

---

# **LOCALIZACIÓN MULTIOBJETIVO DE LÍNEAS DE METRO EN CASCOS HISTÓRICOS**

Francisco A. Ortega Riejos

Departamento de Matemática Aplicada I.

Escuela Técnica Superior de Arquitectura. Universidad de Sevilla.

Avenida de la Reina Mercedes, 2. 41012-Sevilla. España. E-mail: [riejos@us.es](mailto:riejos@us.es)

Juan Antonio Mesa López-Colmenar

Departamento de Matemática Aplicada II.

Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. E-mail: [jmesa@us.es](mailto:jmesa@us.es)

Miguel Ángel Pozo Montaño, Gema Ruiz Olmedo

Departamento de Matemática Aplicada I.

Escuela Técnica Superior de Arquitectura. Universidad de Sevilla.

## **RESUMEN**

La eficiencia en el diseño de sistemas urbanos de tránsito rápido tiene un carácter multiobjetivo. Dos criterios independientes se consideran en esta propuesta metodológica para evaluar la dominancia de las posibles alternativas. Uno de los criterios está asociado a la longitud total del túnel (carácter económico, que se pretende minimizar) y el otro, vinculado con la lejanía (radio de seguridad, con el objetivo de su maximización) a los edificios catalogados. Los mejores trazados para una línea subterránea, que cruce el Centro Histórico de Sevilla (España) alejándose de los edificios del Patrimonio histórico-artístico, se determinan sobre los caminos poligonales más eficientes dentro de un diagrama de Voronoi, incorporando las necesarias correcciones en los ángulos para suavizar la transición entre las aristas adyacentes y una limitación para la curvatura en cada codo, con el fin de evitar diseños zigzagueantes.

*Palabras clave:* Diseño de redes, Diagramas de Voronoi, Optimización Multicriterio.

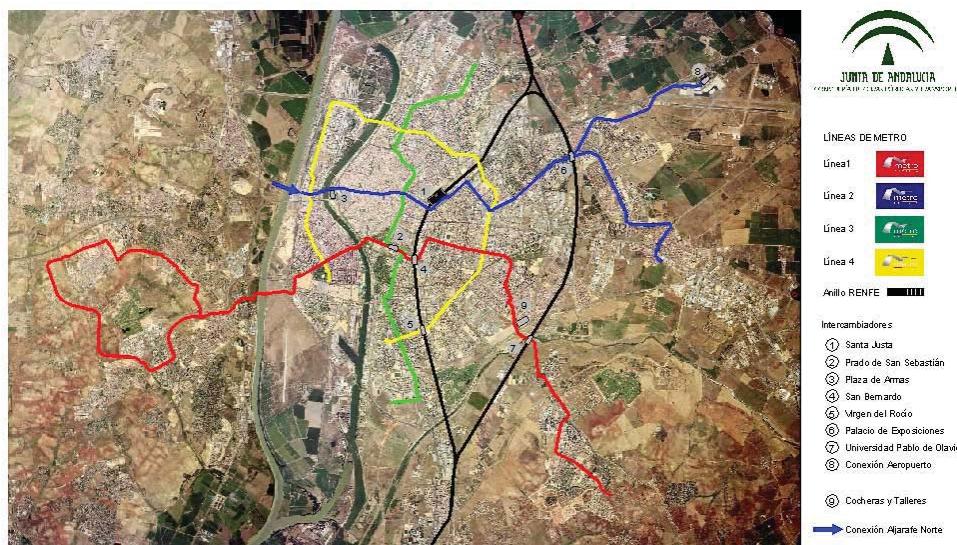
## **ABSTRACT**

Efficiency in the design of rapid transit urban systems has a multi-objective character. Two independent criteria are considered in this methodological approach in order to assess the dominancy of the possible alternatives. One criterion is associated to the total length of the tunnel while the other, security radius, is related to the distancing from the historic buildings. The better designs for an underground line across the Historic Centre of Sevilla (Spain), far from the cultural heritage included in the study zone, are determined along the most efficient polygonal paths inside a Voronoi diagram, adding the necessary modifications at the corners in order to acquire smoothness in the transition between the adjacent edges and a boundary for the corner curvature such that zigzagging designs can be avoided.

