
**UN MODELO DE INVENTARIO Y LOCALIZACIÓN DE INSTALACIONES CON
RESTRICCIONES ESTOCÁSTICAS DE CAPACIDAD DE INVENTARIO
RESUELTO MEDIANTE RELAJACIÓN LAGRANGENA**

Pablo Miranda G.

Departamento de Ciencias de la Ingeniería
Universidad Andrés Bello, Santiago, Chile
Código: 837 – 0149 Santiago, Chile.
Tel: (56 2) 661 8256; Fax (56 2) 661 8623
pamiranda@unab.cl

Rodrigo Garrido H.

Departamento de Ingeniería de Transporte,
Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile
Casilla 306, Santiago 22, cod. 105, Chile.
Tel: (56 2) 686 4270 ; Fax (56 2) 688 4818
rgarrido@ing.puc.cl

RESUMEN

El Diseño de Redes de Distribución de Carga es uno de problemas estratégicos más importantes dentro de la Gestión Logística y la Gestión de la Cadena de Abastecimientos. En este artículo se analiza un Modelo de Inventario y Localización de Instalaciones, el cual permite incorporar decisiones, costos y restricciones asociados a la estrategia de control de inventario, dentro de tradicionales Modelos de Localización de Instalaciones. Estos últimos son típicamente utilizados para resolver el Diseño de Redes de Distribución. Se presenta un enfoque de resolución heurístico para el Modelo de Inventario y Localización de Instalaciones estudiado, basado en Relajación Lagrangena y el Método del Subgradiente. Adicionalmente, se incorporan desigualdades válidas, restricciones que son redundantes para la formulación original del problema, pero que no lo son al considerar el proceso de relajación (asegurando una buena cota inferior al valor óptimo del problema). Estas restricciones fueron obtenidas por medio de un análisis del espacio factible para la media y varianza de la demanda servida por cada centro de distribución potencial, considerando el conjunto de posibles combinaciones de clientes que deben ser atendidos. El algoritmo incorpora una heurística lagrangeana que encuentra, en un subconjunto de las iteraciones, soluciones factibles razonablemente buenas. Se observó un promedio de 2,9% para una cota superior al error cometido por dichas soluciones heurísticas.

Palabras Clave: Modelos de Inventario y Localización de Instalaciones; Diseño de Redes de Distribución de Carga; Relajación Lagrangeana; Desigualdades Válidas.

1 INTRODUCCIÓN Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

El problema de Diseño de Redes de Distribución (DRD), uno de los principales problemas de la gestión de la cadena de abastecimientos, consiste en decidir los sitios donde instalar Centros de Distribución (CD's) y/o plantas, y la asignación de clientes a CD's y/o de CD's a proveedores o plantas. En este artículo se analiza un sistema con una única planta que debe abastecer a un conjunto de CD's, los cuales deben servir a un conjunto de clientes existentes. Se debe decidir cuantos CD's instalar (y donde, considerando un conjunto de sitios disponibles para ello), y asignar los clientes existentes a los CD's instalados. Lo anterior, minimizando los costos totales del sistema, considerando costos de instalación, operación, transporte, ordenamiento e inventario. Finalmente, en cada CD instalado se debe respetar una restricción de capacidad de inventario máximo y una restricción de lote de abastecimiento máximo.

En la literatura tradicional se utilizan de Modelos de Localización de Instalaciones (MLI) para la resolución del DRD, donde las decisiones de instalación y asignación son modeladas mediante variables binarias, 0-1 (Drezner, 2002, Bramel and Simchi-Levi, 2000, Daskin, 1995 y Garrido, 2001). Estos modelos consideran estructuras de costos lineales y/o fijos, incluyendo normalmente costos de instalación y transporte. Así, se observa lo altamente simplificado de estos modelos, al no considerar estructuras de costo más sofisticadas, ni decisiones y costos de un nivel táctico u operacional, como lo son el control de inventario, diseño de flota, diseño de bodegas, etc. Esta simplificación puede generar soluciones poco eficientes dada la falta de una optimización global.

Sin embargo, algunos autores han incorporado decisiones de control de inventario en diferentes MLI. En Jayaraman (1998) se incorpora costos de inventario y ordenamiento en un MLI basados en el conocido modelo EOQ, asumiendo lotes de ordenamiento dados y demandas determinísticas. En Nozick y Turnquist (1998) y (2001) se incorpora un análisis de costos de inventario, asumiendo demandas con distribución Poisson y una estrategia de inventario conocida como Base Stock Policy (ordenamiento uno a uno). En Nozick y Turnquist (1998) se aproxima una función lineal de costos de inventario como función del número de CD's, y se incorpora a la función objetivo de un MLI. En Nozick y Turnquist (2001) se optimizan costos de inventario y demanda insatisfecha, incorporados iterativamente en los costos fijos de instalación de CD's.

En Miranda (2004), Daskin et al. (2002) y Shen et al. (2003), se presentan versiones similares de un modelo de inventario y localización de instalaciones, en los cuales las decisiones de ordenamiento e inventario son basadas en el conocido modelo EOQ. Un factor común es la consideración de una estrategia de control de inventario tipo (Q,R) , considerando el lote de ordenamiento Q como variable de decisión, además del supuesto de normalidad para las demandas de los clientes. R representa el punto de reorden o nivel de inventario crítico que gatilla la solicitud de órdenes a la planta. Se destacan las diferencias en los métodos de resolución utilizados: en Daskin et al. (2002) y Miranda y Garrido (2004a) se utiliza relajación lagrangeana, mientras que en Shen et al. (2003) se reformula el problema como un Set Covering Problem, el cual es resuelto mediante un método de generación de columnas y Branch&Bound.

Finalmente en Miranda y Garrido (2004b) y (2005), donde se desarrolla el modelo analizado en este artículo, se incorporan restricciones de capacidad relacionadas con el inventario almacenado y los lotes de abastecimiento para cada CD. Estas restricciones representan un tratamiento más realista a las tradicionales restricciones consideradas por los MLI, las cuales limitan la demanda

servida por cada CD. En este caso, existe poca claridad en el significado del respectivo parámetro de capacidad: si se asume que éste representa una capacidad asociada al tamaño de flota, ésta siempre puede ser aumentada en función de la demanda, no requiriéndose una restricción de capacidad; si se asume que representa una capacidad de inventario, esta restricción estará relacionada con la política de inventario y no a la demanda media servida (siempre será posible utilizar un sistema cross-docking o JIT, donde no existe inventario dado cualquier nivel de demanda); finalmente si este parámetro está asociado a la recepción desde las plantas, éste debe estar relacionado con el tamaño de lotes de abastecimiento y no con la demanda media servida.

