ACERCA DE LA ENORME SENSIBILIDAD DEL VALOR SUBJETIVO DEL TIEMPO A LA ESPECIFICACIÓN DEL INGRESO EN LA FUNCIÓN DE UTILIDAD

Sergio Jara-Díaz, Marcela Munizaga
Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile
Casilla 228-3, Santiago. Fax: 6894206, e-mail: jaradiaz@ing.uchile.cl, mamuniza@ing.uchile.cl

Reinaldo Guerra
Secretaria Interministerial de Planificación de Transporte (SECTRA)
Código Postal: 834-0084, Santiago. Fax: 6966477, e-mail: rguerra@sectra.cl

RESUMEN

En este trabajo se muestra la enorme sensibilidad que puede tener la estimación del valor subjetivo de ahorrar tiempo de viaje (VST) a la especificación del ingreso en modelos discretos de elección modal, en particular si se usa una especificación tipo tasa de gasto o tasa salarial versus una especificación lineal en costo. La exploración teórica de esta indeseable propiedad es motivada por alguna evidencia empírica que muestra diferencias de hasta un orden de magnitud en los VST estimados con distintas especificaciones para una misma base de datos. Formulamos el problema en términos de dos especificaciones de la utilidad: una en que la variable costo es incluida en forma lineal en la función de utilidad, y otra en que esta es dividida por el ingreso. Se generó datos simulados con pequeñas variaciones en torno al ingreso promedio. Mostramos que el VST promedio aumenta diez veces, cuando el coeficiente de variación de la variable ingreso aumenta de 0 a 0,3 (manteniendo todo lo demás constante). También mostramos que esta diferencia proviene principalmente de la variación en la estimación de la Utilidad Marginal del Ingreso. Para explorar esta relación, analizamos las condiciones de primer orden del problema de optimización de máxima verosimilitud a partir de las cuáles se obtiene los parámetros de costo y tiempo. Usando el teorema de función implícita se obtiene una expresión para las derivadas de los parámetros con respecto a una perturbación del ingreso. Esta derivada no es claramente interpretable, por lo que se simula el comportamiento de los parámetros y el VST, mostrando que esto parece ser una debilidad estructural en el modelo bajo condiciones no identificadas aún.

1. INTRODUCCIÓN

Existe evidencia empírica que muestra que, al utilizar modelos lineales en costo se puede obtener grandes diferencias en la estimación tanto de la utilidad marginal del ingreso (UMI) como del valor subjetivo del tiempo (VST), en comparación con otros en que la variable costo es dividida por el ingreso (especificaciones de tasas de gasto o salarial). Lamentablemente, el fenómeno no ha sido estudiado explícitamente y nuestra observación es fruto de resultados intermedios en el proceso de calibración de modelos con diversas bases de datos y del intercambio verbal de experiencias. No hemos encontrado en la literatura casos en que la presencia o ausencia de este problema se reporte. Nosotros hemos detectado el problema en distintas bases de datos de elección de modo urbano e interurbano en modelos calibrados por nosotros mismos y por otros autores. Esto nos motivó a investigar el problema, desde la perspectiva de entender por qué sucede. Cabe hacer notar que el asunto es de mucha relevancia ya que implica que, por la vía de usar especificaciones alternativas justificables desde el punto de vista microeconómico, se puede obtener (y eventualmente justificar) valores subjetivos del tiempo dramáticamente diferentes.

En este trabajo se formula el problema de manera general con especificaciones comparables y se estudia el comportamiento de los parámetros y de su cuociente (valor del tiempo). Para ello se genera una base de simulación, con variables explicativas independientes, con la que se verifica la gran sensibilidad del VST a la varianza del ingreso. Luego se estudia analíticamente el comportamiento de los estimadores máximo verosímiles para el caso binomial, encontrando las derivadas de los parámetros con respecto a una perturbación del ingreso que implica un aumento marginal de la varianza, y analizando numéricamente su comportamiento usando una base de simulación que también tiene variables explicativas independientes.

2. FORMULACIÓN Y SIMULACIÓN DEL PROBLEMA

El problema detectado empíricamente es que se puede obtener estimadores del Valor Subjetivo del Tiempo significativamente distintos utilizando especificación lineal en costo y lineal en costo/ingreso usando los mismos datos. Si al aplicar el modelo costo/ingreso se obtiene una cierta UMI, parece razonable esperar que, si la varianza del ingreso es pequeña, con una especificación lineal en costo se obtenga un valor de la UMI parecido, es decir, que el parámetro del costo sólo se modifique en escala. El problema no se presenta en el caso en que el ingreso es el mismo para todos los individuos, ya que se trata de un simple cambio de escala en una de las variables explicativas. Para facilitar la comparación, podemos eliminar el efecto de escala formulando el problema con dos especificaciones comparables directamente: una en que el costo es dividido por la variable ingreso I_q (que tiene varianza en la muestra de calibración) y otra en que el costo es dividido por una constante igual al ingreso promedio $\bar{I}$, como se muestra en las ecuaciones (1) y (2), donde t_{iq} y c_{iq} son los valores de los atributos tiempo y costo respectivamente para la alternativa *i* del individuo *q*, y donde $\underline{\alpha}$ y $\underline{\alpha}'$ son los conjuntos de parámetros que se calibran por máxima verosimilitud en cada caso. Esta formulación hace que los parámetros α_c y α'_c sean directamente comparables.

