

## ANÁLISIS DEL RUTEO DE MATERIALES PELIGROSOS PARA UNA SITUACIÓN UNIPRODUCTO Y DE MÚLTIPLES EMBARQUES

Andrés Bronfman C. y Pablo Miranda G.  
Departamento de Ciencias de la Ingeniería, Universidad Andrés Bello  
Código: 837-0149 Santiago, Chile.  
Tel!: (56 2) 661 8256; Fax (56 2) 661 8623  
E-mail: [pamiranda@unab.cl](mailto:pamiranda@unab.cl)

Rodrigo Garrido H.  
Departamento de Ingeniería de Transporte, Pontificia Universidad Católica de Chile  
Casilla 306, Santiago 22, cod. 105, Chile.  
Tel!: (56 2) 686 4270; Fax (56 2) 688 4818  
E-mail: [rgarrido@ing.puc.cl](mailto:rgarrido@ing.puc.cl)

### RESUMEN

La principal preocupación en el transporte de materiales peligrosos (MP) es minimizar el riesgo de accidentes que impliquen múltiples fatalidades, evitando situaciones donde estén presentes los factores de riesgo más peligrosos. En este contexto, la literatura relacionada al ruteo de MP se centra principalmente en la identificación de las consecuencias esperadas y probabilidades asociadas al transporte de una sola mercancía, entre un par origen-destino, dando paso a la utilización de diferentes formulaciones basadas en el problema de ruta mínima. Sin embargo, existen situaciones donde la consecuencia esperada total impuesta a la población, producto de múltiples embarques de un MP, y la existencia de eventos de baja probabilidad y alta consecuencia (BPAC) constituyen factores importantes al momento de seleccionar rutas para su traslado, especialmente sobre zonas densamente pobladas. En este contexto, la representación a través de un modelo de flujo de redes que incorpore eventos de BPAC es necesaria para asegurar soluciones suficientemente razonables. Motivados en estas falencias, y en el estudio presentado por Sherali *et al.* (1997) (donde se aborda la incorporación de eventos de BPAC para el envío de un sólo embarque de un MP), el presente artículo considera el problema de traslado de múltiples embarques de un MP como un modelo de flujo de redes considerando eventos de BPAC. Se presentan dos formulaciones para este problema: una como extensión del Modelo de Programación Fraccional Lineal presentado en Sherali *et al.* (1997) y otra basada en una reformulación lineal del problema, permitiendo una fuerte reducción de la complejidad en la resolución. Un pequeño ejemplo es analizado, comparando los resultados de ambos modelos (validando su equivalencia), y comparando estas soluciones con una equivalente a la entregada por el modelo de Sherali *et al.* (1997), resultando en una reducción de la esperanza condicional de la consecuencia de accidentes catastróficos y, por ende, la exposición total de la población a los riesgos catastróficos asociados al transporte de MP. Lo anterior, en desmedro de un aumento en el riesgo y probabilidad total de accidente, manteniendo éstos dentro de límites aceptables.

## 1 INTRODUCCIÓN

Gran parte de la literatura que trata el ruteo de Materiales Peligrosos (MP) se centra en el problema de transportar una sola mercancía entre un par origen-destino determinado. Aunque algunos de los problemas logísticos encontrados en la práctica pueden descomponerse en un conjunto de problemas con un sólo embarque, hay otros problemas donde el riesgo total impuesto a la población constituye un factor importante en el proceso de selección de rutas para varios embarques de un MP. Un ejemplo lo constituye la labor de una institución gubernamental al definir rutas para embarques de MP en su jurisdicción. Adicionalmente, y pese a que los enfoques presentados puedan variar en la manera de incorporar el riesgo, casi todos los estudios se reducen a la formulación de un problema de ruta mínima. Sin embargo, a pesar de que el problema de encontrar la ruta más corta es un caso especial del modelo de flujo de redes, este último parece más apropiado para el problema de transporte de MP. En una revisión de la literatura, Sivakumar *et al.* (1993) presentan un modelo para el transporte de MP identificando una ruta que minimiza la consecuencia esperada, dado que ocurre un accidente (modelo de riesgo condicional). El modelo permite el traslado sobre una ruta determinada hasta que ocurre el primer accidente. En Sivakumar *et al.* (1995) se emplea una función objetivo que minimiza la consecuencia esperada del primer accidente, y consideran la equidad en la distribución espacial del riesgo entre las diversas zonas geográficas de la región estudiada. Su objetivo es encontrar un camino que minimice el número esperado de fatalidades, dado que este número excede un cierto umbral o que el cargamento cese después del primer accidente. Jin *et al.* (1996) y Jin y Batta (1997) tratan diversas funciones objetivos basadas en la minimización de la consecuencia esperada dado que se hará un número determinado de viajes, y dado un número máximo de accidentes aceptados antes de que los envíos cesen. Finalmente Sherali *et al.* (1997) incorpora eventos con Bajas Probabilidades y Altas Consecuencias (BPAC) centrándose en la minimización de la esperanza condicional de un resultado catastrófico dado que ha ocurrido un accidente. Propone un modelo de programación fraccional lineal discreto que es resuelto mediante un algoritmo Branch and Bound.

El presente estudio trata eventos de BPAC, incorporando la selección de múltiples rutas para un conjunto de embarques en un modelo de flujo en redes. La sección 2 se centra en la determinación de probabilidades, consecuencias esperadas y esperanza condicional de la consecuencia, dado que ocurre un accidente. La sección 3 presenta una primera formulación basada en Programación Fraccional Lineal (Modelo I) para el problema de ruteo de MP, considerando múltiples embarques, manifestando las ventajas y deficiencias de dicho modelo respecto de la utilización del modelo de Sherali *et al.* (1997) para la obtención de una única ruta. La sección 4 presenta una reformulación lineal de dicho problema (Modelo II), mostrando su validez y equivalencia respecto del Modelo I. Finalmente la sección 5 presenta una discusión de los principales resultados y conclusiones de este trabajo.