*Keywords:* Network Design, Voronoi Diagrams, Multi-criterion Optimization.

## 1. INTRODUCCIÓN

En 1970 la ciudad de Sevilla tenía 548.800 habitantes y esta cifra representaba el 72% de la población total del Área Metropolitana, que ascendía a 756.675 habitantes. Sobre este escenario se planeó la inicial (y fallida) Línea 1 (La Plata- Pino Montano) de la Red de Metro de Sevilla de los años 70, que tenía como objetivo fundamental asegurar el acceso desde los barrios periféricos al casco antiguo, consolidado en aquellos tiempos como el único gran referente comercial de la ciudad (De Justo, 1994). Los desperfectos ocasionados en diversos edificios de carácter histórico-artístico por la construcción del túnel y por la perforación de tres de las estaciones previstas desencadenaron una campaña de opinión pública contraria al metro de Sevilla que concluyó con la paralización total de las obras en 1984. La demanda posterior de viviendas unifamiliares característica de los años 80, motivada por la búsqueda de un entorno de mayor calidad ambiental, produjo la ocupación de la segunda corona metropolitana de Sevilla donde los suelos eran más baratos para una finalidad residencial. Las nuevas infraestructuras de transporte inauguradas para la Exposición Universal de 1992 respaldaron esta apuesta colectiva por la dispersión poblacional. En 2004, la población del área metropolitana había crecido hasta situarse en 1.144.837 habitantes (un aumento del 51% respecto de 1970) mientras que la de la capital se había estabilizado en 704.203 habitantes, un moderado crecimiento del 28 %. Sin embargo, la localización de empleos no siguió un proceso paralelo al de la ocupación residencial, dando lugar a un incremento notable del uso del vehículo privado para los desplazamientos de carácter obligado (trabajo y estudios) centro-periferia (Plan de Transporte Metropolitano del Área de Sevilla, 2006). La Red de Metro proyectada en 2003 (Figura 1), compuesta de cuatro líneas y de la que han ido surgiendo correcciones, extensiones y nuevos añadidos, respondió a la necesidad antes mencionada de servir de puente entre la capital y la corona metropolitana.



**Figura 1: Red de Metro del Área Metropolitana de Sevilla.**

La actual Línea 1 (trazada con color rojo en la Figura 1, excluyendo el lazo añadido posteriormente) es un corredor oeste-este que roza tangencialmente por el sur el centro histórico de Sevilla. Discurre prácticamente en superficie hasta la puerta oeste de Sevilla (apeadero previsto de Blas Infante), ganando a continuación profundidad bajo la Avenida de República Argentina para salvar los aparcamientos subterráneos de Plaza de Cuba y el cauce de la dársena.

El resto del trazado bajo tierra no presenta dificultades técnicas para su ejecución debido a que transita sumergido por amplias calles y, en algunos tramos, aprovecha la infraestructura de túneles ya construida de los años 70.

La Línea 2 del Metro de Sevilla (trazada con color azul en la Figura 1) es también un corredor oeste-este, pero situado más al norte. Se diseñó inicialmente para atravesar el casco histórico de Sevilla, con dos alternativas de finalización: uno de sus dos ramales iría cargado de intencionalidad social, al concluir en el barrio de Torreblanca que lucha por salir de la marginalidad, y otra rama se orientaría hacia el aeropuerto de Sevilla, dotando al sistema de transporte de una deseable vocación de intermodalidad en la conjunción de modos diversos de transporte. Ambos ramales enlazan con el Palacio de Congresos y el intercambiador de Transportes de Santa Justa (tren, autobús y metro), por lo que se puede catalogar a la Línea 2 de una infraestructura de interés estratégico, al igual que ocurre con la Línea 8 del Metro que en Madrid conecta Nuevos Ministerios con el Aeropuerto de Barajas, permitiendo la facturación de equipajes en el corazón mismo de la capital de España.