El problema analizado en este artículo presenta una elevada complejidad al incorporar a un MLI restricciones y términos no lineales en la función objetivo, dificultando la aplicación de los métodos tradicionales existentes en la literatura. En este caso se generaliza el tradicional método de relajación lagrangiana, sumado a una heurísticas tipo greedy y de mejoramientos locales tipo K-Opt. Ver Garrido (2001), Wolsey (1998), Nemhauser and Wolsey (1988) y Koskosidis and Powell (1992), para revisión de heurísticas K-Opt y de búsqueda local para diferentes modelos de programación entera. Finalmente se incorpora desigualdades válidas de modo de asegurar cotas duales satisfactorias, entregadas por el proceso de relajación, desigualdades que son obtenidas mediante un análisis de la media y la varianza de las demandas asignadas a cada CD.

La sección 2 presenta la formulación del modelo analizado (Modelo de Inventario y Localización de Instalaciones, con Restricciones de Capacidad de Inventario y Ordenamiento, MILI-RCIO). La sección 3 describe el método de relajación utilizado. La sección 4 presenta una Heurística Lagrangeana utilizada para la obtención de soluciones factibles del modelo MILI-RCIO. En la sección 5 se presentan los principales resultados de una aplicación numérica. Finalmente en la sección 6 se entregan las principales conclusiones del artículo.

2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

El modelo estudiado en este artículo, MILI-RCIO, consistente en una extensión del modelo desarrollado en Miranda y Garrido (2004a) y en Miranda (2004), el cual incorpora nuevas restricciones de capacidad (inventario y ordenamiento), es presentado y desarrollado previamente en Miranda y Garrido (2004b) y Miranda y Garrido (2005). En el presente artículo se presenta sólo una breve descripción. Los parámetros y variables considerados son los siguientes:

- M : Cantidad total de clientes a ser servidos por los CD's a instalar.
- N : Cantidad total de sitios potenciales para la instalación de CD's.
- X_i : Variable de decisión que toma el valor 1 si en el sitio i se instala un CD, y 0 *e.o.c.*
- Y_{ij} : Variable de decisión que toma el valor 1 si el cliente j es servido por el CD i , y 0 *e.o.c.*
- D_i : Demanda media por unidad de tiempo (diaria) asignada al CD i (variable dependiente)
- V_i : Varianza de demanda (diaria) asignada al CD i (variable dependiente).
- d_j : Demanda media por unidad de tiempo (diaria) del cliente j (parámetro).
- v_j : Varianza de la demanda por unidad de tiempo (diaria) del cliente j (parámetro).
- Q_i : Variable de decisión correspondiente al Lote de ordenamiento de cada CD i .
- Q_{Max} : Capacidad existente para el lote de ordenamiento (parámetro).
- I_{cap} : Capacidad de inventario a considerar en los CD's a instalar (parámetro).
- CF_i : Gastos fijos de instalación y operación por unidad de tiempo incurridos por el CD i .

- CT_{ij} : Costo total de transporte por unidad de tiempo entre el CD i y el cliente j .
 CUO_i : Costo por unidad transportada entre la planta y el CD i .
 CO_i : Costo fijo de ordenamiento para el CD i .
 CI_i : Costo de inventario por unidad de producto y por unidad de tiempo en el CD i .
 $1-\alpha$: Nivel de servicio asociado al stock de seguridad de cada CD (parámetro).
 $1-\beta$: Nivel de servicio asociado a la capacidad de inventario en cada CD (parámetro).
 Z_θ : Valor de la distribución Normal(0,1) que acumula una probabilidad θ ($1-\alpha$ ó $1-\beta$).
 TE_i : Tiempo de entrega determinístico para las órdenes del CD i (parámetro)..

No se considera costos asociados a la violación de restricciones, tanto para capacidad de inventario como para la satisfacción de demanda con inventario disponible. En contraste, se considera condiciones de nivel de servicio que aseguran respetar dichas restricciones con cierta probabilidad ($1-\alpha$ y/o $1-\beta$), manteniendo indirectamente controlados los costos por la violación de dichas restricciones (Miranda, 2004; Miranda y Garrido, 2004a; 2004b; 2005).

Así, el modelo es formulado como:

$$\text{Min}_{X,Y,Q} \sum_{i=1}^N CF_i \cdot X_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (CUO_i \cdot d_j + CT_{ij}) Y_{ij} + \sum_{i=1}^N (CO_i \cdot D_i / Q_i + CI_i \cdot Q_i / 2) + \sum_{i=1}^N CI_i \cdot Z_{1-\alpha} \sqrt{TE_i} \sqrt{V_i} \quad (1)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{i=1}^N Y_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, M \quad (2)$$

$$Y_{ij} \leq X_i \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M \quad (3)$$

$$D_i = \sum_{j=1}^M Y_{ij} \cdot d_j \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (4)$$

$$V_i = \sum_{j=1}^M Y_{ij} \cdot v_j \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (5)$$

$$0 \leq Q_i \leq Q_{Max} \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (6)$$

$$Q_i + (Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \sqrt{TE_i} \cdot \sqrt{V_i} \leq ICap \cdot X_i \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (7)$$

$$X_i, Y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, M \quad (8)$$

La ecuación (1) representa los costos totales (diarios), cuyo primer término representa costos de instalación y operación de CD's, mientras que el segundo representa los costos de ordenamiento (unitarios) de planta a CD's, más los costos de transporte entre CD's y clientes¹. El tercer término representa los costos de ordenamiento (fijos) e inventario asociado a los lotes de ordenamiento de CD's. El cuarto término es el costo de mantener inventarios de seguridad en los CD's. La ecuación (2) asegura a cada cliente ser servido por un único CD. La ecuación (3) impide asignar clientes a CD's no instalados. Las restricciones (4) y (5) ligan la media y varianza de la demanda de CD's, con la media y varianza de la demanda de los clientes asignados. La ecuación (6) es la restricción de capacidad de lotes de ordenamiento. La ecuación (7) es la restricción de capacidad de inventario. Esta ecuación se obtiene de una restricción de probabilidad máxima (β) de que en cada instante de inventario máximo se supere la capacidad de almacenamiento, $ICap$. Luego asumiendo normalidad para la demanda durante el tiempo de entrega se obtiene dicha restricción de capacidad. Ver Miranda y Garrido (2004b) y Miranda y Garrido (2005), para la deducción de

¹ Se asume que cada cliente representa una preagrupación de clientes, de modo que los costos de transporte modelados representan un costo de acercamiento a cada grupo, no considerando costos ni decisiones de ruteo al interior de cada uno de ellos. Este costo de ruteo es una constante que no afecta el modelo planteado.

esta restricción. Finalmente (8) establece la integralidad de las variables del modelo (0-1).