## 2 CONSECUENCIAS ESPERADAS EN EL TRANSPORTE DE MP

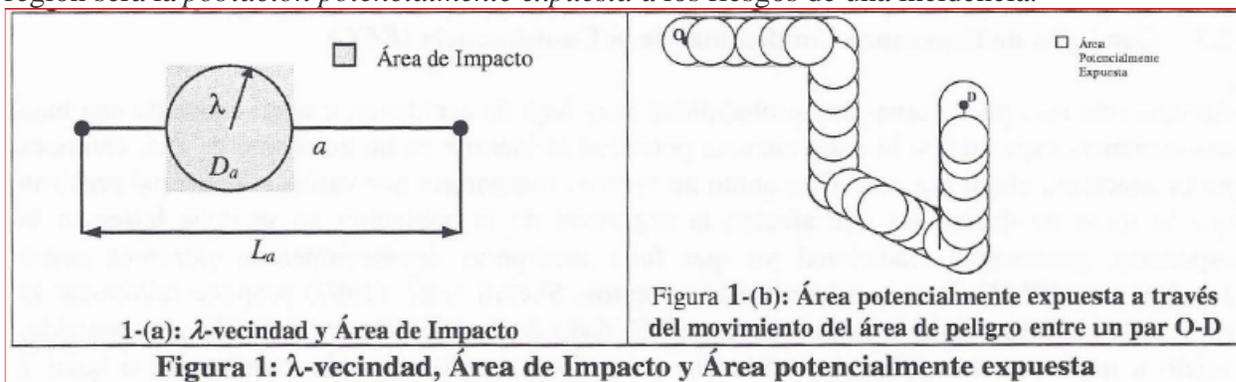
Aunque la mayoría de los enfoques existentes para problemas de transporte de MP se centran en el riesgo, no hay acuerdo sobre cómo modelarlos. Sin embargo, existe consenso en que este

riesgo está relacionado con la probabilidad y consecuencia de un "suceso indeseable". Se considera que un suceso indeseable es aquel evento que resulta en un derrame o liberación del material transportado, a lo que comúnmente se denomina una *incidencia*. Aunque existe la posibilidad de un gran número de consecuencias indeseables (tal como daños ambientales, pérdidas económicas y lesiones), la literatura de evaluación de riesgo se centra en las fatalidades producto de una incidencia. Aunque este enfoque simplifica el proceso de evaluación, su resultado final puede estar lejos de representar el riesgo absoluto de una actividad potencialmente peligrosa. Afortunadamente, para decisiones estratégicas de gestión de MP es necesaria una comparación de alternativas de riesgos relativos más que una cuantificación del riesgo absoluto.

## 2.1 Consecuencias y Probabilidades de Incidencia Sobre Los Arcos

Existen diferentes formas de estimar las consecuencias y probabilidades asociadas a una incidencia: Patel y Horowitz (1994) incorporan el efecto del viento para determinar la difusión de gases por posibles derrames a través de un modelo de dispersión; Saccomanno y Chan (1985) asumen que las probabilidades y consecuencias son afectadas por influencias ambientales aleatorias; Pijawka *et al.* (1985) considera el estado de preparación de la comunidad y la calificación del potencial peligro expuesto; Saccomanno y Shortreed (1993) presentan perfiles de riesgo y profundizan en la segregación entre riesgos sociales e individuales. En el presente estudio las consecuencias asociadas a una incidencia son medidas según el potencial de producir fatalidades, el cual es estimado usando el concepto de  $\lambda$ -vecindad (Batta y Chiu (1988)): " ... en caso de que ocurra un accidente de liberación en el traslado del MP, el material derramado tendrá un radio de dispersión  $\lambda$  que depende, entre otros factores, de las propiedades físicas y químicas de la sustancia en cuestión". Erkut (1995, Erkut y Verter (1998) muestran que ésta es una simplificación adecuada, pensando en una comparación relativa de alternativas más que una cuantificación del riesgo absoluto, y efectiva debido a la limitación de datos.

El área determinada por el radio  $\lambda$  corresponde al *Área de Impacto (AI)* para el MP considerado, y la población que vive dentro de este radio  $\lambda$ , que llamaremos *Población Expuesta (PE)*, es la que podría ser afectada por el derrame del material (ver Figura 1-(a)). Si se inspecciona el AI como un área de peligro, se puede visualizar la actividad del transporte de MP como el movimiento de esta área a lo largo de una ruta desde un origen a un destino (O-D) (ver Figura 1-(b)). El movimiento del área de peligro confecciona una banda sobre ambos lados de la ruta, que es la región de posibles impactos (área potencialmente expuesta), y la población dentro de esta región será la *población potencialmente expuesta* a los riesgos de una incidencia.



Sea  $PE_a$  la población expuesta sobre el arco  $a$ , dado que ocurre una incidencia en dicho arco en el proceso de traslado del MP.  $PE_a$ , se puede representar mediante la siguiente expresión:

$$PE_a = \pi \lambda^2 D_a L_a \quad (1)$$

Donde  $\lambda$ , es el radio del área de impacto para un derrame de MP,  $D_a$  la densidad demográfica asociada al arco  $a$ , y  $L_a$  la longitud del arco  $a$ . La población afectada dentro de la población expuesta sobre el arco  $a$ , dado que ocurre un accidente de derrame en el traslado del MP, representará la consecuencia  $C_a$  asociada sobre el arco  $a$  producto de dicha liberación. Para propósitos de este estudio,  $C_a$  será igual al número esperado de fatalidades, dentro de la población expuesta, producto de dicha incidencia. Es decir,

$$C_a = VE \cdot \mu \cdot PE_a \quad (2)$$

Donde  $VE$  corresponde al valor económico (US\$) de una fatalidad y  $\mu$  es la tasa de mortalidad por habitante expuesto al MP, dado que ocurre una incidencia. Finalmente, se considera la existencia de una probabilidad de incidencia,  $p_a$ , sobre cada uno de los arcos de la red. Ésta representa la probabilidad de que, dado que un camión con MP está utilizando el arco "a", éste sufra un accidente derramando el MP sobre la vía. Un análisis para la estimación de probabilidades sobre arcos puede ser consultado en Bronfman y Garrido (2003) y Erkut y Verter(1995).