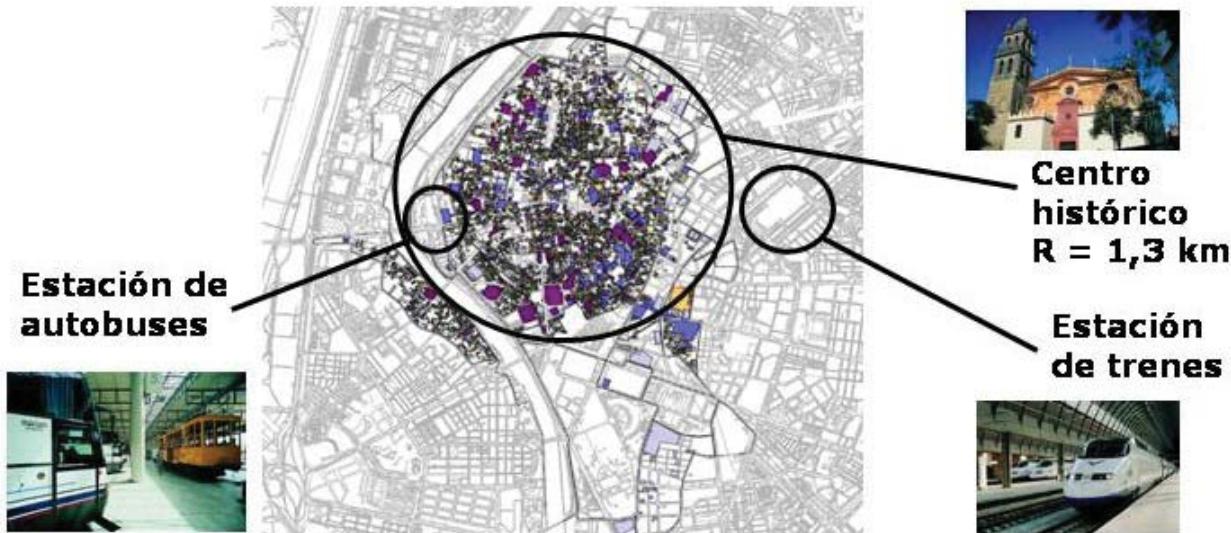
La estrechez de las calles del Centro Histórico de Sevilla, los numerosos codos que se producen en el trazado de sus calles y la existencia de edificios de gran valor histórico-artístico, aconsejan el soterramiento de la Línea 2 en dicha área urbana. La ausencia de calles amplias en todo el ámbito del proyecto impide la aplicación de sistemas de excavación entre pantallas para la construcción de la infraestructura subterránea. Por lo que habría que abordarse la construcción de un túnel urbano de aproximadamente 2500 metros, salvando la dársena y conectando la estación de autobuses de Plaza de Armas con la estación de ferrocarriles de Santa Justa, a partir de donde volvería a discurrir en superficie hasta sus estaciones terminales de Aeropuerto y Torreblanca. Son bien conocidas las ventajas y desventajas asociadas con el trazado profundo de las líneas de transporte masivo. Entre las ventajas está la coherencia del diseño (bajo tierra las distancias vuelven a ser euclídeas, no hay obstáculos ni barreras cuando el presupuesto permite el empleo de la técnica de excavación adecuada) y la evitación de retrasos por yacimientos arqueológicos. Las principales desventajas son el incremento del coste de la construcción y la penalización al acceso de los usuarios durante la fase de explotación.

A pesar de su gran valor estratégico, la construcción de un túnel para la Línea 2 arroja dudas (y temores, reviviendo los que en su día dieron al traste con el anterior proyecto de Metro) sobre la integridad de los setenta y dos edificios catalogados localizados en el casco histórico próximos al trazado (en la Figura 2, son las regiones coloreadas dentro del círculo central). Esta situación de inquietud no es exclusiva de Sevilla. En 2005, diversos edificios de viviendas en el barrio del Carmelo en Barcelona (España) padecieron daños estructurales, debido a la acción de la tuneladora en unas obras de ampliación de la red de metro, obligando a las autoridades a sufragar los gastos originados por el realojo temporal de los vecinos afectados durante semanas. Más recientemente, una plataforma ciudadana ha estado recogiendo firmas para que el trazado subterráneo del tren de alta velocidad (AVE) se aleje del monumento histórico artístico más emblemático de Barcelona, el templo de la Sagrada Familia de Gaudí.