3 ENFOQUE DE RESOLUCIÓN

Para resolver el problema MILI-RCIO, se utiliza relajación lagrangeana, relajando las restricciones que ligan la media y varianza de la demanda de cada CD con la media y varianza de los clientes asignados, restricciones (4) y (5). Además, similar a Daskin et al. (2002) y Bramel y Simchi-Levi (2000), se relajan las restricciones (2) que aseguran que los clientes sean servidos por un CD. Sean ψ , λ y ω las variables duales asociadas a las restricciones (2), (4) y (5), respectivamente. Agregando de manera penalizada dichas restricciones a la función objetivo, usando las variables duales como ponderadores y reordenando, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^N CF_i \cdot X_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (CUO_i \cdot d_j + CT_{ij} + \lambda_i \cdot d_j + \omega_i \cdot v_j - \psi_j) \cdot Y_{ij} + \sum_{i=1}^N (CO_i \cdot D_i / Q_i + CI_i \cdot Q_i / 2) + \sum_{i=1}^N CI_i \cdot Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{TE_i} \cdot \sqrt{V_i} - \sum_{i=1}^N (\lambda_i \cdot D_i + \omega_i \cdot V_i) + \sum_{j=1}^M \psi_j \quad (9)$$

El anterior esquema de relajación entrega un sub-problema para cada CD correspondiente a una evaluación de cada sitio como potencial CD, identificando los clientes asignados a cada CD de manera independiente de los otros CD's. Este sub-problema corresponde a:

$$[SP_i] \quad \underset{X_i, Y_{ij}, Q_i, D_i, V_i}{Min} \quad CF_i \cdot X_i + \sum_{j=1}^M (CUO_i \cdot d_j + CT_{ij} + \lambda_i \cdot d_j + \omega_i \cdot v_j - \psi_j) \cdot Y_{ij} + CO_i \cdot (D_i / Q_i) + CI_i \cdot (Q_i / 2) + CI_i \cdot Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{TE_i} \cdot \sqrt{V_i} - (\lambda_i \cdot D_i + \omega_i \cdot V_i) \quad (10)$$

s. a: (3), (6), (7) y (8)

Al problema (10) se le incorpora la restricción (11), que representa un conjunto de desigualdades válidas para D_i y V_i , redundante para el problema MILI-RCIO, pero no para (10). Estas restricciones definen un espacio Ω que contiene todas las combinaciones factibles de D y V , para cualquier asignación de clientes. Este espacio es analizado y caracterizado en la sección 3.1.

$$(D_i, V_i) \in \Omega \quad (11)$$

Finalmente, el subproblema (10), puede ser resuelto según:

- Calcular $\Delta_i = CF_i + \Pi_i + \sum_{j=1}^M \text{Min}\{0, CUO_i \cdot d_j + CT_{ij} + \lambda_i \cdot d_j + \omega_i \cdot v_j - \psi_j\}$ (ver sección 3.2), donde:

$$\Pi_i = \underset{D_i, V_i, Q_i}{Min} \quad CO_i \cdot D_i / Q_i + CI_i \cdot Q_i / 2 + CI_i \cdot Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{TE_i} \cdot \sqrt{V_i} - \lambda_i \cdot D_i - \omega_i \cdot V_i \quad (12)$$

s. a: (6), (7) y $(D_i, V_i) \in \Omega$

- Luego si $\Delta_i < 0$, hacer $X_i = 1$, e

$$Y_{ij} = \begin{cases} 0 & CUO_i \cdot d_j + CT_{ij} + \lambda_i \cdot d_j + \omega_i \cdot v_j - \psi_j \geq 0 \\ 1 & CUO_i \cdot d_j + CT_{ij} + \lambda_i \cdot d_j + \omega_i \cdot v_j - \psi_j < 0 \end{cases} \quad \forall j=1, \dots, M \quad (13)$$

D_i , V_i , y Q_i mantienen los valores obtenidos al resolver el problema (12) (ver sección 3.2).

- Si $\Delta_i \geq 0$, hacer $X_i = D_i = V_i = Q_i = 0$, e $Y_{ij} = 0$, $\forall j$.

Una vez resueltos los subproblemas (10) (ver sección 3.2), para cada CD i y en cada iteración k , se dispone de valores de las variables primales, X^k , Y^k , D^k , V^k , Q^k . Las variables duales de las restricciones relajadas, ψ^k , λ^k y ω^k , son actualizadas y optimizadas considerando el método del subgradiente (Miranda y Garrido, 2004^a; Miranda, 2004; Nozick, 2001; Crowder, 1976). Para esta actualización se requiere una solución factible que entregue una cota superior al valor óptimo

del problema. En el capítulo 4 se presenta un método heurístico que permite obtener dicha solución factible, en base a las soluciones entregadas por los subproblemas (10).

De este modo, si el método converge sin alcanzar factibilidad para las restricciones relajadas, se dispone de una solución factible y de una cota superior para el error cometido por dicha solución. Esto se basa en que el método del subgradiente entrega un óptimo para el problema dual del problema original, cuya función objetivo, correspondiente en este caso a la evaluación de las soluciones primales y duales en la ecuación (9), es menor al óptimo primal en problemas enteros. Así, la diferencia entre el valor de la solución heurística y el del óptimo dual, representa una cota superior al error cometido por la heurística (Wolsey, 1998; Nemhauser y Wolsey, 1988).