$$V_{iq} = \alpha_i + \alpha_t t_{iq} + \alpha_c c_{iq} / \bar{I} \tag{1}$$
$$V_{iq} = \alpha'_i + \alpha'_t t_{iq} + \alpha'_c c_{iq} / I_q \tag{2}$$

Para estudiar el problema de manera controlada, se generó una base de datos de experimentación simulada. Para este experimento se consideró cuatro modos: auto, bus, taxi colectivo y metro, y dos variables explicativas independientes: tiempo y costo partido por ingreso. Se generó una variable ingreso distribuida Normal, con una media de 500.000 [$/mes], y distintas desviaciones estándar, que van desde cero (caso en que el ingreso es el mismo para todas las observaciones) hasta 150.000, que implica un coeficiente de variación de 0,3 (relativamente bajo). Usando exactamente los mismos datos, y la misma especificación, salvo por la forma de incluir la variable ingreso, se calibró los modelos Logit de elección modal por máxima verosimilitud.

Los resultados de la calibración de modelos con datos simulados se reportan en la Tabla 1. Se puede ver que, de acuerdo a las propiedades teóricas del modelo, las dos primeras especificaciones arrojan resultados idénticos, salvo el escalamiento (igual al ingreso constante) que se produce en el parámetro del costo. Al incorporar varianza en la variable ingreso, sin embargo, los resultados cambian notablemente. Se puede ver como pequeños aumentos en la varianza de I_q provocan grandes cambios en la estimación del VST, llegando incluso a una relación de diez a uno para una desviación estándar equivalente al 30% del valor promedio de la variable. Se puede ver también que son el parámetro del costo y las constantes modales los que se ven afectados, ya que el parámetro del tiempo prácticamente se mantiene sin variación, lo que sugiere que no cambia la varianza del error. La log-verosimilitud cambia sólo marginalmente. Estas simulaciones motivan la exploración analítica del problema.

Tabla 1: Simulación del efecto de la varianza del ingreso en la estimación del valor subjetivo del tiempo (2000 observaciones)

Coeficiente de variación de I_q	-	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3
Especificación V	Costo	Costo/ $\bar{I}$	Costo/I_q	Costo/I_q	Costo/I_q	Costo/I_q	Costo/I_q
Cte. Auto	1,9282 (4,4)	1,9282 (4,4)	1,7674 (4,2)	1,2592 (3,4)	0,7419 (2,4)	0,3439 (1,3)	-0,1344 (-0,7)
Cte. Bus	1,4072 (6,8)	1,4072 (6,8)	1,4750 (7,3)	1,6961 (9,3)	1,9243 (12,0)	2,1016 (14,9)	2,3154 (20,8)
Cte. Metro	-0,3987 (-1,9)	-0,3987 (-1,9)	-0,3329 (-1,7)	-0,1223 (-0,7)	0,0942 (0,6)	0,2620 (1,8)	0,4648 (3,9)
Tiempo	-0,0272 (-9,6)	-0,0272 (-9,6)	-0,0271 (-9,6)	-0,0270 (-9,6)	-0,0270 (-9,6)	-0,0270 (-9,6)	-0,0271 (-9,6)
Costo	-0,0017 (-5,4)						
Costo/Ingreso		-863,26 (-5,4)	-802,84 (-5,3)	-611,17 (-4,6)	-415,48 (-3,8)	-265,11 (-3,1)	-87,497 (-1,9)
log-verosimilitud promedio	-0,8878	-0,8878	-0,8881	-0,8897	-0,8914	-0,8927	-0,8943
VST	**15,8**	**15,8**	**16,9**	**22,1**	**32,5**	**50,9**	**154,9**

3. PLANTEAMIENTO ANALÍTICO DEL PROBLEMA

Los parámetros del modelo Logit se obtienen a través de la maximización las probabilidades de elección de las alternativas elegidas por los individuos (máxima verosimilitud), la que en logaritmo está dada por (3) (Ben-Akiva y Lerman, 1985; Ortúzar y Willumsen, 1994).

$$LL = \sum_q \sum_i \delta_{iq} \ln \frac{e^{V_{iq}}}{\sum_j e^{V_{jq}}} \qquad \delta_{iq} = \begin{cases} 1 & si\ q\ elige\ i \\ 0 & si\ no \end{cases} \tag{3}$$

A partir de las condiciones de primer orden del problema de máxima verosimilitud del Logit, se llega a las ecuaciones (4) a (6) para el caso de Ingreso fijo (1) y (7) a (9) para el de Ingreso variable (2). Las ecuaciones (6) y (9) son las que garantizan que la partición modal observada en la muestra de calibración (lado izquierdo) y la partición modal predicha por el modelo (lado derecho) sean iguales. Asimismo, las ecuaciones (4) y (7), y (5) y (8), indican que la suma de los valores del atributo observado para la alternativa elegida (c/I o t) debe ser igual a la esperanza de la misma variable considerando las probabilidades predichas.