El modelo clásico de transportes de cuatro etapas constituye una herramienta fundamental para la toma de decisiones sobre el trazado de una red y la localización de sus estaciones. Sin embargo, si centramos la atención sobre el tramo que atraviesa el casco histórico podemos afirmar que los submodelos de generación de viajes, distribución reparto modal y asignación de

rutas no son tan determinantes para este contexto específico como lo son en aquellos más generales donde está previsto desarrollar nuevas zonas de actividad con la implantación de la infraestructura. El diseño del trazado se basa en la optimización de dos objetivos: la maximización de la distancia a los edificios históricos y la minimización de la longitud del tramo. Si bien el segundo objetivo se considera habitualmente en los modelos de optimización asociados al diseño de sistemas de tránsito rápido, el primero de ellos representa una contribución al estado del arte de la planificación de estas infraestructuras. La búsqueda de alternativas para el trazado en el experimento computacional de Sevilla ha podido ser exhaustiva, debido a que el tamaño del problema así lo permitía. No obstante, aquellos diseños poligonales que podrían resultar inadecuados por la excesiva agudeza de sus codos son excluidos en la práctica, al incorporar al modelo un criterio de limitación para el valor de la curvatura discreta en términos del peor caso. La comparación de los escenarios resultantes se lleva a cabo mediante técnicas de optimización multicriterio que selecciona sólo los diseños eficientes.

En la sección 2 se introducen los Diagramas de Voronoi, herramienta de la geometría computacional con la que se transforman eficientemente problemas de cobertura continua en problemas discretos sobre grafos. En la sección 3 se describe una construcción geométrica para dotar de suavidad a los trazados poligonales sin violar la restricción de alejamiento respecto de los edificios históricos. La sección 4 se destina a definir la curvatura discreta, así como al análisis de sus propiedades más relevantes. La experiencia computacional aplicada al contexto urbano de Sevilla, usado como ejemplo paradigmático de la metodología expuesta, se expone en la sección 5. Algunas consideraciones finales se incorporan en la sección 6 para completar la discusión.



**Figura 2: Centro Histórico de Sevilla**

## 2. DIAGRAMAS DE VORONOI

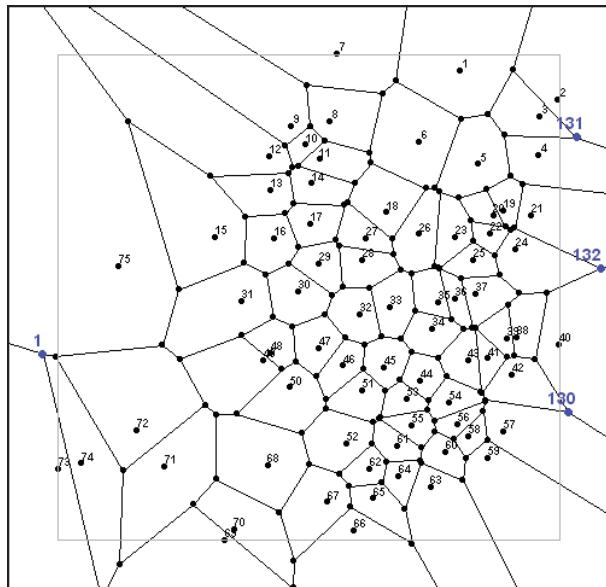
El diagrama de Voronoi es una estructura geométrica que divide al plano en regiones según un concepto previamente establecido de proximidad respecto a un conjunto dado de puntos u objetos (Okabe et al., 1999). En términos coloquiales, se puede afirmar que los diagramas de Voronoi tienen numerosas aplicaciones en diversas áreas que van desde la A (arqueología) hasta la Z

(zoología). En particular, los diagramas de Voronoi son esenciales en la solución de problemas de cobertura de redes de telefonía sin hilos y sensores robóticos, puesto que las aristas de un grafo de Voronoi representan caminos de mínima cobertura (máximo alejamiento) respecto de los puntos generadores (asimilados a puntos de detección de presencia o emisión de señal). En este contexto, es posible aplicar el siguiente resultado, debido a Megerian *et al.* (2005), para detectar las rutas de peor cobertura en redes generales de sensores o, como es el propósito del artículo, para identificar los caminos de mayor alejamiento respecto a los centroides asociados a los edificios históricos.