3.1 Caracterización del Espacio Factible para D_i y V_i, Ω

Las desigualdades válidas para D_i y V_i consisten en un espacio (Ω) que contiene a todos los posibles valores de D_i y V_i ($\forall i$), considerando todas las combinaciones de clientes. En primer lugar, D_i y V_i son acotados por $0 \leq D_i \leq D_{tot}$ y $0 \leq V_i \leq V_{tot}$, donde D_{tot} y V_{tot} representan la media y varianza de la demanda total presentada por los clientes. Luego, para cada valor de $D_i \leq D_{tot}$ se calcula el mínimo y máximo valor de V_i , $V_i^{\min}(D_i)$ y $V_i^{\max}(D_i)$, respectivamente, obtenibles mediante combinaciones de clientes. Así, Ω contempla adicionalmente la restricción $V_i^{\min}(D_i) \leq V_i \leq V_i^{\max}(D_i)$. Por construcción, debe cumplirse $V_i^{\max}(D_{tot}) = V_i^{\min}(D_{tot}) = V_{tot}$, ya que la única forma de alcanzar D_{tot} es considerando todos los clientes, caso en que la varianza toma el valor V_{tot} . $V_i^{\min}(D_i)$ y $V_i^{\max}(D_i)$ pueden ser calculados resolviendo los siguientes problemas:

$$\begin{aligned} (a) \quad V_i^{\max}(D_i) &= \text{Max} \quad \sum_{j=1}^M v_j \cdot Y_{ij} & (b) \quad V_i^{\min}(D_i) &= \text{Min} \quad \sum_{j=1}^M v_j \cdot Y_{ij} \\ \text{s. a:} \quad \sum_{j=1}^M d_j \cdot Y_{ij} &\leq D_i, Y_{ij} \in \{0,1\} \forall j & \text{s. a:} \quad \sum_{j=1}^M d_j \cdot Y_{ij} &\geq D_i, Y_{ij} \in \{0,1\} \forall j \end{aligned} \quad (14)$$

En vez de resolver los problemas (14)-(a) y (14)-(b), se analiza las respectivas relajaciones lineales, problemas que presentan espacios más grandes a los de los problemas originales.

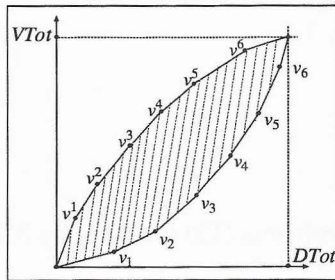


Figura 1: Forma Esperada para el Espacio Factible Ω

Estos espacios son idénticos para todos los CD's, ya que ningún parámetro en ambos problemas depende del CD i , a excepción de D_i (variable de decisión). Basados en las condiciones de optimalidad del método simplex aplicadas a la relajación lineal del problema de mochila, se puede demostrar que la solución a las relajaciones lineales de los problemas (14)-(a) y (14)-(b) corresponde a los bordes del espacio Ω , representado en el ejemplo de la Figura 1. En esta figura ejemplo, v^1, v^2, \dots, v^6 y v_1, v_2, \dots, v_6 corresponden a soluciones enteras de las relajaciones lineales de los problemas (14)-(a) y (14)-(b), respectivamente.

3.2 Resolución de Subproblemas, Cálculo de Π_i

En la presente sección se describe un procedimiento exacto para resolver el problema (12), correspondiente a calcular los respectivos valores de Π_i . El problema a resolver es:

$$\Pi_i = \underset{D_i, V_i, Q_i}{\text{Min}} \left\{ CO_i \cdot D_i / Q_i + CI_i \cdot Q_i / 2 + CI_i \cdot Z_{1-\alpha} \sqrt{TE_i} \cdot \sqrt{V_i} - \lambda_i \cdot D_i - \omega_i \cdot V_i \right\} \quad (15)$$

$$s. a: Q_i \leq QMax \quad (16)$$

$$Q_i + (Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \sqrt{TE_i} \cdot \sqrt{V_i} \leq ICap \quad (17)$$

$$(D_i, V_i) \in \Omega, Q \geq 0 \quad (18)$$

La resolución de este problema se sustenta en las condiciones de optimalidad de Theil–Van de Panne (Bazaraa et al., 1993; Theil y Van de Panne, 1960), observando que en el óptimo existen sólo las siguientes cuatro posibilidades: (i) Ninguna de las restricciones es activa; (ii) Sólo la restricción (16) es activa; (iii) Sólo la restricción (17) es activa; (iv) Ambas restricciones son activas. Si al resolver el problema sin las restricciones (16) y (17), la solución obtenida no viola dichas restricciones, la solución será óptima. En caso contrario, se debe estudiar los otros tres casos. De un análisis de estas tres posibilidades es posible ver que, independiente del caso que entregue el óptimo, éste se encontrará en los bordes del espacio Ω (ver Miranda, 2004). Así, el método realiza un proceso de búsqueda que considera sólo dichos bordes, asegurando respetar las restricciones (16), (17) y (18). Resuelto este subproblema, se obtienen los valores de Π_i^k, D_i^k, V_i^k , y Q_i^k , para cada CD i en cada iteración k . Además, se calculan las variables duales óptimas asociadas a las restricciones (16) y (17), ϕ_i^* y φ_i^* respectivamente, según (19), donde $\bar{Q}_i = ICap - (Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \sqrt{TE_i} \cdot \sqrt{V_i^k}$. Estas ecuaciones se obtienen de las condiciones de Karush-Khun-Tacker, dado los valores de las variables primales Q, D y V (Bazaraa et al., 1993).

$$\phi_i^* = \begin{cases} \frac{CO_i \cdot D_i}{QMax^2} - \frac{CI_i}{2} & Q_i^k = QMax, Q_i^k < \bar{Q}_i \\ \frac{CO_i \cdot D_i}{2 \cdot QMax^2} - \frac{CI_i}{4} & Q_i^k = QMax, Q_i^k = \bar{Q}_i \\ 0 & Q_i^k < QMax \end{cases} \quad \varphi_i^* = \begin{cases} \frac{CO_i \cdot D_i}{\bar{Q}_i^2} - \frac{CI_i}{2} & Q_i^k < QMax, Q_i^k = \bar{Q}_i \\ \frac{CO_i \cdot D_i}{2 \cdot \bar{Q}_i^2} - \frac{CI_i}{4} & Q_i^k = QMax, Q_i^k = \bar{Q}_i \\ 0 & Q_i^k < \bar{Q}_i \end{cases} \quad (19)$$

4 HEURÍSTICA LAGRANGEANA

En el presente capítulo se describe el método utilizado para la obtención de soluciones factibles en cada iteración k del algoritmo, basados en las soluciones de cada subproblema (Sección 3). De este modo, dadas dichas soluciones ($X^k, Y^k, D^k, V^k, Q^k, \phi^k$ y φ^k) y las variables duales de las restricciones relajadas (ψ^k, λ^k y ω^k , actualizadas mediante el método del subgradiente), se busca una solución factible para el problema. La heurística se basa en tres procedimientos básicos, *Elección de Centros de Distribución*, *Asignación Tipo Greedy* y *Búsqueda de Mejoras Locales*, descritas a continuación:

Elección de Centros de Distribución: Se busca un número inicial P de CD's, basados en los costos de los subproblemas, SP_i , los cuales dan cierta información de cuán bueno es cada CD. Se considera como costo de instalar el CD i la expresión $CTI_i = CF_i + \Pi_i(D_i^k, V_i^k, Q_i^k) + CTAS_i$, donde:

$$\begin{aligned} \Pi_i(D_i^k, V_i^k, Q_i^k) &= CO_i \cdot D_i^k / Q_i^k + CI_i \cdot Q_i^k / 2 + CI_i \cdot Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{TE_i} \cdot \sqrt{V_i^k} - \lambda_i^k \cdot D_i^k - \omega_i^k \cdot V_i^k \\ CTAS_i &= \sum_{j=1}^M (CUO_i \cdot d_j + CT_{ij} + \lambda_i^k \cdot d_j + \omega_i^k \cdot v_j - \psi_j) \end{aligned} \quad (20)$$

Luego se elegirá a los CD's que entreguen los P menores valores de CTI_i .