Modelo 1 ($\bar{I}$)

$$\sum_q \sum_i \delta_{iq} \cdot \frac{c_{iq}}{\bar{I}} = \sum_q \sum_i \frac{e^{\alpha_i + \alpha_t t_{iq} + \alpha_c c_{iq}/\bar{I}}}{\sum_j e^{\alpha_j + \alpha_t t_{jq} + \alpha_c c_{jq}/\bar{I}}} \cdot \frac{c_{iq}}{\bar{I}} \tag{4}$$

$$\sum_q \sum_i \delta_{iq} \cdot t_{iq} = \sum_q \sum_i \frac{e^{\alpha_i + \alpha_t t_{iq} + \alpha_c c_{iq}/\bar{I}}}{\sum_j e^{\alpha_j + \alpha_t t_{jq} + \alpha_c c_{jq}/\bar{I}}} \cdot t_{iq} \tag{5}$$

$$\sum_q \delta_{iq} = \sum_q \frac{e^{\alpha_i + \alpha_t t_{iq} + \alpha_c c_{iq}/\bar{I}}}{\sum_j e^{\alpha_j + \alpha_t t_{jq} + \alpha_c c_{jq}/\bar{I}}} \qquad \forall i \tag{6}$$

Modelo 2 (I_q)

$$\sum_q \sum_i \delta_{iq} \cdot \frac{c_{iq}}{I_q} = \sum_q \sum_i \frac{e^{\alpha'_i + \alpha'_t t_{iq} + \alpha'_c c_{iq}/I_q}}{\sum_j e^{\alpha'_j + \alpha'_t t_{jq} + \alpha'_c c_{jq}/I_q}} \cdot \frac{c_{iq}}{I_q} \tag{7}$$

$$\sum_q \sum_i \delta_{iq} \cdot t_{iq} = \sum_q \sum_i \frac{e^{\alpha'_i + \alpha'_t t_{iq} + \alpha'_c c_{iq}/I_q}}{\sum_j e^{\alpha'_j + \alpha'_t t_{jq} + \alpha'_c c_{jq}/I_q}} \cdot t_{iq} \tag{8}$$

$$\sum_q \delta_{iq} = \sum_q \frac{e^{\alpha'_i + \alpha'_t t_{iq} + \alpha'_c c_{iq}/I_q}}{\sum_j e^{\alpha'_j + \alpha'_t t_{jq} + \alpha'_c c_{jq}/I_q}} \qquad \forall i \tag{9}$$

De los sistemas de ecuaciones (4-6) y (7-9) es posible obtener numéricamente los parámetros máximo verosímiles en función de los datos δ_{iq}, c_{iq}, t_{iq}, I_q. Sin embargo, dado que no es posible despejarlos analíticamente, se debe recurrir a herramientas matemáticas para explorar su sensibilidad ante variaciones en los datos, en particular I_q.

Cálculo de la función implícita

Para explorar analíticamente la sensibilidad de los parámetros a la varianza del ingreso, hemos analizado la derivada implícita de los parámetros $\underline{\alpha}'$ con respecto a una perturbación ε que afecta positivamente el ingreso de un individuo y negativamente el de otro, manteniendo así el promedio del ingreso constante. Para asegurar que se trate de un aumento de la varianza, hemos considerado que el primer individuo tiene un ingreso mayor que el segundo (en caso contrario, la perturbación causaría una disminución de la varianza). Para simplificar el problema analítico se usa el logit binomial (solamente dos alternativas) con función de utilidad lineal.

La función de log-verosimilitud (3) se puede escribir como:

$$LL = F = \sum_q \sum_i \delta_{iq}\left(V_{iq} - \ln \sum_k \exp(V_{kq})\right) = \sum_q (\delta_{1q}V_{1q} + \delta_{2q}V_{2q}) - \sum_q \ln(\exp V_{1q} + \exp V_{2q}) \quad (10)$$

y a su vez esta se puede manipular de manera de obtener:

$$LL = F = \sum_q \delta_{1q}(V_{1q} - V_{2q}) - \sum_q Ln(\exp(V_{1q} - V_{2q}) + 1) \quad (11)$$

Dado que la función de utilidad es lineal entonces se puede trabajar directamente con las diferencias de las variables exógenas, por lo que se define:

$$\Delta c_q = c_{1q} - c_{2q};\ \Delta t_q = t_{1q} - t_{2q} \quad (12)$$

Las condiciones de primer orden, con respecto a la constante modal, al parámetro del tiempo y al parámetro del costo, se pueden escribir como se muestra en las ecuaciones (13) a (15).