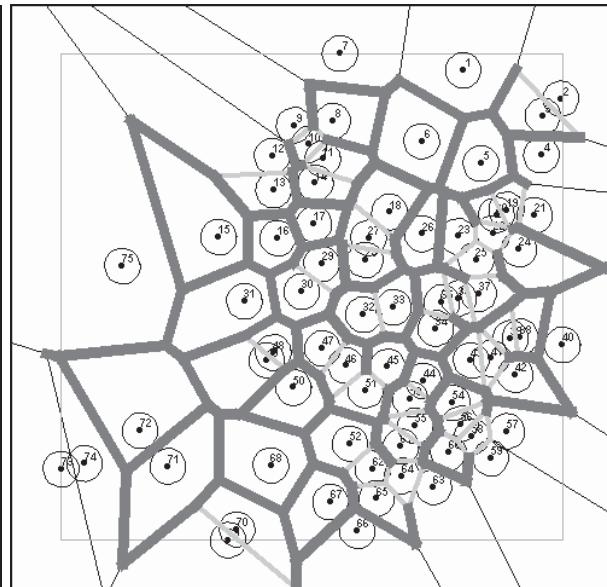
### Teorema 1

*Dado un conjunto existente  $S$  de sensores en el plano y un par de puntos inicio  $I$  y final  $F$ , existe al menos un camino poligonal, conectando ambos puntos, compuesto de segmentos del diagrama de Voronoi generado por  $S$  que maximice la peor cobertura posible desde las localizaciones de los sensores en  $S$ .*

Una vez que se establece un sistema de referencias métrico sobre la zona urbana de estudio y se asignan coordenadas a los centroides asociados a los edificios catalogados, las aristas del grafo de Voronoi obtenido representarán caminos de mínima cobertura (máximo alejamiento respecto al túnel excavado) respecto de los puntos generadores. Con el objetivo de garantizar una correcta orientación inicial del trazado de la Línea 2, se han añadido tres puntos generadores adicionales (etiquetados con los números 73, 74 y 75 en la Figura 3). De esta forma, las soluciones que se obtengan serán caminos cuyo primer nodo sea la estación de autobuses de Plaza de Armas (el nodo del diagrama etiquetado 1 en la Figura 3).



**Figura 3: Diagrama de Voronoi de los 72 edificios catalogados en el Centro de Sevilla.**



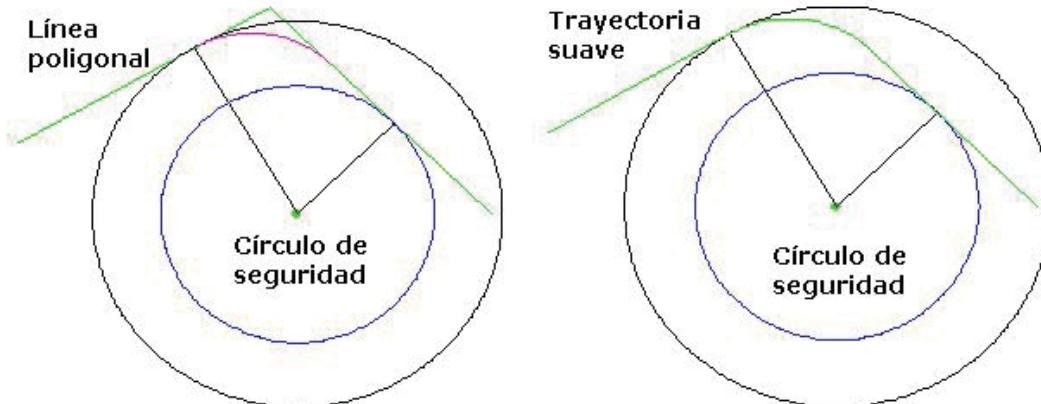
**Figura 4: Grafo de factibilidad para un radio de seguridad de 80 metros.**