Asignación Greedy de Clientes: Una vez elegidos los P CD's, los clientes son asignados de manera greedy (se asignan al CD factible más cercano, considerando como cercanía el costo real de asignación o transporte utilizado en la función objetivo del problema MILI-RCIO), respetando la restricción de capacidad de ordenamiento y de inventario máximo de cada CD. Para ambas restricciones se asume los valores de las variables duales ϕ_i^k y φ_i^k como constantes, siendo éstas re-escritas según (21) y (22). El término al lado izquierdo de la ecuación (21) y el primer término del lado izquierdo de (22), corresponden a la solución óptima del lote de ordenamiento Q_i en caso de asumir ϕ_i^k y φ_i^k como constantes y para cualquier valor de D_i . Esta solución se obtiene derivando e igualando a cero la respectiva función lagrangeana, correspondiente a la incorporación penalizada de las restricciones (16) y (17), en la función objetivo (15), considerando como penalizaciones los respectivos valores de ϕ_i^k y φ_i^k .

$$\sqrt{2 \cdot CO_i / (CI_i + 2 \cdot \phi_i^k + 2 \cdot \varphi_i^k)} \cdot \sqrt{D_i} \leq QMax \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (21)$$

$$\sqrt{2 \cdot CO_i / (CI_i + 2 \cdot \phi_i^k + 2 \cdot \varphi_i^k)} \cdot \sqrt{D_i} + (Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \cdot \sqrt{TE_i} \cdot \sqrt{V_i} \leq ICap \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (22)$$

En caso de no poder asignar clientes a su CD más cercano, se buscará asignarlo al segundo CD, al tercero, etc. Una vez encontrada una solución factible ($\bar{X}^k, \bar{Y}^k, \bar{D}^k, \bar{V}^k$ y \bar{Q}^k) se recalculan las variables duales ϕ_i^k y φ_i^k mediante las ecuaciones (19).

Búsqueda de Mejoras Locales: En este procedimiento se busca mejoras a las soluciones disponibles, $\bar{X}^k, \bar{Y}^k, \bar{D}^k, \bar{V}^k$ y \bar{Q}^k , considerando movidas del tipo K-OPT y asumiendo constantes los valores de ϕ_i^k y φ_i^k . Se utilizan los siguientes dos procedimientos de mejoras locales:

- 1-OPT:** Se reasigna cada cliente a su mejor CD, en la medida que se obtenga mejoras en los costos y se respete las restricciones de capacidad (21) y (22).
- 2-OPT:** Se intercambian dos clientes asignados a CD's diferentes, en la medida que se obtenga una mejora en los costos y se respeten las restricciones de capacidad.

Finalmente se efectúa el procedimiento completo para diferentes valores de P ($P = 1, \dots, N$), y se elige la mejor de las soluciones, obteniéndose una solución factible, dada por:

$$\bar{X}^k, \bar{Y}^k, \bar{D}^k = \bar{D}^k(\bar{Y}^k), \bar{V}^k = \bar{V}^k(\bar{Y}^k), \bar{Q}^k = \bar{Q}^k(\bar{D}^k, \phi^k, \varphi^k) \quad (23)$$

Así, la cota superior al valor óptimo del problema se actualiza según $Z_{sup}^k = \min(Z_{sup}^{k-1}, \bar{Z})$, donde:

$$\bar{Z} = \sum_{i=1}^N CF_i \cdot \bar{X}_i^k + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (CUO_i \cdot d_j + CT_{ij}) \cdot \bar{Y}_j^k + \sum_{i=1}^N CI_i \cdot Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{TE_i} \cdot \sqrt{\bar{V}_i^k} + \sum_{i=1}^N \left(CO_i \cdot \frac{\bar{D}_i^k}{\bar{Q}_i^k} + CI_i \cdot \frac{\bar{Q}_i^k}{2} \right) \quad (24)$$

Las tradicionales heurísticas lagrangeanas, implementadas en cada iteración del método del subgradiente, son en general relativamente simples. En este caso, dada la alta complejidad de la presente heurística (ver Miranda, 2004), se ejecutó sólo cada 30 iteraciones (3% de las

iteraciones, aproximadamente), reduciendo fuertemente los tiempos de ejecución del algoritmo, pero manteniéndose una razonable calidad de las soluciones encontradas.

5 APLICACIÓN NUMÉRICA, Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados de una aplicación numérica, realizada en un computador PENTIUM IV, de 1,72 GH y 256 MB (RAM). Se considera 20 sitios potenciales para CD's y 40 clientes. Sobre una simulación en base a información real de los parámetros del modelo (no detallada en este artículo), se sensibilizó las varianzas de las demandas de los clientes y los costos fijos de CD's, con variaciones de $\pm 10\%$, $\pm 20\%$ y $\pm 30\%$ para cada conjunto de parámetros (7×7 instancias), y se consideraron dos niveles de capacidad de ordenamiento. Los tiempos de ejecución para las 98 instancias generadas fueron en promedio 65 segundos.

En la Figura 3-(a) se presenta los costos de las soluciones heurísticas (Cota Superior), el valor óptimo dual (Cota Inferior) y la diferencia porcentual (Error Máximo), considerando la sensibilización de costos fijos. Estos valores representan el promedio para los 7 casos de sensibilización de varianzas y los 2 niveles de capacidad de ordenamiento. Similarmente, la Figura 3-(b) muestra la Cota Superior, Cota Inferior y el Error Máximo, para la sensibilización en varianzas. Se observa que los costos totales crecen con los costos fijos y con la variabilidad de las demandas, validando el comportamiento del modelo y de la heurística. Además, se observa que incrementos equivalentes generan mayores aumentos en costos para la sensibilización de costos fijos que para la sensibilización de varianzas. Esto, ya que la varianza está en los costos a través de inventarios de seguridad, que son proporcionales a la desviación estándar de la demanda.