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = 0 = \sum_q \delta_{1q} - \sum_q P_{1q} \quad (13)$$

$$F_2 = \frac{\partial F}{\partial \alpha_t} = 0 = \sum_q \delta_{1q}\Delta t_q - \sum_q P_{1q}\Delta t_q \quad (14)$$

$$F_3 = \frac{\partial F}{\partial \alpha_c} = 0 = \sum_{q \neq h \wedge j} \delta_{1q}\frac{\Delta c_q}{I_q} - \sum_{q \neq h \wedge j} P_{1q}\frac{\Delta c_q}{I_q} + \delta_{1h}\frac{\Delta c_h}{I_h + \varepsilon} - P_{1h}\frac{\Delta c_h}{I_h + \varepsilon} + \delta_{1j}\frac{\Delta c_j}{I_j - \varepsilon} - P_{1j}\frac{\Delta c_j}{I_j - \varepsilon} \quad (15)$$

Dado que no es posible despejar los parámetros de la función de utilidad desde las condiciones de primer orden, se aplica el teorema de la función implícita con las respectivas consideraciones vectoriales del caso. De esta manera, la variación de los parámetros al perturbar el ingreso de los dos individuos antes mencionados es

$$D\begin{bmatrix}\alpha \\ \alpha_t \\ \alpha_c\end{bmatrix}(\varepsilon) = -\left[D_{(\alpha,\alpha_t,\alpha_c)}F(\varepsilon,\alpha(\varepsilon),\alpha_t(\varepsilon),\alpha_c(\varepsilon))\right]^{-1}\left[D_\varepsilon F(\varepsilon,\alpha(\varepsilon),\alpha_t(\varepsilon),\alpha_c(\varepsilon))\right], \quad (16)$$

donde $\left[D_{(\alpha,\alpha_t,\alpha_c)}F(\varepsilon,\alpha(\varepsilon),\alpha_t(\varepsilon),\alpha_c(\varepsilon))\right]$ corresponde a la matriz hessiana del problema de maximizar la log-verosimilitud, y $\left[D_\varepsilon F(\varepsilon,\alpha(\varepsilon),\alpha_t(\varepsilon),\alpha_c(\varepsilon))\right]$ a la derivada de las condiciones de primer orden con respecto a la perturbación.

Como se trata de un problema de maximización, se espera que la matriz hessiana sea definida negativa, lo que aseguraría la posibilidad de invertirla, y simétrica, dado que la función de log-verosimilitud es dos veces continuamente derivable. Con ello se puede encontrar expresiones para las variaciones de los parámetros al aumentar la varianza del ingreso mediante la perturbación. En el Apéndice se pueden ver los pasos seguidos para obtener esta expresión, y el detalle de la definición de una serie de términos usados para sintetizar las ecuaciones. Las derivadas obtenidas se expresan en las ecuaciones (17) a (19).

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon}|H| = \alpha_c\left(T_2 \cdot C_2 - TC^2\right)\left(\frac{C_h}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{C_j}{(I_j-\varepsilon)}\right) - \alpha_c(T \cdot C_2 - C \cdot TC)\left(\frac{TC_h}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{TC_j}{(I_j-\varepsilon)}\right)$$
$$+\alpha_c(T \cdot TC - C \cdot T_2)\left(\frac{C_{2h}}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{C_{2j}}{(I_j+\varepsilon)}\right) + (T \cdot TC - C \cdot T_2)\left(\frac{(P_{1h}-\delta_{1h})\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon_h)^2} - \frac{(P_{1j}-\delta_{1j})\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)^2}\right) \tag{17}$$

$$\frac{\partial \alpha_t}{\partial \varepsilon}|H| = -\alpha_c(T \cdot C_2 - C \cdot TC)\left(\frac{C_h}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{C_j}{(I_j-\varepsilon)}\right) + \alpha_c\left(N1 \cdot C_2 - C^2\right)\left(\frac{TC_h}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{TC_j}{(I_j-\varepsilon)}\right)$$
$$-\alpha_c(N1 \cdot TC - T \cdot C)\left(\frac{C_{2h}}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{C_{2j}}{(I_j-\varepsilon)}\right) - (N1 \cdot TC - T \cdot C)\left(\frac{(P_{1h}-\delta_{1h})\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon)^2} - \frac{(P_{1j}-\delta_{1j})\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)^2}\right) \tag{18}$$

$$\frac{\partial \alpha_c}{\partial \varepsilon}|H| = \alpha_c(T \cdot TC - C \cdot T_2)\left(\frac{C_h}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{C_j}{(I_j-\varepsilon)}\right) - \alpha_c(N1 \cdot TC - T \cdot C)\left(\frac{TC_h}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{TC_j}{(I_j-\varepsilon)}\right)$$
$$+\alpha_c\left(N1 \cdot T_2 - T^2\right)\left(\frac{C_{2h}}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{C_{2j}}{(I_j-\varepsilon)}\right) + \left(N1 \cdot T_2 - T^2\right)\left(\frac{(P_{1h}-\delta_{1h})\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon)^2} - \frac{(P_{1j}-\delta_{1j})\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)^2}\right) \tag{19}$$

Dado que estas ecuaciones son de difícil interpretación, y sólo se pueden simplificar mediante la realización de varios supuestos, se ha simulado su comportamiento, usando una base de datos ficticia similar a la de las simulaciones antes descritas, pero en este caso restringida a dos alternativas.

Luego de ordenar a los individuos según ingreso (creciente) se evaluó las ecuaciones (17) a (19), que corresponden a las variaciones de los parámetros al disminuir el ingreso de un individuo en ε y aumentar el ingreso del individuo siguiente en la misma cantidad. Lo anterior se realizó para toda la muestra (salvo para el ultimo individuo). Considerando que se trata de una variación infinitesimal, es decir ε igual a 0 en la práctica, se encontró los valores promedio para la variación de los parámetros que se reporta en la Tabla 2.