## 2.2 Probabilidad y Consecuencia Esperada (Riesgo) Sobre una Ruta

Sea un cierto par origen-destino ( $O-D$ ) y sea  $\phi$  una ruta de  $O$  a  $D$  conformada por una colección de  $n$  arcos, a través de la cual se enviará un embarque con MP. Sea  $p_i$  y  $C_i$  la probabilidad de incidencia y la consecuencia asociada a lo largo del  $i$ -ésimo arco de la ruta. Asumiendo que los valores de las probabilidades de incidencia son de pequeña magnitud (Abkowitz y Cheng, 1988, señalan que esta probabilidad es del orden de  $10^{-6}$  a  $10^{-8}$  por milla viajada), se puede suponer que  $p_i p_j = 0 \forall i, j$  (un buen análisis de las implicancias de este supuesto puede consultarse en Erkut y Verter, 1998). Utilizando esta aproximación, la probabilidad de incidencia,  $P(\phi)$ , y la consecuencia esperada,  $CE_\phi$  sobre la ruta  $\phi$  están dadas por:

$$P(\phi) = \sum_{i=1}^n p_i \quad (3)$$

$$CE_\phi = \sum_{i=1}^n p_i C_i \quad (4)$$

## 2.3 Concepto de Esperanza Condicional de la Consecuencia (ECC)

Aunque una ruta puede tener una probabilidad muy baja de accidente, o tener asociada una baja consecuencia esperada, si la consecuencia potencial al incurrir en un accidente es alta, entonces no es adecuado elegir esa ruta. Este punto de vista es compartido por varios autores que precisan que la toma de decisiones que afectan la seguridad de la población no se debe basar en la esperanza matemática tradicional ya que falta incorporar acontecimientos extremos como aquellos con BPAC. Para considerar estos eventos, Sherali *et al.* (1997) propone minimizar la esperanza condicional de la consecuencia (ECC) dado que un accidente catastrófico ha ocurrido, sujeto a que la probabilidad de incidencia y la consecuencia esperada sean menor o igual a

umbrales especificados. Se define un accidente catastrófico como aquel que tiene una consecuencia mayor o igual a  $C^*$ , un valor predeterminado y conocido como "valor crítico". El objetivo aquí es que una ruta  $\varphi$  puede tener arcos con probabilidades muy bajas de que un accidente ocurra, resultando en una baja consecuencia esperada  $CE_\varphi$  sobre esta ruta. Sin embargo, si las consecuencias reales asociadas a esta ruta son altas, entonces la  $ECC$  sobre esta ruta, dado que un accidente catastrófico ha ocurrido, puede ser relativamente grande.

Sea  $\varphi_c$  el conjunto de arcos críticos en  $\varphi$  para el cual la consecuencia asociada excede  $C^*$ . Se asume que cada ruta tiene por lo menos un arco crítico. Así, la  $ECC$  de una ruta  $\varphi$  dado que ha ocurrido un accidente catastrófico, puede ser definido como  $ECC_\varphi$ :

$$ECC_\varphi = \frac{\sum_{i \in \varphi_c} p_i C_i \left[ \prod_{j < i} (1 - p_j) \right]}{\sum_{k \in \varphi_c} p_k \left[ \prod_{j < k} (1 - p_j) \right]}. \quad \text{Si } p_i p_j \equiv 0 \quad \forall i, j \quad \rightarrow \quad ECC_\varphi = \frac{\sum_{i \in \varphi_c} p_i C_i}{\sum_{i \in \varphi_c} p_i} \quad (5)$$

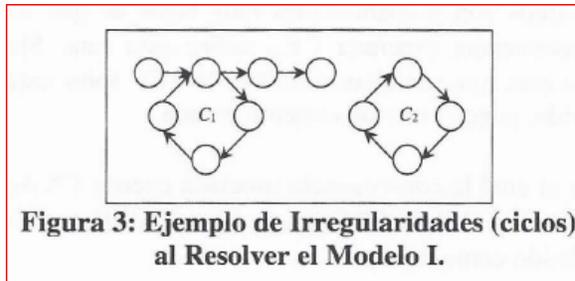
### 3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE RUTEO MÚLTIPLES EMBARQUES

Sea una red de transporte representada por un grafo dirigido  $G(N,A)$ , donde  $N$  es el conjunto de nodos,  $A$  el conjunto de arcos, y  $A_c$  el conjunto de arcos críticos de la red.  $T$  es el flujo de MP a ser transportado entre un cierto par  $O-D$ . Sea  $f_a$  el flujo de MP sobre el arco  $a \in A$ ,  $p_a$  la probabilidad de que ocurra un accidente de derrame del MP transportado sobre el arco  $a \in A$ ,  $C_a$  la consecuencia incurrida por dicho accidente en el arco  $a \in A$ .  $P_0$  y  $CE_0$  representan parámetros de máxima probabilidad de incidencia y consecuencia esperada para el conjunto de flujos sobre la red. Para cada nodo  $l \in N$ ,  $B(l)$  es el conjunto de arcos que salen del nodo  $l$  y  $H(l)$  es el conjunto de arcos entrantes al nodo  $l$ . El problema de ruteo de múltiples embarques de un MP puede ser formulado de la siguiente manera (Modelo I):