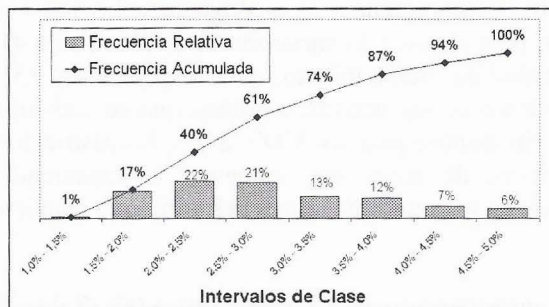


Figura 2: Histograma de Errores Máximos

Además, las cotas para los errores cometidos fluctúan entre 1% y 5%. El mínimo alcanzado para las 98 instancias fue de 1,41%, el máximo fue de 4,92%, mientras que el máximo error promedio obtenido fue de 2,89%. En la Figura 2 se presenta el histograma de los errores máximos observados para las 98 instancias consideradas.

Finalmente en la Figura 4-(a) y Figura 4-(b) se puede observar la tendencia existente para el error máximo, ante cambios en varianzas y costos fijos. Para los costos fijos se observa una leve tendencia al descenso, lo cual se puede explicar por una reducción porcentual del error (aunque no necesariamente en magnitud) comparado con el claro aumento en los costos del sistema. Por otro lado, para el caso de aumentos en las varianzas de las demandas, se observa una reducción más evidente de los errores porcentuales. Lo anterior se puede explicar por una modificación significativa en el espacio factible del problema, especialmente para el subproblema asociado a la media, varianza y lote de ordenamiento para cada CD i , Ω , espacio definido en la sección 3.1.

Finalmente, en las Tablas 2, 3 y 4 se muestran los resultados para la instancia base considerando sólo una sensibilización de varianzas de -30%, 0% y +30% respectivamente, y considerando dos niveles de capacidad de ordenamiento. Se muestra para las soluciones heurísticas encontradas, los CD's que son instalados, además de los multiplicadores asociados a las restricciones de capacidad de ordenamiento, $Fi1$, y capacidad de inventario, $Fi2$. QW indica el lote de Wilson, correspondiente al lote de ordenamiento óptimo sin considerar restricciones de capacidad, y calculado sobre la base de la media asignada a cada CD instalado (ecuación 25). Q^* indica el lote óptimo entregado por la heurística y Q' indica el nivel de inventario disponible para almacenar el lote de ordenamiento en cada CD instalado, una vez descontada la capacidad utilizada debido a la desviación estándar de la demanda asignada, es decir la ecuación (26).

$$Q_i^w = \sqrt{2 \cdot CO_i \cdot D_i / CI_i} \quad (25)$$

$$Q' = ICap - (Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \sqrt{TE_i} \cdot \sqrt{V_i} \quad (26)$$

Para el caso de -30% en sensibilidad de varianzas (Tabla 2) se observa que al considerar una capacidad de ordenamiento de 600, dicha restricción de capacidad es activa para los cuatro CD's ($Fi1 > 0$). Además se observa que el Lote de Wilson es mayor a la capacidad de ordenamiento, y el nivel de inventario disponible Q' es mayor a la capacidad $QMax$. De este modo se observa que $Fi1$ es positivo, activándose sólo la restricción de lote de ordenamiento máximo. Al aumentar la capacidad a 900, esta restricción deja de ser activa ($Fi1 = 0$) para los cuatro CD instalados, y se hacen activas las restricciones de capacidad de almacenamiento para dos de los cuatro CD ($Fi2 > 0$). Para los CD's que no tienen ninguna restricción activa, se observa que el lote de Wilson, es menor a la capacidad de ordenamiento y al inventario disponible Q' , coincidiendo además con el lote óptimo entregado por la heurística. Para los otros dos CD se observa que el lote de ordenamiento óptimo se ajusta al nivel de inventario disponible Q' , activándose sólo la restricción de capacidad de inventario ($Fi2 > 0$). Esta tendencia es análoga para los otros tres niveles de varianzas (0% y +30%). Por ejemplo, para el nivel de varianzas de +30% (Tabla 4) se observa que al pasar de 600 a 900 en la capacidad de ordenamiento, para los CD's 8 y 13 las restricciones de capacidad de almacenamiento dejan de ser activas, mientras que se activan las restricciones de capacidad de almacenamiento. En cambio para los CD's 2 y 3, las restricciones de capacidad de almacenamiento ya eran activas, de modo que aumentar la capacidad de ordenamiento no tiene ningún efecto, manifestado en los multiplicadores $Fi1$ y $Fi2$ que mantienen su valor.

Para una capacidad de ordenamiento de 900, al aumentar las varianzas de -30% a 0% (Tablas 2 y 3) el CD 8 es cerrado, eligiéndose ahora el CD 11. El nivel de inventario disponible Q' se reduce de 855,8 a 696,1, y el lote QW aumenta de 781,1 a 789,9, activándose la restricción de capacidad de almacenamiento ($Fi2 > 0$). Para una capacidad de ordenamiento de 600 se observa que aumentar las varianzas de -30% a +30% (Tablas 2 y 4) activa las restricciones de capacidad de almacenamiento ($Fi2 > 0$) para dos de los cuatro CD's. Esto ya que al aumentar las varianzas se reduce el nivel de inventario disponible Q' , y al tomar éste valores menores a la capacidad de ordenamiento, la restricción de capacidad de almacenamiento se hace más restrictiva.