Puesto que el modelo geométrico asociado a las plantas de los edificios no es puntual en realidad, establecemos un radio medio de seguridad de 80 metros en torno a cada centroide. Asumamos que un círculo de seguridad contenga a cualquiera de los edificios considerados; en caso

contrario, bastará con aumentar el valor del radio sin que la validez del razonamiento se vea mermada. Aquellas aristas que violen la distancia de seguridad respecto a los centroides deberán eliminarse del diagrama de Voronoi. Como es lógico, la posibilidad de generar un grafo de componentes no conexas es mayor cuanto mayor sea el radio de seguridad que se establezca. Para el valor considerado (80 m de radio, un círculo de 20106 m<sup>2</sup>) resulta el grafo  $G = (V, E)$  de segmentos factibles mostrado en la Figura 4, compuesto de 132 vértices. En la Figura 4 se han marcado con trazo grueso oscuro las aristas que se mantuvieron por encima de la distancia de seguridad establecida para todo el colectivo de centroides. El grafo de factibilidad  $G$  será el escenario donde determinar las mejores rutas entre el nodo origen (etiquetado 1 en la Figura 3) y los tres posibles nodos finales (etiquetados 130, 131 y 132 en la Figura 3).

### 3. SUAVIZACIÓN DEL ALINEAMIENTO POLIGONAL

Puesto que el trazado de la línea subterránea se determina sobre la base de los caminos poligonales más eficientes dentro del grafo factible  $G$  en el diagrama de Voronoi, es necesario incorporar las necesarias correcciones en los ángulos para suavizar la transición entre las aristas adyacentes. Una forma de adquirir la necesaria suavidad en el trazado, requerida en las trayectorias de las líneas férreas, es reemplazando las esquinas del camino poligonal por arcos de circunferencia sin que con ello se viole la distancia de seguridad previamente establecida en torno a los edificios protegidos (Figura 5). Este sencillo método, menos sofisticado que una interpolación basada en curvas de Bezier o en splines cúbicos, garantiza que el camino discurre respetando el nivel de seguridad establecido.



**Figura 5: Rediseño de un codo en el alineamiento poligonal.**

### 4. CURVATURA DISCRETA DE UN ALINEAMIENTO

Los actuales modelos de optimización aplicados al diseño de sistemas de transporte público coinciden en afirmar su carácter multiobjetivo (Laporte et al., 2000). En este particular escenario, además de una restricción para la longitud total del camino, es recomendable una limitación para la curvatura en cada codo, con el fin de evitar diseños zigzagueantes.

La *curvatura*  $\kappa(s)$  en un punto de una curva regular plana  $R(s)=(x(s),y(s))$ , descrita por su vector de posición con respecto a su parámetro natural  $s$ , es el módulo de su vector normal  $N(s)$ , obtenido mediante la doble derivación de su expresión vectorial (Bradley y Smith, 1998):

$$\kappa(s) = \|N(s)\| = \frac{d^2 R(s)}{ds^2} = (x''(s), y''(s)). \quad (1)$$

La naturaleza lineal de un alineamiento poligonal (la segunda derivada es siempre nula) establece que esta noción de curvatura no sea útil para la evaluación de un posible efecto de zigzag o de retroceso en el diseño del camino poligonal. La definición dada por Laporte *et al.* (2004) de *curvatura discreta* se basa en la cuantificación del ángulo interno  $\alpha_i$  en el vértice  $P_i$  de la línea poligonal que conecta una secuencia de tres puntos  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$ .

### Definición 1.

Dada una secuencia de tres puntos  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  conectados mediante la poligonal que genera un ángulo  $\alpha_i$  en el vértice  $P_i$ , se define la curvatura discreta asociada al vértice  $P_i$  como el valor de la expresión:

$$\kappa(i-1, i, i+1) \equiv \kappa_i = |\tan(\frac{\alpha_i}{2} + \frac{\pi}{2})| \quad (2)$$

Sus propiedades básicas son:

- Propiedad 1:  $\kappa_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \pi$ . La curvatura es nula cuando la terna  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  está perfectamente alineada.
- Propiedad 2:  $\kappa_i = \infty \Leftrightarrow \alpha_i = 0$ . La curvatura es infinita si la terna  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  presenta un retroceso máximo.
- Propiedad 3:  $\kappa_i$  toma siempre valores no negativos y su expresión se incrementa continuamente en relación al alejamiento del ángulo  $\alpha_i$  respecto a  $\pi$ .