$$\begin{aligned} \text{Modelo I} \quad & \text{Min} \quad \sum_{a \in A_c} (p_a C_a) f_a \Big/ \sum_{a \in A_c} p_a f_a & (6) \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{a \in B(l)} f_a - \sum_{a \in H(l)} f_a = \begin{cases} T & \text{si } l \equiv O \\ -T & \text{si } l \equiv D \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} \quad \forall l \in N & (7) \\ & \sum_{a \in A} p_a f_a \leq P_0 & (8) \\ & \sum_{a \in A} (p_a C_a) f_a \leq CE_0 & (9) \\ & f \equiv (f_a : a \in A) \in F & (10) \\ & f_a \text{ entero} \quad \forall a \in A & (11) \end{aligned}$$

El modelo propuesto corresponde a un problema de Programación Fraccional Lineal que puede ser resuelto (ver anexo) a través del algoritmo de Dinkelbach (Dinkelbach W., 1967, Stancu-Minasian, 1997), o mediante la transformación de variables propuesta por Charnes y Cooper (1962). El conjunto de condiciones (7) representan las restricciones de equilibrio de flujos. Las

desigualdades (8) y (9) señalan que para el transporte de MP, la probabilidad total de una incidencia y la consecuencia total esperada deben ser menores o igual a un umbral establecido.



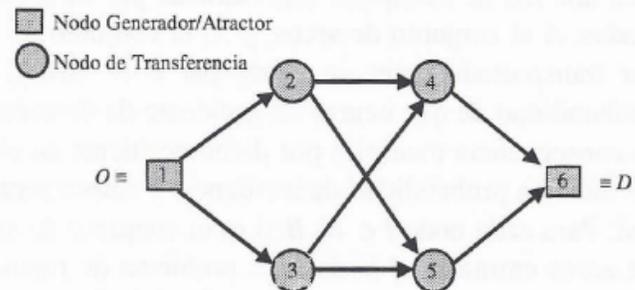
El conjunto (10) constituyen restricciones (lineales) para la eliminación de ciclos del tipo  $C_1$  y  $C_2$  mostrados en la Figura 3, donde por la naturaleza fraccional de la función objetivo (F.O.) estos ciclos ayudan a reducir (6) debajo del valor correspondiente a la ruta sin ciclos de  $\theta$ -D.

Estas restricciones pueden ser escritas de diversas formas, tal como las restricciones de Miller-Tucker-Zemlin o las de Dantzig-Fulkerson-Johnson (ver Nemhauser y Wolsey, 1988 y Desrochers y Laporte, 1991), aunque para todas ellas se destaca la naturaleza combinatorial.

Ejemplo Numérico 1: Para ilustrar el funcionamiento del Modelo I, considerar el envío de  $T = 3$  cargamentos de MP entre el par  $O$ - $D$  sobre la red de la Figura 4. Los atributos en los arcos se presentan en la Tabla 1. Además, sea  $P_0 = 1,37 \cdot 10^{-2}$ ;  $CE_0 = 129$  (valor monetario asociado al número esperado de personas afectadas).

**Tabla 1: Atributos para Arcos de la Red de Ejemplo I.**

Arco (a)	$p_a$	$C_a$ (US\$/Evento)
1-2	1,86E-06	3,00E+05
2-4	1,21E-04	1,16E+04
2-5	2,08E-06	8,00E+06
3-4	8,80E-04	1,21E+04
1-3	9,42E-04	1,24E+04
3-5	9,42E-01	1,24E+02
4-6	2,77E-04	7,61E+04
5-6	6,42E-06	4,82E+04



**Figura 4: Red de Transporte, Ejemplo I**

Al resolver el Modelo I, el flujo de MP considerado se distribuye a través de dos rutas; dos embarques por la ruta y  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$  un embarque por la ruta  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$ . Para esta configuración, se obtienen los siguientes valores para la ECC, CE y  $P(\cdot)$ :

$$ECC_{\left\{ \begin{matrix} 1-3-4-6 \\ 1-2-4-6 \end{matrix} \right\}} = 23.893; \quad CE_{\left\{ \begin{matrix} 1-3-4-6 \\ 1-2-4-6 \end{matrix} \right\}} = 109,9; \quad \text{y} \quad P_{\left\{ \begin{matrix} 1-3-4-6 \\ 1-2-4-6 \end{matrix} \right\}} = 4,60 \cdot 10^{-3}.$$

Si se resuelve la misma instancia pero considerando el envío de un sólo embarque (modelo de Sherali *et al.*, 1997), el modelo selecciona la ruta  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$  con los siguientes valores<sup>1</sup>:

$$ECC_{\{1-2-4-6\}} = 57.623; \quad CE_{\{1-2-4-6\}} = 23,04; \quad \text{y} \quad P_{\{1-2-4-6\}} = 4,0 \cdot 10^{-4}.$$

<sup>1</sup> Para la resolución de este problema, se considera como parámetros de máxima probabilidad y consecuencias esperada el equivalente a un tercio de los parámetros máximos utilizados para el problema de envío de 3 embarques.

Ahora, siguiendo los pasos de Sherali *et al.* (1997), al enviar el resto de los embarques por la ruta selecta, la consecuencia esperada total impuesta a la población y la probabilidad de incidencia total serían 69,12 y  $1,2 \cdot 10^{-3}$  respectivamente (37, 1% y 73,9% menor que la entregada en el Modelo I). Por su parte, el valor de la *ECC* es 58,5% menor para el Modelo I, resultado que es atractivo desde el punto de visto del control de daños. Sin embargo, esta mejora en la *ECC* se alcanza a costa de un riesgo social y probabilidad total mayor. Esto se debe principalmente a que la determinación de los umbrales máximo de probabilidad y consecuencia esperada asociado a tres embarques permiten el envío de uno o dos embarques por arcos o rutas de alta probabilidad y/o consecuencia esperada, respetando los umbrales previamente establecidos. Necesariamente, el resto de los embarques son enviados por arcos o rutas con muy baja probabilidad y consecuencia esperada, de modo de respetar los umbrales.