Un resultado interesante es que aumentar varianzas, o reducir capacidades de almacenamiento, no genera aumentos en la cantidad de CD's instalados (al menos para los niveles de sensibilidad considerados). Esto es contrario a lo observado o esperado en los clásicos MLI, donde se espera que reducir capacidades (o aumentar el consumo de recursos) genere un aumento en la cantidad

de CD's instalados. Esto se debe a que reducir lotes de ordenamiento, en el modelo MILI-RCIO, permite servir demanda con una mayor varianza en cada CD. Esto se observa en la ecuación (27), donde reducir el lote de ordenamiento Q_i , al lado derecho de la ecuación, permite aumentar el inventario disponible para las varianzas de los clientes asignados a cada CD i , V_i .

$$(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta})\sqrt{TE_i} \cdot \sqrt{V_i} \leq ICap - Q_i \rightarrow V_i \leq \left([ICap - Q_i] / (Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta})\sqrt{TE_i} \right)^2 \quad (27)$$

Reducir estos lotes genera un aumento en costos (de ordenamiento e inventario), menor a los costos de aumentar los CD's instalados. Esto, dada la estructura de costos del modelo EOQ utilizada, la cual posee una baja sensibilidad en torno a su óptimo (Anderson, 1994). Así, el aumento en costos al reducir los lotes permite aumentar la varianza de la demanda servida en cada CD, evitando un incremento en costos de instalación. Por ejemplo, se aumentó en 200% las varianzas de las demandas, donde se observó que la cantidad de CD's a instalar aumento sólo a cinco, resultado que es presentado en la Tabla 1. Dado lo restrictivo de la capacidad de inventario, un aumento en la capacidad de ordenamiento no generó efectos en las soluciones.

**Tabla 1: Aumento de CD's Instalados,
Ante un Aumento de 200% en Varianzas**

+200% en Varianzas					
QMax = 600					
CD	Fi1	Fi2	QW	Q*	Q'
2	0,0	259,2	830,2	333,8	333,8
3	0,0	73,7	683,1	434,3	434,3
5	0,0	132,8	833,0	435,6	435,6
8	0,0	78,4	781,1	487,4	487,4
14	0,0	17,1	620,3	535,3	535,3

Así, se manifiesta la importancia de incorporar decisiones de ordenamiento y restricciones de capacidad de almacenamiento de manera estocástica en el DRD, donde decisiones de ordenamiento pueden tener gran relevancia sobre el diseño de la red. Más precisamente, utilizar menores lotes en el sistema, comparados con los óptimos sin restricciones de capacidad, puede reducir de manera importante los costos del sistema, reduciendo la cantidad de CD's.

6 RESUMEN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este artículo se presenta una manera de incorporar en un modelo de inventario y localización de instalaciones, restricciones de capacidad más realistas a las consideradas tradicionalmente en la literatura. En este caso se reemplazó la típica restricción de capacidad considerada por los MLI, la cual limita la demanda media servida, por una que limita al lote de ordenamiento utilizado por cada CD y una restricción estocástica de capacidad de inventario. La capacidad asociada al proceso de entrega no fue considerada, representando una extensión a desarrollar.

Se presenta un algoritmo de relajación lagrangeana y método del subgradiente, que entrega una cota inferior al óptimo del problema y una solución heurística para el problema, la cual es obtenida mediante una heurística lagrangeana implementada en cada iteración. De este modo se obtiene una solución heurística y una cota superior al error cometido por dicha solución. Por otro lado, pese al aumento significativo en la complejidad de modelación, fue posible utilizar y generalizar métodos clásicos de resolución de problemas de optimización combinatorial a la resolución del modelo analizado. El enfoque considera además la utilización de heurísticas de búsqueda local K-OPT, para la obtención de soluciones factibles en las iteraciones del algoritmo.

Se observaron resultados bastante satisfactorios en términos de capacidad de modelación, debido a la evolución razonable de las funciones de costos (heurísticos y duales), al sensibilizar algunos parámetros del modelo. Además se obtuvieron resultados satisfactorios en términos de la calidad de las soluciones encontradas, observándose errores máximos esperados en torno a 2,9%, con un mínimo de 1,4% y un máximo de 4,9%, para un total de 98 instancias.

Otro resultado es la reducción de tiempos de ejecución, producto del relajamiento simultáneo de las restricciones que aseguran que los clientes sean asignados a algún CD, además de las restricciones que ligan la media y la varianza de la demanda asignada a cada CD con la media y la varianza de los clientes. En Miranda y Garrido (2004a) se consideró el relajamiento exclusivo de estas dos restricciones, entregando en uno de sus sub-problemas un CFLP, problema que fue resuelto directamente usando LINGO 6.0. Así, se obtuvo soluciones en tiempos cercanos a 1 minuto, para instancias de 10 CD's y 20 clientes (210 variables binarias). Para el presente modelo, donde se consideró además el relajamiento de las restricciones comentadas, se obtuvo soluciones en tiempos similares para instancias de 20 CD's y 40 clientes (840 variables binarias). Los resultados obtenidos evidenciaron la relevancia de incorporar decisiones de ordenamiento y restricciones de capacidad de almacenamiento de manera estocástica en MLI, mostrándose que decisiones de lotes de ordenamiento pueden tener impactos relevantes sobre el diseño de la red. Se muestra que utilizar menores lotes en el sistema, comparados con los óptimos sin restricciones de capacidad, puede reducir de manera importante los costos del sistema. Esto, pese al aumento de los costos de ordenamiento e inventario asociados, debido a que se reduce el número de CD's instalados, con el consecuente ahorro en costos fijos de operación y costos asociados a inventarios de seguridad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anderson, E. J. (1994). **The Management of Manufacturing, Models and Analysis**. Wokingham, Addison-Wesley.
- Bazaraa, M. S., H. D. Sherali, C. M. Shetty (1993). **Nonlinear Programming**. New York, John Wiley.
- Bramel, J. and D. Simchi-Levi (2000). **The Logic of Logistic**. New York, Springer-Verlag.
- Crowder, H. (1976). **Computational Improvements for Subgradient Optimization**. Symposia Mathematica, New York, Academic Press.
- Daskin, M. S. (1995). **Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications**. New York, Wiley-Interscience.
- Daskin, M. S., C. Coullard, Zuo-Jun Max Shen (2002). "An Inventory-Location Model: Formulation, Solution Algorithm and Computational Results." **Annals of Operations Research** 110, 83-106.
- Drezner, Z. (2002). **Facility Location: Applications and Theory**. Berlin, Springer-Verlag.

Garrido, R. A. (2001). **Modelación de Sistemas de Distribución de Carga**. Santiago, Ediciones Universidad Católica de Chile.

Jayaraman, V. (1998). "Transportation, facility location and inventory issues in distribution network design." **International Journal of Physical Distribution & Logistics Management** 18, 471-494.

Koskosidis, Y. A. and W. B. Powell (1992). "Clustering Algorithms for Consolidation of Customer Into Vehicle Shipments." **Transportation Research** 26B, 365-379.

Miranda, P. A. (2004). **Un Enfoque Integrado para el Diseño Estratégico de Redes de Distribución de Carga**. Departamento de Ingeniería de Transporte, Escuela de Ingeniería. Santiago, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Miranda, P. A. and R. A. Garrido (2004a). "Incorporating Inventory Control Decisions into a Strategic Distribution Network Design Model with Stochastic Demand." **Transportation Research, Part 40E**, 183-207.