Tabla 2: Derivadas de los parámetros con respecto ε

$\frac{\partial \alpha'_1}{\partial \varepsilon} = 8{,}21E-02$	$\frac{\partial \alpha'_t}{\partial \varepsilon} = 1{,}62E-04$	$\frac{\partial \alpha'_c}{\partial \varepsilon} = 4{,}34E-01$

Como se puede observar, la variación sobre el parámetro del tiempo es tres órdenes de magnitud menor que la variación del parámetro del costo, lo que implica que el valor del tiempo calculado para la población aumenta. Estos valores de las derivadas son congruentes tanto con la observación empírica que motivó esta investigación como con los resultados a partir de una base simulada, lo que muestra que se trata de un problema estructural.

4. SINTESIS Y CONCLUSIONES

Alguna experiencia empírica sugiere que la especificación del ingreso en la utilidad puede tener un impacto no despreciable sobre la estimación del Valor Subjetivo del Tiempo (VST), razón por la cual en este artículo se ha estudiado el problema de manera controlada. Mediante simulación demostramos que el problema efectivamente existe y que el VST es de una sensibilidad preocupante, ya que especificaciones perfectamente justificables, con datos perfectamente posibles en un caso real, nos llevan a encontrar valores con diferencias de uno a diez, permitiendo una muy fácil manipulación de tales valores.

Luego planteamos el problema en forma analítica a partir de las condiciones de primer orden de la función de máxima verosimilitud, encontrando una expresión para la derivada de los parámetros con respecto a una perturbación del ingreso, que representa un aumento marginal de su varianza. Evaluamos numéricamente esa derivada, encontrando valores compatibles tanto con lo observado empíricamente como con las simulaciones realizadas. Esto confirma que es muy fácil manipular los Valores Subjetivos del Tiempo usando especificaciones en que una de las variables explicativas es dividida por alguna otra variable, o incluso más simple que eso, modificando el nivel de agregación con que se recoge los datos, lo que de hecho influye en la varianza como sucede, por ejemplo, al preguntar ingreso por rango en vez de pedirlo como un número. Cabe hacer notar que el problema ocurrirá con cualquier variable que opere en el denominador de otra.

Como siguiente paso se pretende llegar a una interpretación de las derivadas analíticas al menos para algunos casos particulares, que es algo en lo que ya estamos trabajando, y posteriormente atacar el problema de cuál sería la especificación correcta y cuál la equivocada. Nos gustaría avanzar además en entregar recomendaciones que permitan identificar los casos en que este problema está presente, ya que no parece ocurrir siempre con datos reales. Cabe hacer notar que aquí el problema fue analizado controlando por la existencia de correlación entre variables explicativas. La evidencia empírica disponible (que obviamente es limitada) muestra que si las variables tiempo y costo están correlacionadas, entonces el parámetro del tiempo si se ve afectado al dividir el costo por el ingreso. Esto último, si bien tiene una interpretación intuitiva, podría ser también explicado con las ecuaciones que hemos derivado.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación fue parcialmente financiada por el proyecto Fondecyt 1030694 y por el Núcleo Milenio Sistemas Complejos de Ingeniería. Agradecemos también a Alejandro Jofré y Roberto Cominetti que nos hicieron valiosas sugerencias.

REFERENCIAS

Ben-Akiva, M.E. y Lerman, S. (1985) **Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand**. The MIT press, Cambridge, Mass.

Ortúzar, J. de D. y Willumsen, L.G. (1994) **Modelling Transport.** Second Edition, John Wiley and Sons, Chichester.

APÉNDICE: derivada de $\underline{\alpha}$ con respecto a ε

A continuación se describen los pasos para calcular las derivadas de los parámetros con respecto a la perturbación en el ingreso de dos individuos h y j, donde el primero posee un ingreso superior al segundo. Como se puede apreciar de (16), el cálculo tiene dos pasos fundamentales: primero encontrar la matriz Hessiana e invertirla, y luego encontrar la variación de las condiciones de primer orden representadas por las ecuaciones (13), (14) y (15), al perturbar los ingresos. Dado que la función de Log-verosimilitud es dos veces continuamente diferenciable es posible ver que el Hessiano es simétrico, por lo que se cumple que :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_1\partial\alpha_t}=\frac{\partial F_2}{\partial\alpha_1}=\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_t} \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_1\partial\alpha_c}=\frac{\partial F_3}{\partial\alpha_1}=\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_c} \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_t\partial\alpha_c}=\frac{\partial F_3}{\partial\alpha_t}=\frac{\partial F_2}{\partial\alpha_c} \tag{A.3}$$

Luego, para calcular el Hessiano es necesario calcular las derivadas de (13), (14) y (15) con respecto a los parámetros de la función de utilidad. Esto significa derivar:

1. Con respecto a la CPO de la constante modal (13)

$$\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_1}=-\sum_q P_{1q}\left(1-P_{1q}\right) \tag{A.4}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_t}=-\sum_q P_{1q}\left(1-P_{1q}\right)\Delta t_q \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial\alpha_c}=-\sum_{q\neq h\wedge j} P_{1q}\left(1-P_{1q}\right)\frac{\Delta c_q}{I_q}-P_{1h}\left(1-P_{1h}\right)\frac{\Delta c_h}{\left(I_h+\varepsilon\right)}-P_{1j}\left(1-P_{1j}\right)\frac{\Delta c_j}{\left(I_j-\varepsilon\right)} \tag{A.6}$$

2. Con respecto a la CPO del parámetro del tiempo

$$\frac{\partial F_2}{\partial\alpha_1}=-\sum_q P_{1q}\left(1-P_{1q}\right)\Delta t_q \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial\alpha_t}=-\sum_q P_{1q}\left(1-P_{iq}\right)\left(\Delta t_q\right)^2 \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_c} = -\sum_{q \neq h \wedge j} P_{1q}(1-P_{1q})\Delta t_q \frac{\Delta c_q}{I_q} - P_{1h}(1-P_{1h})\Delta t_h \frac{\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon)} - P_{1j}(1-P_{1j})\Delta t_j \frac{\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)} \tag{A.9}$$

3. Con respecto a la CPO del parámetro del costo partido ingreso.

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha_1} = -\sum_{q \neq h \wedge j} P_{1q}(1-P_{1q})\frac{\Delta c_q}{I_q} - P_{1h}(1-P_{1h})\frac{\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon)} - P_{1j}(1-P_{1j})\frac{\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)} \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha_t} = -\sum_{q \neq h \wedge j} P_{1q}(1-P_{1q})\Delta t_q \frac{\Delta c_q}{I_q} - P_{1h}(1-P_{1h})\Delta t_h \frac{\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon)} - P_{1j}(1-P_{1j})\Delta t_j \frac{\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)} \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha_c} = -\sum_{q \neq h \wedge j} P_{1q}(1-P_{1q})\left(\frac{\Delta c_q}{I_q}\right)^2 - P_{1h}(1-P_{1h})\left(\frac{\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon)}\right)^2 - P_{1j}(1-P_{1j})\left(\frac{\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)}\right)^2 \tag{A.12}$$

Definiciones:

$$N1 \equiv \sum_q P_{1q}(1-P_{1q})$$

$$C_q \equiv P_{1q}(1-P_{1q})\frac{\Delta c_q}{I_q} \quad \forall q \neq h \wedge j; \; C_{2q} \equiv P_{1q}(1-P_{1q})\left(\frac{\Delta c_q}{I_q}\right)^2 \quad \forall q \neq h \wedge j$$

$$C_h \equiv P_{1h}(1-P_{1h})\frac{\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon)}; \; C_{2h} \equiv P_{1h}(1-P_{1h})\left(\frac{\Delta c_h}{I_h+\varepsilon}\right)^2$$

$$C_j \equiv P_{1j}(1-P_{1j})\frac{\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)}; \; C_{2j} \equiv P_{1j}(1-P_{1j})\left(\frac{\Delta c_j}{I_j-\varepsilon}\right)^2$$

$$C \equiv \sum_q C_q; \; C_2 \equiv \sum_q C_{2q} \; ; VC \equiv \sum_q C_q - \sum_q C_{2q}$$

$$T_q \equiv P_{1q}(1-P_{1q})\Delta t_q; \; T_{2q} \equiv P_{1q}(1-P_{1q})(\Delta t_q)^2$$

$$T \equiv \sum_q T_q \; ; T_2 \equiv \sum_q T_{2q}; \; VT \equiv \sum_q T_q - \sum_q T_{2q}$$

$$TC_q \equiv P_{1q}(1-P_{1q})\Delta t_q \frac{\Delta c_q}{I_q} \; \forall q \neq h \wedge j; \; TC_h = P_{1h}(1-P_{1h})\Delta t_h \frac{\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon)}$$

$$TC_j \equiv P_{1j}(1-P_{1j})\Delta t_j \frac{\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)}$$

$$TC \equiv \sum_q TC_q$$

$|H| =$ Determinante de la matriz Hessiana

Usando las definiciones anteriores, se puede expresar las ecuaciones como:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1} = -N1;\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_t} = -T;\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} = -C \tag{A.13}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_t} = -T_2;\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_t} = \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_c} = -TC;\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha_c} = -C_2 \tag{A.14}$$

por lo que la matriz Hessiana es:

$$H = \begin{bmatrix} -N1 & -T & -C \\ -T & -T_2 & -TC \\ -C & -TC & -C_2 \end{bmatrix} \tag{A.15}$$

Tomando en consideración que la matriz inversa se puede expresar como la traspuesta de la matriz adjunta partida por el determinante, se llega a que:

$$H^{-1} = \frac{1}{|H|} \begin{bmatrix} (T_2 \cdot C_2 - TC^2) & -(T \cdot C_2 - C \cdot TC) & (T \cdot TC - C \cdot T_2) \\ -(T \cdot C_2 - C \cdot TC) & (N1 \cdot C_2 - C^2) & -(N1 \cdot TC - T \cdot C) \\ (T \cdot TC - C \cdot T_2) & -(N1 \cdot TC - T \cdot C) & (N1 \cdot T_2 - T^2) \end{bmatrix} \tag{A.16}$$