Lo anterior manifiesta un inconveniente no menor para la determinación de umbrales máximos asociados a la red completa, pese a que este enfoque permite reducir la *ECC* respecto al envío de todos los embarques por una única ruta. Esto evidencia nuevas líneas de investigación basadas en la determinación de umbrales máximos a nivel de rutas, tema actualmente en estudio.

#### 4 FORMULACIÓN LINEAL DE MÍNIMA CONSECUENCIA ESPERADA

Dada la naturaleza multi-objetivo del problema analizado, la formulación planteada en la sección 3 sólo representa una alternativa para abordarlo, la cual se basa en la *ECC* como objetivo principal a minimizar. Sin embargo, ésta es una formulación no-lineal compleja de resolver (como se describe posteriormente), de la cual no se posee información clara respecto a la identificación y eliminación de ciclos (de hecho, muchos autores formulan el problema de ruteo de MP utilizando complejas estructuras para la eliminación de ciclos, las que finalmente son omitidas al implementar sus modelos en casos reales). Para abordar este problema, se plantea una formulación lineal alternativa, que por un lado reduce la complejidad del problema y por otro permite un adecuado análisis de la existencia y eliminación de ciclos. Adicionalmente, y a través de un adecuado manejo de los parámetros del modelo, es posible obtener soluciones equivalentes a las alcanzadas por el Modelo I.

En esta formulación se considera la *CE* como objetivo a minimizar, mientras que la *ECC* es restringida a un valor máximo,  $ECC_0$ , la que luego es escrita como una restricción lineal, tal como se observa en (14).

<b>Modelo II</b>	$Min \quad \sum_{a \in A} C_a \cdot f_a \cdot P_a$	(12)
	$s.a.: \quad \sum_{a \in A} f_a \cdot P_a \leq P_0$	(13)
	$\left( \sum_{a \in A} C_a \cdot f_a \cdot P_a \right) / \left( \sum_{a \in A} f_a \cdot P_a \right) \leq ECC_0 \rightarrow \sum_{a \in A} f_a \cdot P_a \cdot (C_a - ECC_0) \leq 0$	(14)
	$\sum_{a \in F(j) \in A} f_a - \sum_{a \in H(j) \in A} f_a = \begin{cases} T & j = o \\ -T & j = d \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \quad \forall j \in N$	(15)

$$f_a \text{ entero} \quad \forall a \in A \quad (16)$$

La validez de este modelo, a la luz del Modelo I, puede ser analizada en base al problema bi-criterio de "Mínima Probabilidad y Mínima CE": dada una solución óptima para dicho problema<sup>2</sup> se puede analizar si la *ECC* asociada presenta un valor "aceptable" (caso en que la solución original seguirá siendo óptima), y luego, en caso de una respuesta negativa, se puede establecer una restricción de *ECC* máxima para dicho problema, ecuación (14). Finalmente si se resuelve el problema bi-criterio mediante la minimización de la *CE* y una restricción de probabilidad máxima, la incorporación de una *ECC* máxima conduce entonces a la formulación (12)- (16).

#### 4.1 Definición del Parámetro $ECC_0$

Nos concentraremos en la determinación de los umbrales máximos del modelo (12)-(16). En este caso, se requiere de un parámetro de probabilidad máxima y uno de *ECC* máxima. Para el parámetro de probabilidad se considerará el mismo criterio utilizado para Modelo I, puesto que ya se basa en un adecuado equilibrio entre Probabilidad, *CE* y *ECC*. Para el parámetro  $ECC_0$ , retomaremos la definición de la *ECC*, la cual puede ser interpretada como el promedio ponderado, basada en flujos y probabilidades de las consecuencias o riesgos de los arcos utilizados, como se observa en la ecuación (17).

$$ECC = \left( \sum_{a \in A} C_a \cdot f_a \cdot p_a \right) / \left( \sum_{a \in A} f_a \cdot p_a \right) = \sum_{a \in A} C_a \cdot \alpha_a \quad \text{con} \quad \alpha_a = f_a \cdot p_a / \left( \sum_{a \in A} f_a \cdot p_a \right) \quad (17)$$

De este modo  $ECC_0$  debe tener las mismas unidades y magnitudes que las consecuencias de los arcos. Ahora bien, la ruta de mínima probabilidad de incidencia (RMP) claramente es una solución que presenta una excesiva o elevada *ECC*, por lo cual este valor puede ser utilizado como cota máxima inicial. De esta forma, es posible sensibilizar el parámetro  $ECC_0$  considerando los valores de consecuencias existentes en los arcos de la red y umbral máximo dado por la RMP. Sin embargo, para la aplicación expuesta en este artículo, y dado que se conoce la solución óptima del Modelo I para la instancia analizada, se consideró el valor óptimo de la *ECC* como parámetro inicial de la sensibilización.

**Ejemplo Numérico II:** Considérese la misma instancia descrita en el ejemplo numérico I para el envío de  $T = 3$  cargamentos de MP entre el par *O-D* (Figura 4 y Tabla 1). Inicialmente, se considera como umbral  $ECC_0 = 23.990$  (US\$ por evento). Al resolver esta instancia a través del Modelo II, el flujo de MP se distribuye en dos embarques por la ruta  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$  y un embarque por la ruta  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$ , obteniendo la misma solución alcanzada por el Modelo I. De este modo, se muestra que es posible, a partir de la determinación apropiada de este parámetro, obtener soluciones equivalentes a las entregadas por el Modelo I.