## 5. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO Y RESULTADOS

En la planificación de sistemas de tránsito rápido, los escenarios se determinan habitualmente en base a la localización de los mejores alineamientos que conecten un conjunto de importantes estaciones  $S = \{s_1, \dots, s_N\}$  previamente fijadas. Si el escenario se limita a un único alineamiento  $A$ , el objetivo principal consiste en maximizar la población cubierta por la línea, sujeto a la condición de que cada vértice  $s_i$  esté sobre el camino  $A$ , junto a otras restricciones adicionales como la existencia de un límite superior para su longitud (coste) total o la necesidad de respetar un espaciamiento entre estaciones adyacentes dentro de un intervalo preestablecido. Este problema ha sido tratado profusamente en la literatura, empleando diferentes conceptos de cobertura, formulados en términos geométricos y recogiendo las preferencias de viaje expresadas por los potenciales usuarios mediante las matrices O-D (Mesa y Ortega, 2001).

Como se ha señalado, el Centro Histórico de Sevilla es un área circular de radio 1,3 km, compuesto de calles estrechas homogéneamente distribuidas en cuanto a densidad de población, sedes de entidades públicas y privadas, centros comerciales y otros puntos de interés. Por consiguiente, toda esta área central se puede considerar como un único nodo atractor-generador de viajes en el seno del mapa metropolitano. Así pues, el interés prioritario usual, dirigido hacia la localización de las estaciones para la línea de metro que lo atraviese, puede supeditarse frente a

otros criterios como son la maximización de la distancia del trazado respecto a los edificios catalogados y la minimización de la longitud del alineamiento entre las dos puertas de acceso al centro consideradas debido a su carácter intermodal.

### Formulación teórica del problema de diseño:

Dado el grafo de factibilidad  $G(r)=(V(r),E(r))$  resultante de eliminar en el diagrama de Voronoi, generado por una colección de centroides  $P$ , todas las aristas que violen la restricción de  $r$  metros de alejamiento respecto a  $P$ , determinar los alineamientos Pareto-óptimos que conecten un par de vértices origen (nodo 1, estación de autobuses Plaza de Armas) y final (cualquiera de los nodos 130, 131 o 132, cercanos a la estación de trenes Santa Justa) para los dos criterios:

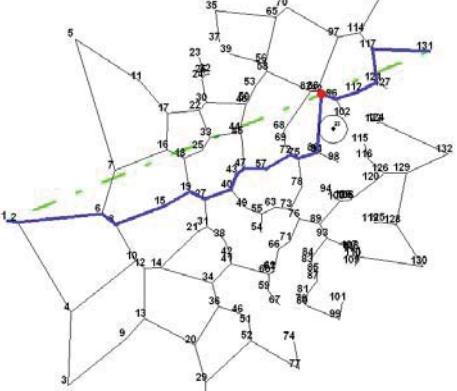
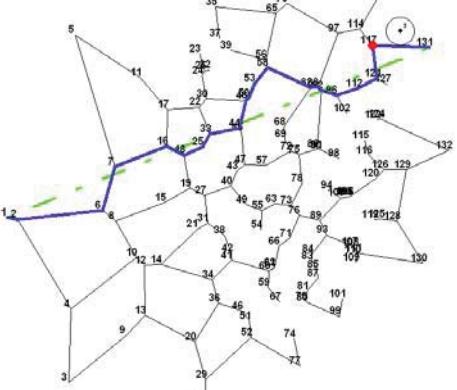
- Minimizar la longitud total de la línea en esta zona.
- Maximizar la distancia de seguridad del peor caso.