Con $|H| = -(N1) \cdot T_2 \cdot C_2 - 2 \cdot TC \cdot T \cdot C + T_2 \cdot C^2 + N1 \cdot TC^2 + C_2 \cdot T^2$

Es interesante señalar que (A.13) tiene una forma muy similar a la matriz que se invierte en un problema de regresión lineal, por lo que se podría pensar en algún tipo de relación entre ambas soluciones. Las derivadas de las condiciones de primer orden, (13), (14) y (15) con respecto a la perturbación ε son:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon} = \alpha_c \left[P_{1h}(1 - P_{1h}) \left(\frac{\Delta c_h}{(I_h + \varepsilon)^2} \right) - P_{1j}(1 - P_{1j}) \left(\frac{\Delta c_j}{(I_j - \varepsilon)^2} \right) \right] \tag{A.15}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon} = \alpha_c \left[P_{1h}(1 - P_{1h}) \Delta t_h \frac{\Delta c_h}{(I_h + \varepsilon)^2} - P_{1j}(1 - P_{1j}) \Delta t_j \frac{\Delta c_j}{(I_j + \varepsilon)^2} \right] \tag{A.16}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \varepsilon} = (P_{1h} - \delta_{1h}) \frac{\Delta c_h}{(I_h + \varepsilon)^2} - (P_{1j} - \delta_{1j}) \frac{\Delta c_j}{(I_h - \varepsilon)^2} + \alpha_c \left[P_{1h}(1 - P_{1h}) \frac{(\Delta c_h)^2}{(I_h + \varepsilon)^3} - P_{1j}(1 - P_{1j}) \frac{(\Delta c_j)^2}{(I_j - \varepsilon)^3} \right] \tag{A.17}$$

Utilizando las definiciones antes mencionadas, se llega a:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon} = \alpha_c \left(\frac{C_h}{(I_h + \varepsilon)} - \frac{C_j}{(I_j - \varepsilon)} \right) \tag{A.18}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon} = \alpha_c \left(\frac{TC_h}{(I_h + \varepsilon)} - \frac{TC_j}{(I_j - \varepsilon)} \right) \tag{A.19}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \varepsilon_h} = \left(\frac{(P_{1h} - \delta_{1h})\Delta c_h}{(I_h + \varepsilon_h)^2} - \frac{(P_{1j} - \delta_{1j})\Delta c_j}{(I_j - \varepsilon)^2} \right) + \alpha_c \left(\frac{C_{2h}}{(I_h + \varepsilon_h)} - \frac{C_{2j}}{(I_j + \varepsilon)} \right) \tag{A.20}$$

Y por ultimo al hacer el producto se llega a:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon}|H| = \alpha_c (T_2 \cdot C_2 - TC^2) \left(\frac{C_h}{(I_h + \varepsilon)} - \frac{C_j}{(I_j - \varepsilon)} \right) - \alpha_c (T \cdot C_2 - C \cdot TC) \left(\frac{TC_h}{(I_h + \varepsilon)} - \frac{TC_j}{(I_j - \varepsilon)} \right)$$
$$+ \alpha_c (T \cdot TC - C \cdot T_2) \left(\frac{C_{2h}}{(I_h + \varepsilon)} - \frac{C_{2j}}{(I_j + \varepsilon)} \right) + (T \cdot TC - C \cdot T_2) \left(\frac{(P_{1h} - \delta_{1h})\Delta c_h}{(I_h + \varepsilon_h)^2} - \frac{(P_{1j} - \delta_{1j})\Delta c_j}{(I_j - \varepsilon)^2} \right) \tag{A.21}$$

$$\frac{\partial \alpha_t}{\partial \varepsilon}|H| = -\alpha_c (T \cdot C_2 - C \cdot TC) \left(\frac{C_h}{(I_h + \varepsilon)} - \frac{C_j}{(I_j - \varepsilon)} \right) + \alpha_c (N1 \cdot C_2 - C^2) \left(\frac{TC_h}{(I_h + \varepsilon)} - \frac{TC_j}{(I_j - \varepsilon)} \right)$$
$$- \alpha_c (N1 \cdot TC - T \cdot C) \left(\frac{C_{2h}}{(I_h + \varepsilon)} - \frac{C_{2j}}{(I_j - \varepsilon)} \right) - (N1 \cdot TC - T \cdot C) \left(\frac{(P_{1h} - \delta_{1h})\Delta c_h}{(I_h + \varepsilon)^2} - \frac{(P_{1j} - \delta_{1j})\Delta c_j}{(I_j - \varepsilon)^2} \right) \tag{A.22}$$

$$\frac{\partial \alpha_c}{\partial \varepsilon}|H| = \alpha_c (T \cdot TC - C \cdot T_2) \left(\frac{C_h}{(I_h + \varepsilon)} - \frac{C_j}{(I_j - \varepsilon)} \right) - \alpha_c (N1 \cdot TC - T \cdot C) \left(\frac{TC_h}{(I_h + \varepsilon)} - \frac{TC_j}{(I_j - \varepsilon)} \right)$$
$$+ \alpha_c (N1 \cdot T_2 - T^2) \left(\frac{C_{2h}}{(I_h + \varepsilon)} - \frac{C_{2j}}{(I_j - \varepsilon)} \right) + (N1 \cdot T_2 - T^2) \left(\frac{(P_{1h} - \delta_{1h})\Delta c_h}{(I_h + \varepsilon)^2} - \frac{(P_{1j} - \delta_{1j})\Delta c_j}{(I_j - \varepsilon)^2} \right) \tag{A.23}$$