Al ir variando 10% el valor inicial de  $ECC_0$  (Tabla 2), se obtienen soluciones que manifiestan el trade-off existente entre la *ECC*, la *CE* y la probabilidad de incidencia obtenida. Notar que al aumentar el umbral máximo  $ECC_0$ , resulta en soluciones con menor consecuencia esperada (*CE*) y adicionalmente una menor probabilidad total de incidencia, a costa de un aumento en la *ECC*.

<sup>2</sup> Por ejemplo, la solución óptima al problema bi-criterio puede ser obtenida en base preferencias asociadas a la desviación de dichos objetivos con relación a sus respectivos óptimos o ideales individuales.

**Tabla 2: Variación de la CE y P(·) en función del umbral máximo ECC<sub>0</sub>**

Variación ECC <sub>0</sub>	ECC <sub>0</sub>	ECC	CE	P(·)	Rutas (Flujo)
-10%	21.591	20.681	130,2	6,30·10 <sup>-3</sup>	1-3-4-6 (3)
0%	23.990	23.893	109,9	4,60·10 <sup>-3</sup>	1-3-4-6 (2); 1-2-4-6 (1)
+10%	26.389	24.790	104,3	4,21·10 <sup>-3</sup>	1-3-4-6 (2); 1-2-5-6 (1)
+20%	28.788	24.790	104,3	4,21·10 <sup>-3</sup>	1-3-4-6 (2); 1-2-5-6 (1)
+30%	31.187	30.873	89,5	2,90·10 <sup>-3</sup>	1-3-4-6 (1); 1-2-4-6 (2)
+40%	33.586	33.459	84,0	2,51·10 <sup>-3</sup>	1-3-4-6 (1); 1-2-4-6 (1); 1-2-5-6 (1)
+50%	35.985	33.459	84,0	2,51·10 <sup>-3</sup>	1-3-4-6 (1); 1-2-4-6 (1); 1-2-5-6 (1)
+60%	38.384	36.997	78,4	2,12·10 <sup>-3</sup>	1-3-4-6 (1); 1-2-5-6 (2)

#### 4.2 Análisis de Existencia y Eliminación de Ciclos

En esta sección nos concentramos en la búsqueda de rutas para un sólo embarque, permitiendo establecer restricciones de eliminación de ciclos para el Modelo II basados en el "uso de arcos" más que para los flujos sobre ellos. Sea el problema selección de rutas entre un par O-D, de modo de minimizar la probabilidad de ocurrencia del primer accidente, problema (18). Sea X1 una solución óptima a dicho problema, es decir, X1 representa una RMP. Como se verá, los resultados obtenidos no dependen de la función objetivo, F.O. (salvo de su linealidad), por lo que puede ser extendida al problema de mínima consecuencia esperada o al problema bi-criterio respectivo.

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{a \in A} X_a \cdot p_a & (a) \\
 & \text{s.a:} \quad \sum_{a \in B(j)} X_a - \sum_{a \in H(j)} X_a = \begin{cases} 1 & j=O \\ -1 & j=D \\ 0 & e.o.c. \end{cases} \quad \forall j \in N & (b) \\
 & X_a \in (0,1) & (c)
 \end{aligned} \tag{18}$$

Supongamos que queremos restringir las soluciones del problema (18) a una máxima ECC dado que ocurre un accidente, según la restricción (19), donde ECC<sub>0</sub> es el valor máximo aceptable.

$$\left( \frac{\sum_{a \in A} C_a \cdot X_a \cdot p_a}{\sum_{a \in A} X_a \cdot p_a} \right) \leq ECC_0 \quad \rightarrow \quad \sum_{a \in A} X_a \cdot p_a \cdot (C_a - ECC_0) \leq 0 \tag{19}$$

Si X1 satisface la restricción (19) entonces seguirá siendo óptima. Por el contrario, si X1 no la satisface, entonces desearemos encontrar una solución alternativa a través del problema (20).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{a \in A} X_a \cdot p_a & (20) \\
 & \text{s.a:} \quad (20b), (20c), (21)
 \end{aligned}$$

Sea X2 una solución óptima de (20), considerando soluciones que no presentan ciclos, es decir:

$$\begin{aligned}
 X2 = & \text{ArgMin} \quad \sum_{a \in A} X_a \cdot p_a \\
 & \text{s.a:} \quad (20b), (20c), (21) \\
 & X \in X
 \end{aligned} \tag{21}$$

donde X E X asegura que las ruta X no presente ciclos. Sea un ciclo e tal que:

$$F.O.(X1) + F.O.(C) \leq F.O.(X2) \quad \rightarrow \quad F.O.(C) \leq F.O.(X2) - F.O.(X1) \tag{22}$$

$$\sum_{a \in C} p_a \cdot (C_a - C_0) < 0 \tag{23}$$

$$\sum_{a \in A} X_a \cdot p_a \cdot (C_a - ECC_0) + \sum_{a \in C} p_a \cdot (C_a - ECC_0) \leq 0 \tag{24}$$

Así, el agregar el ciclo  $C$  a la solución  $XI$  transforma a ésta en una solución factible en términos de la restricción (19), presentando además un valor de la F.O. menor al óptimo sin ciclos, F.O.(X2). Obviamente, igual que en el Modelo I, soluciones con presencia de ciclos son consideradas inaceptables, manifestándose nuevamente la necesidad de incorporar restricciones de eliminación de ciclos en la formulación. Sin embargo, es interesante notar que la ecuación (23) nos está entregando además un criterio para la identificación de ciclos, de tal modo que:

- No es necesario incorporar restricciones de eliminación para cada uno de los potenciales ciclos existentes en la red, sino que sólo para aquellos que cumplan con la condición (23).
- En caso de utilizar un esquema de planos cortantes, u otros similares, donde en cada iteración se incorpore restricciones de corte para los ciclos que se generan, este procedimiento debiera detenerse con un número de restricciones anti-ciclos inferior a la cantidad total de ciclos potenciales, con lo cual se presenta como una interesante alternativa de implementación.
- Si nos concentramos exclusivamente en arcos con consecuencias catastróficas para la  $ECC$  ( $A_c$ ), como se analiza en este artículo, la restricción (23) debe establecerse sólo para dichos arcos, reduciendo aún más la cantidad de ciclos relevantes para la incorporación de restricciones de eliminación de ciclos.