Miranda, P. A. and R. A. Garrido (2004b). A Simultaneous Inventory Control and Facility Location Model with Stochastic Constraint of Inventory Capacity. **XIII Pan-American Conference of Traffic and Transportation Engineering**.

Miranda, P. A. and R. A. Garrido (2005). A Simultaneous Inventory Control and Facility Location Model with Stochastic Capacity Constraints. **Journal of Networks and Spatial Economics** (forthcoming).

Nemhauser, G. and L. Wolsey (1988). **Integer and Combinatorial Optimization**. New York, Wiley.

Nozick, L. K. (2001). "The Fixed Charge Facility Location Problem With Coverage Restriction." **Transportation Research** 37E, 281-296.

Nozick, L. K. and M. Turnquist (1998). "Integrating inventory impacts into a fixed-charge model for locating distribution centers." **Transportation Research Part E, Logistics & Transportations Review** 34.

Nozick, L. K. and M. Turnquist (2001). "A two-echelon inventory allocation and distribution center location analysis." **Transportation Research Part E, Logistics & Transportations Review** 37, 425-441.

Shen, Z-J., C. Coullard, M. Daskin. (2003). "A Joint Location-Inventory Model." **Transportation Science** 37, 40-55.

Theil, H. and C. Van de Panne (1960). "Quadratic Programming as an Extension of Conventional Quadratic Maximization." **Management Science** 7, 1-20.

Wolsey, L. (1998). **Integer Programming**. New York, John Wiley & Sons Inc.

ANEXOS: TABLAS Y FIGURAS

Tabla 2: Sensibilización de Restricción de Capacidad, Para una Reducción de 30% en Varianzas

-30% en Varianzas									
QMax = 600					QMax = 900				
CD	Fi1	Fi2	QW	Q*	Q'	CD	Fi1	Fi2	QW
2	55,7	0,0	872,3	600,0	757,5	2	0,0	25,0	906,8
3	62,2	0,0	899,0	600,0	717,5	3	0,0	28,5	899,0
5	35,7	0,0	785,4	600,0	849,8	5	0,0	0,0	732,0
11	36,7	0,0	789,9	600,0	778,4	8	0,0	0,0	781,1

Tabla 3: Sensibilización de Restricción de Capacidad, Para Varianzas de la Situación Base (0%)

+0% en Varianzas									
Qmax = 600					QMax = 900				
CD	Fi1	Fi2	QW	Q*	Q'	CD	Fi1	Fi2	QW
2	64,2	0,0	906,8	600,0	650,7	2	0,0	47,1	906,8
3	62,2	0,0	899,0	600,0	623,3	3	0,0	54,0	899,0
5	24,4	0,0	732,0	600,0	808,6	5	0,0	0,0	732,0
8	34,7	0,0	781,1	600,0	788,6	11	0,0	14,4	789,9

Tabla 4: Sensibilización de Restricción de Capacidad, Para un Aumento de 30% en Varianzas

+30% en Varianzas									
QMax = 600					QMax = 900				
CD	Fi1	Fi2	QW	Q*	Q'	CD	Fi1	Fi2	QW
2	0,0	97,7	942,5	548,4	548,4	2	0,0	97,7	942,5
3	0,0	48,4	832,6	593,6	593,6	3	0,0	48,4	832,6
8	34,7	0,0	781,1	600,0	730,9	8	0,0	7,1	781,1
13	46,5	0,0	833,6	600,0	610,6	13	0,0	43,2	833,6

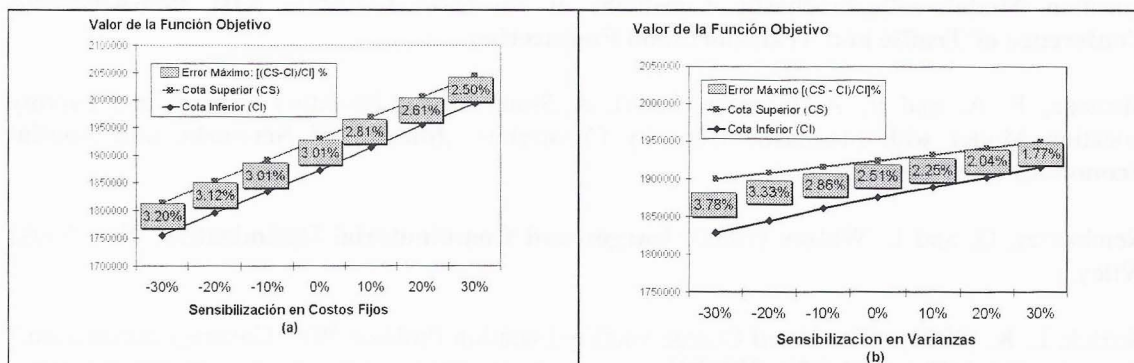


Figura 3: Calidad de Soluciones Considerando Sensibilización de Costos Fijos y Varianzas

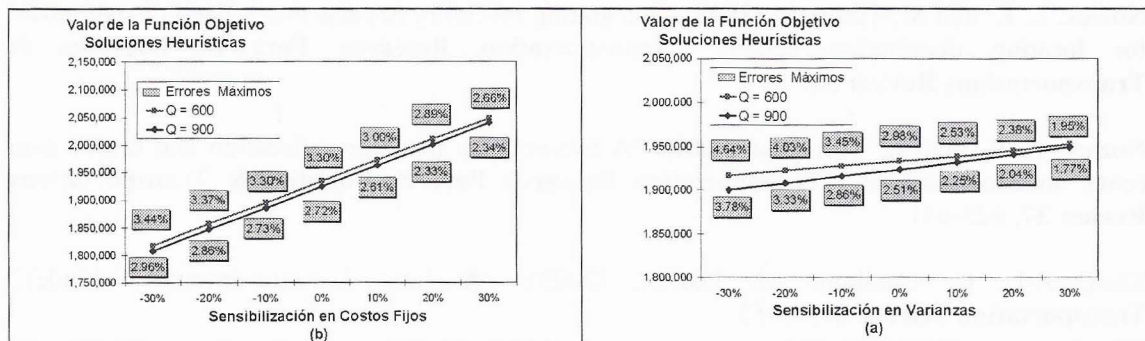


Figura 4: Cambios en las Soluciones Heurísticas Ante Aumentos en Capacidad de Ordenamiento y Considerando la Sensibilización de Costos Fijos y Varianzas