Luego se debe clarificar o simplificar (obs.: se omite el término del determinante):

$$(H^{-1})_{11} = (T_2 \cdot C_2 - TC^2) \tag{A.24}$$
$$(H^{-1})_{22} = (N1 \cdot C_2 - C^2) \tag{A.25}$$
$$(H^{-1})_{33} = (N1 \cdot T_2 - T^2) \tag{A.26}$$
$$(H^{-1})_{12} = (H^{-1})_{21} = -(T \cdot C_2 - C \cdot TC) \tag{A.27}$$
$$(H^{-1})_{13} = (H^{-1})_{31} = (T \cdot TC - C \cdot T_2) \tag{A.28}$$
$$(H^{-1})_{23} = (H^{-1})_{32} = -(N1 \cdot TC - T \cdot C) \tag{A.29}$$

Una forma posible es asumir que $(H^{-1})_{23} = 0$, esto, por analogía a una formulación de regresión lineal implicaría que la covarianza entre las variables explicativas sea 0. Esto permite modificar algunos términos rescribiéndolos, de esta forma:

$$(H^{-1})_{11} = (T_2 \cdot C_2 - TC^2) = \left(T_2 \cdot C_2 - \frac{T^2}{N1} \frac{C^2}{N1} \right) \tag{A.30}$$

$$(H^{-1})_{22} = (N1 \cdot C_2 - C^2) \tag{A.31}$$

$$\left(H^{-1}\right)_{33} = \left(N1 \cdot T_2 - T^2\right) \tag{A.32}$$

$$\left(H^{-1}\right)_{12} = \left(H^{-1}\right)_{21} = -\left(T \cdot C_2 - C \cdot TC\right) = -\frac{T}{N1}\left(N1 \cdot C_2 - C^2\right) \tag{A.33}$$

$$\left(H^{-1}\right)_{13} = \left(H^{-1}\right)_{31} = \left(T \cdot TC - C \cdot T_2\right) = -\frac{C}{N1}\left(N1 \cdot T_2 - T^2\right) \tag{A.34}$$

$$\left(H^{-1}\right)_{23} = \left(H^{-1}\right)_{32} = 0 \tag{A.35}$$

$$\frac{\partial \alpha_t}{\partial \varepsilon}|H| = \alpha_c\left(N1 \cdot C_2 - C^2\right)\left[\left(\frac{TC_h}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{TC_j}{(I_j-\varepsilon)}\right) - \frac{T}{N1}\left(\frac{C_h}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{C_j}{(I_j-\varepsilon)}\right)\right] \tag{A.36}$$

o bien

$$\frac{\partial \alpha_t}{\partial \varepsilon} = \frac{\alpha_c\left(N1 \cdot C_2 - C^2\right)}{|H|}\left(P_{1h}\left(1-P_{1h}\right)\left(\Delta t_h - \frac{T}{N1}\right)\frac{\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon)^2} - P_{1j}\left(1-P_{1j}\right)\left(\Delta t_h - \frac{T}{N1}\right)\frac{\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)^2}\right) \tag{A.37}$$

Y la variación del coeficiente del costo/ingreso ante la perturbación como

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_c}{\partial \varepsilon}|H| &= \alpha_c\left(N1 \cdot T_2 - T^2\right)\left[\left(\frac{C_{2h}}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{C_{2j}}{(I_j-\varepsilon)}\right) - \left(\frac{C_h}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{C_j}{(I_j-\varepsilon)}\right)\right] \\ &+ \left(N1 \cdot T_2 - T^2\right)\left(\frac{\left(P_{1h}-\delta_{1h}\right)\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon)^2} - \frac{\left(P_{1j}-\delta_{1j}\right)\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)^2}\right)\end{aligned} \tag{A.38}$$

o bien

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_c}{\partial \varepsilon} &= \frac{\alpha_c\left(N1 \cdot T_2 - T^2\right)}{|H|}\left(P_{1h}\left(1-P_{1h}\right)\left(\frac{\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon)} - \frac{C}{N1}\right)\frac{\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon)^2} - P_{1j}\left(1-P_{1j}\right)\left(\frac{\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)} - \frac{C}{N1}\right)\frac{\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)^2}\right) \\ &+ \frac{\left(N1 \cdot T_2 - T^2\right)}{|H|}\left(\frac{\left(P_{1h}-\delta_{1h}\right)\Delta c_h}{(I_h+\varepsilon)^2} - \frac{\left(P_{1j}-\delta_{1j}\right)\Delta c_j}{(I_j-\varepsilon)^2}\right)\end{aligned} \tag{A.39}$$