De esta forma, se ha incorporado un número reducido de restricciones eliminación de ciclos con resultados bastante satisfactorios. En particular, se establecieron restricciones para arcos bidireccionales, según:

$$X_{a_1} + X_{a_2} \leq 1 \quad \forall a_1, a_2 \in A / i(a_1) = t(a_2), i(a_2) = t(a_1) \quad ; \quad X_a = \begin{cases} 0 & f_a = 0 \\ 1 & f_a > 0 \end{cases} \quad (25)$$

donde  $i(a)$  define el inicio del arco  $a$  y  $t(a)$  define el término del arco. Adicionalmente, se observó que incorporar restricciones de "capacidad", como la ecuación (26), elimina gran parte de los ciclos generados.

$$f_a \leq T \quad \forall a \in A \quad (26)$$

De este modo, pese a la naturaleza combinatoria! de las restricciones de eliminación de ciclos, se estableció un conjunto reducido de estas, ecuaciones (25) y (26), logrando el objetivo buscado.

## 5 DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este artículo se analiza el ruteo de materiales peligrosos (MP) considerando el envío de múltiples embarques entre un par Origen-Destino, y bajo la existencia de eventos de baja probabilidad y alta consecuencia (BPAC). En este análisis se considera una estructura de red, permitiendo una adecuada representatividad de la situación analizada.

En primer lugar se muestra que una modelación explícita de múltiples embarques presenta ventajas en cuanto al control de la esperanza condicional de la consecuencia ( $ECC$ ), dado que ocurre un accidente catastrófico en las rutas seleccionadas. Lo anterior, en comparación con la utilización de un enfoque que encuentre una única ruta. Se utiliza un modelo de Programación Fraccional Lineal Entera que minimiza la  $ECC$ , sujeto a umbrales máximos para la probabilidad y consecuencia esperada, como extensión al modelo de un embarque presentado en Sherali *et al.* (1997). Posteriormente se presenta una reformulación lineal del problema estudiado, permitiendo la obtención de soluciones análogas a las entregadas por el modelo anterior, pero con un esfuerzo

computacional significativamente menor. Adicionalmente esta formulación permite un interesante y útil análisis de la existencia de ciclos, simplificando el proceso de incorporación de restricciones de eliminación de ciclos. Se destaca que en aplicaciones adicionales sobre la red estratégica urbana de Santiago de Chile, la incorporación de restricciones de eliminación de ciclos relativamente simples y representando un conjunto significativamente más pequeño que la totalidad de potenciales ciclos existentes en la red, permitió la completa eliminación de ellos.

En las experiencias realizadas, se observa la selección de diversas rutas, dentro de las cuales algunas presentaron una elevada probabilidad y consecuencia esperada (respetando umbrales globales de probabilidad y consecuencia máxima aceptable), de modo de reducir la *ECC* respecto a la búsqueda de una única ruta de mínima *ECC* (con umbrales de probabilidad y consecuencia esperada máxima asociados a un sólo embarque). En este sentido, se manifiesta la complejidad de la determinación de estos umbrales globales para el sistema, planteándose la necesidad de enfoques alternativos para la determinación de dichos parámetros. Se destaca, a modo de investigación futura, la posibilidad de utilización de métodos secuenciales que permitan encontrar rutas basadas en la selección previa de rutas para los primeros embarques, la utilización de métodos basados en la búsqueda de *K* rutas mínimas (ver Akgün *et al.*, 2000), y finalmente la utilización de un modelo simultáneo que considere umbrales máximos a nivel de rutas (por ejemplo, a partir de la búsqueda de *T* rutas simultáneas, con un umbral común para cada una de ellas).

De esta forma, se presenta una herramienta útil y adecuada que permite controlar los riesgos a los cuales esta expuesta la población producto del permanente envío de MP en redes urbanas densamente pobladas. Si bien en este artículo se presenta sólo una pequeña aplicación a partir de la cual se discuten los principales resultados (especialmente para efectos pedagógicos), se destaca que los resultados presentados en este artículo fueron análogos a los obtenidos en aplicaciones sobre una red de gran tamaño (5790 arcos y 2030 nodos) que representa la red de transporte de la ciudad de Santiago de Chile.

## 6 ANEXO

El problema dado por (6) corresponde a un problema de programación fraccional lineal cuya estructura básica está dada por la siguiente expresión (con  $g(x) > 0 \forall x \in X$ ):

$$\sup_{x \in X} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (P)$$

En nuestro caso, la ecuación (6) es una función semi-estrictamente cuasi-cóncava sobre *X*, y esta propiedad (considerando *g(x)* y *f(x)* funciones continuas) asegura que un máximo local de (P) es un máximo global, ver Stancu-Minasian (1997) y Avriel (1988). Una de las estrategias más populares para este tipo de problemas es el enfoque paramétrico, que considera la clase de problemas de optimización asociados con (P) dado por:

$$\sup_{x \in X} \{f(x) - \lambda g(x)\} \quad (P_\lambda)$$

Con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se considera la función  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:  $F(\lambda) := \text{Max}_{\chi \in X} \{f(\chi) - \lambda g(\chi)\}$

