santiago    | 0.0914       |
| Providencia | Providencia | 0.0840       |

Fuente: SECTRA Santiago de Chile, 2005

Se generaron 50 repeticiones de 60 llamadas aleatorias (siguiendo el patrón histórico) durante el período de dos horas, obteniéndose los tiempos de viaje y espera de servicio promedio (y desviación estándar) para 40 llamadas en cada repetición que se resumen en tabla 2 (considerando un período efectivo de régimen entre la llamada 10 y la 50 aproximadamente para evitar distorsiones por los límites temporales de la prueba).

**Tabla 2: Tiempos de espera y viaje registrados bajo dos estrategias de control.**

| Estrategia de Control | Tiempos Promedios (min) |        |        | Desviación Estandar (min) |        |        |
|-----------------------|-------------------------|--------|--------|---------------------------|--------|--------|
|                       | Espera                  | Viaje  | Total  | Espera                    | Viaje  | Total  |
| Un paso               | 30.96                   | 21.909 | 52.869 | 12.108                    | 11.346 | 23.454 |
| Dos pasos             | 21.491                  | 14.99  | 36.481 | 10.058                    | 8.916  | 18.974 |

De la tabla 2 se aprecian los considerables beneficios (ahorros de cerca de 16 minutos en el tiempo total considerando viaje y espera, en promedio) de utilizar un esquema predictivo por sobre una asignación en tiempo real sin predicción futura (un paso), incluso considerando un esquema de optimización muy razonable.

## 7. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

En este trabajo se muestra una forma innovadora de modelar demoras provenientes de reruteos de vehículos provocados por la necesidad de servir demanda incierta en el contexto de un problema de recoger y dejar pasajeros con decisiones de programación en tiempo real por demanda dinámica. Se muestra que si el problema es modelado como un problema de control del tipo adaptivo predictivo híbrido, se logra obtener considerables beneficios a partir de las decisiones de programación en tiempo presente tomando en cuenta la entrada al sistema de demanda futura incierta.

Considerando lo promisorio de los resultados, en la actualidad se está desarrollando esquemas de programación para horizontes de evaluación superiores a dos pasos. Adicionalmente, se está trabajando en mejorar tanto las especificaciones de las funciones de costo, así como los algoritmos de solución utilizados (mejores opciones que enumeración explícita). De hecho, a esta altura se tienen resultados a partir de la incorporación de algoritmos genéticos en la optimización de las metodologías, tanto a uno como a dos pasos (Núñez *et. al*, 2005). En aplicaciones aún más sofisticadas, se espera contar con expresiones analíticas para los modelos en variables de estado, particularmente las matrices A y B como dependientes de la secuencia de los vehículos, y una forma funcional más rigurosa para la función de costos de decisión (Núñez *et. al*, 2005). Finalmente, la forma de internalizar la información histórica vía probabilidades también puede ser mejorada a partir de un mejor entendimiento de la data histórica. Se está estudiando la forma de usar data histórica (tal como la que se usa en este trabajo) en combinación con información histórica reciente generada y procesada en tiempo real en un horizonte previo a la toma de decisiones.

## AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por los proyectos FONDECYT 1030700 y 1040698, y por el Núcleo Milenio, en su proyecto "Sistemas Complejos de Ingeniería".



## REFERENCIAS

- Bemporad A., y M. Morari (1999). Control of systems integrating logic, dynamics and constraints, **Automatica**, 35, 407-427.
- Bemporad, A., F. Borrelli y M. Morari (2002). Model predictive control based on linear programming. The explicit solution, **IEEE Transactions Automatic Control**, 47 (12), 1974-1985.
- Bertsekas D., y J. N. Tsitsiklis (1996), **Neuro-Dynamic Programming**, Athena Scientific.
- Bertsimas, D., y D. Simchi-Levi (1996), The New Generation of Vehicle Routing Research: Robust Algorithms Addressing Uncertainty, **Operations Research** 44, 286-304.
- Bertsimas, D., P. Jaillet and A. Odoni (1990). A priori optimization **Operations Research** 38, 1019-1033.
- Borrelli, F., M. Baotic, A. Bemporad and M. Morari (2003), An Efficient Algorithm for Computing the State Feedback Optimal Control Law for Discrete Time Hybrid Systems, **Proceedings of 2003 American Control Conference**, Denver, Colorado, USA.
- Cortés C.E., y R. Jayakrishnan (2004). Analytical modeling of stochastic rerouting delays for dynamic multi-vehicle pick-up and delivery problems. **Proceeding of the Triennial Symposium on Transportation Analysis (TRISTAN) V**, Guadeloupe, French West Indies.
- Desrosiers, J., Y. Dumas, M. Salomon y F. Soumis (1995). Time Constrained Routing and Scheduling, en **Handbooks in Operations Research / Management Science**, Volume 8, Network Routing, 35-139, Elsevier Science Publishers B.V.
- Ichoua, S., M. Gendreau y J. Potvin (2000). Diversion Issues in real-time vehicle dispatching, **Transportation Science** 34, 426-435.
- Jaw, J., A. Odoni, H. Psaraftis y N. Wilson. (1986), A heuristic algorithm for the multi-vehicle advance request dial-a-ride problem with time windows, **Transportation Research** 20B, 243-257.
- Malucelli, F., M. Nonato y S. Pallottino (1999). Demand Adaptive Systems: some proposals on flexible transit, **Operational Research in Industry**, T.A. Ciriani, et al., Editors, McMillan Press: London, 157-182.
- Minkoff A.S. (1993). A Markov Decision Model and Decomposition Heuristic for Dynamic Vehicle Dispatching. **Operations Research** 41, 77-90.
- Nuñez, A., D. Sáez y C.E. Cortés (2005). Problema de ruteo dinámico de una flota de vehículos con un enfoque de control predictivo híbrido basado en algoritmos genéticos, **Actas del XII Congreso Chileno de Ingeniería de Transporte**, Valparaíso, Chile.

Psaraftis, H. (1988). Dynamic vehicle routing problems, en B.L. Golden and A.A. Assad editors, **Vehicle routing methods and studies**, 223-248.

Psaraftis, H. (1986) Scheduling large-scale advance-request dial-a-ride systems, **American Journal of Math. And Mgmt. Sciences**, 6, (3/4), 327-367.

Savelsbergh, M., y M. Sol (1995), The general pickup and delivery problem, **Transportation Science** 29, 17-29.

Zhu, K.Q., y K.L Ong (2000). A Reactive Method for Real Time Dynamic Vehicle Routing Problems, **Proceedings of the 12th IEEE International Conference on Tools for Artificial Intelligence, ICTAI 2000**, Vancouver, Canada.