Ahora, resolver ( $P$ ) es equivalente a encontrar la raíz única de la ecuación uni-variable  $F(\lambda) = 0$ . Utilizando este enfoque, Dinkelbach W. (1967) desarrolló el siguiente algoritmo para problemas de programación fraccional lineales y no lineales generando, el cual se detalla a continuación:

**Paso 0.** Tomar  $x_0 \in X$ , calcular  $\lambda_1 := \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$  y sea  $k := 1$ ;

**Paso 1.** Determinar  $x_k := \arg \text{Max}_{x \in X} \{f(x) - \lambda_k g(x)\}$ ;

**Paso 2.** If  $F(\lambda_k) = 0$   
     **Then**  $x_k$  es la solución óptima para ( $P$ ) con valor  $\lambda_k$  y PARAR.  
     **Else**, ir a Paso 3;

**Paso 3.** Sea  $\lambda_{k+1} := \frac{f(x_k)}{g(x_k)}$ , sea  $k := k + 1$ , e ir al Paso 1.

Es fácil mostrar que la sucesión  $\lambda_k, k \geq 1$  generada por el algoritmo de Dinkelbach es creciente y satisface  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda_*$  con  $\lambda_* = v(P)$ , ver Dinkelbach W. (1967) y Schaible S. (1976). En general, el enfoque paramétrico también se usa para el problema de programación fraccional entero. Esto se debe principalmente a que los resultados derivados para el enfoque paramétrico todavía son válidos cuando  $X$  es un conjunto discreto, tal como se muestra en Grunspan y Thomas (1973).

## REFERENCIAS

- Abkowitz, M. y P. Cheng. (1988). Developing a Risk-Cost Framework for Routing Truck Movements of Hazardous Materials. **Accid. Anal. Prevent.** **20**, 39-51.
- Akgün, V., E. Erkut y R. Batta. (2000). On Finding Dissimilar Paths. **European Journal of Operational Research** **121**, 232-246.
- Avriel, M., W.E. Diewert, S. Schaible and I. Zang (1988) Generalized Concavity. Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering, Plenum Press, New York.
- Batta, R. y S. Chiu. (1988). Optimal Obnoxious Paths on Network: Transportation of Hazardous Materials. **Operation Research** **36**, 84-92.
- Bronfman, C. A. y R.A. Garrido. (2003) **Probabilidades y Consecuencias Asociadas a Eventos Catastróficos en el Transporte de Materiales Peligrosos**. Departamento de Ingeniería de Transporte, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago de Chile.
- Charnes, A. y W. W. Cooper. (1962). Programming With Linear Fractionals. **Naval Research Logistics Quarterly** **9**, 181 -186.
- Desrochers, A. y G. Laporte. (1991). Improvements and Extensions to the Miller-Tucker-Zemlin Subtour Elimination Constraints. **Operation Research Letter** **10**, 27-36.
- Dinkelbach W. (1967). On Nonlinear Fractional Programming. **Management Science** **13**, 492-498.

- Erkut, E. (1995). On the Credibility of the Conditional Risk Model for Routing Hazardous Materials. **Operations Research Letters** **18**, 49-52.
- Erkut, E. y V. Verter. (1995) In **Facility Location: A Survey of Applications and Methods** (Ed, Drezner, Z.) Springer-Verlag, New York.
- Erkut, E. y V. Verter. (1998). Modeling of Transport Risk for Hazardous Materials. **Operation Research** **46**, 625-642.
- Grunspan, M. y M. E. Thomas. (1973). Hyperbolic Integer Programming. **Naval Research Logistics Quarterly** **20**, 341-356.
- Jin, H. y R. Batta. (1997). Objectives Derived From Viewing Hazmat Shipments as a Sequence of Independent Bemoulli Trials. **Transportation Science** **31**, 252-261.
- Jin, H., R. Batta y M.H. Karwan. (1996). On the Analysis of Two New Models for Transporting Hazardous Matenrials. **Operation Research**. **44**, 710-723.
- Nernhauser, G. L. y L. A. Wolsey. (1988) **Integer and Combinatorial Optimization**. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Patel, M. H. y A. J. Horowitz. (1994). Optimal Routing of Hazardous Materials Considering Risk of Spill. **Transportation Research PartA** **28A**, 119-132.
- Pijawka, K. D., S. Foote. y A. Soesilo. (1985). Risk Assessment of Transporting Hazardous Material:Route Analysis and Hazard Management.**Transportations Research Record** **1020**, 1 - 6.
- Saccomanno, F. F. y A. Chan. (1985). Econornic Evaluation of Routing Strategies for Hazardous Road Shipments. **Transportation Research Record** **1020**, 12-18.
- Saccomanno, F. F. y J.H. Shortreed. (1993). Hazardous Material Transport Risk: Societal and Individual Perspectives. **Journal of Transportation Engineering** **119**, 177-188.
- Schaible S. (1976). Fractional prograrnrning II, on Dinkelbach's algorithm. **Management Science** **22**, 868-873.
- Sherali, H. D., L. D. Brizendine, T.S. Glickrnan y S. Subrarnanian. (1997). Low Probablity- High Consequence Considerations in Routing Hazardous Material Shipments. **Transportation Science** **31**, 237-251.
- Sivakumar, R. A., R. Batta y M.H. Karwan. (1993). A Network-Based Model for Transporting Extremely Hazardous Materials. **Operation Research Lett.** **13**, 85-93.
- Sivakumar, R. A., R. Batta y M. H. Karwan. (1995). A Multiple Route Conditional Risk Model for Transporting Hazardous Matenrials. **Information Systems and Operational Research** **33**, 20-33.
- Stancu-Minasian, I. M. (1997) **Fractional Programming: Theory, Methods and Applications**. Kluwer Academic Publishers.