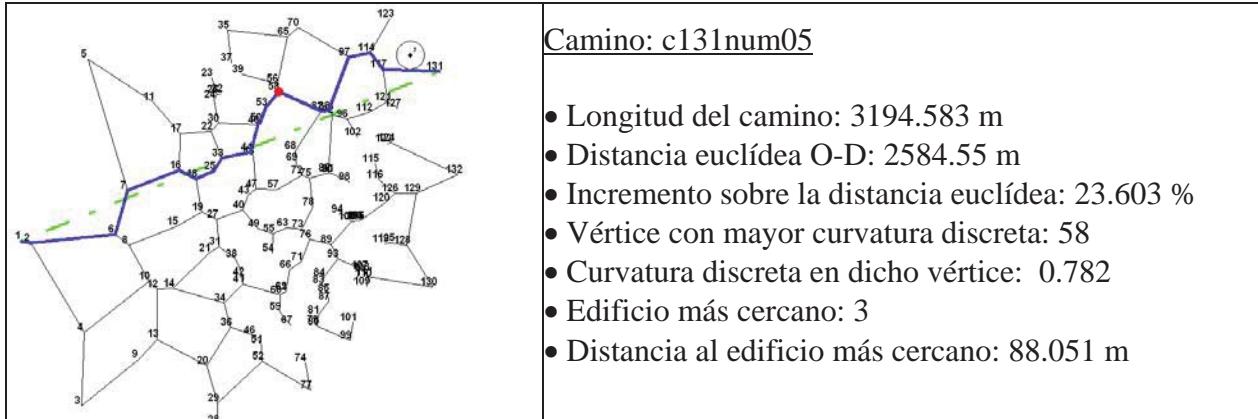
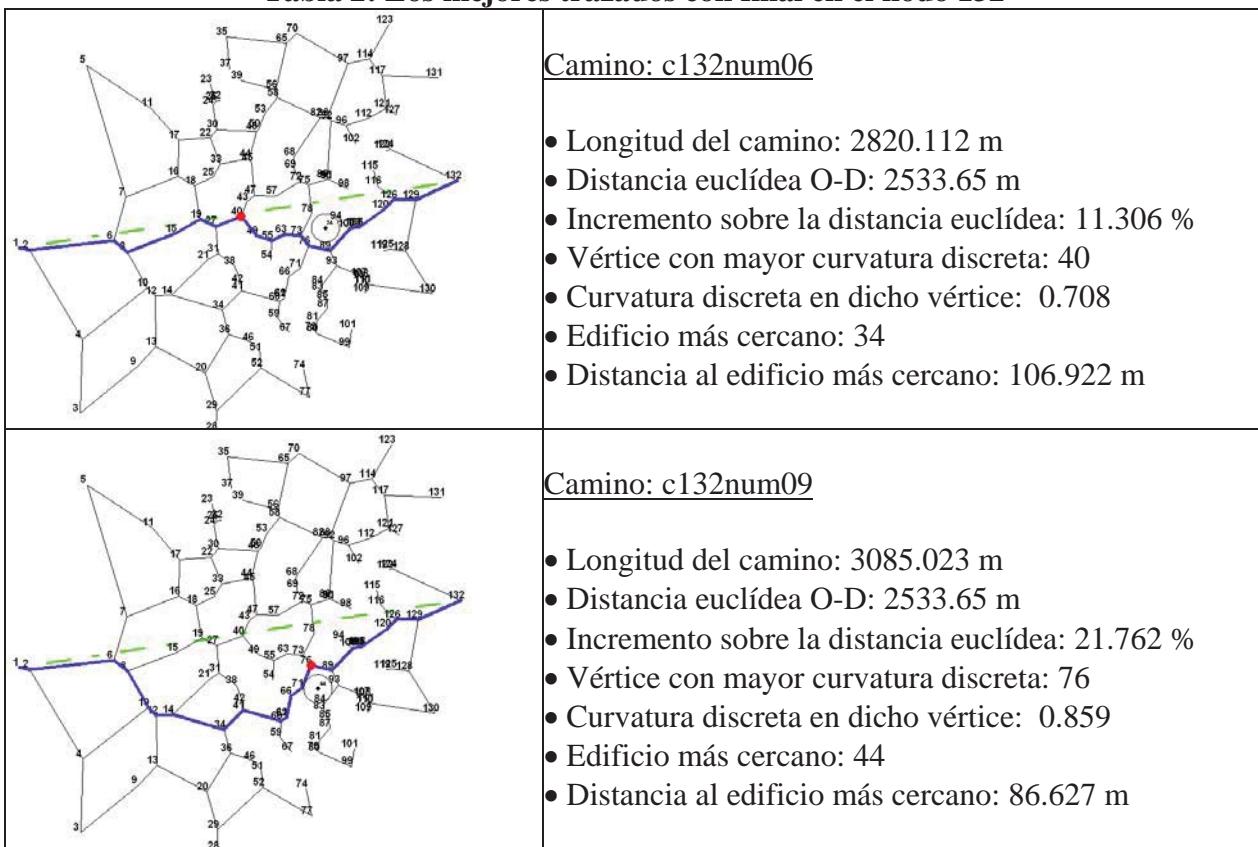
En caso de empate, el menor valor de la máxima curvatura discreta decidirá la mejor opción.

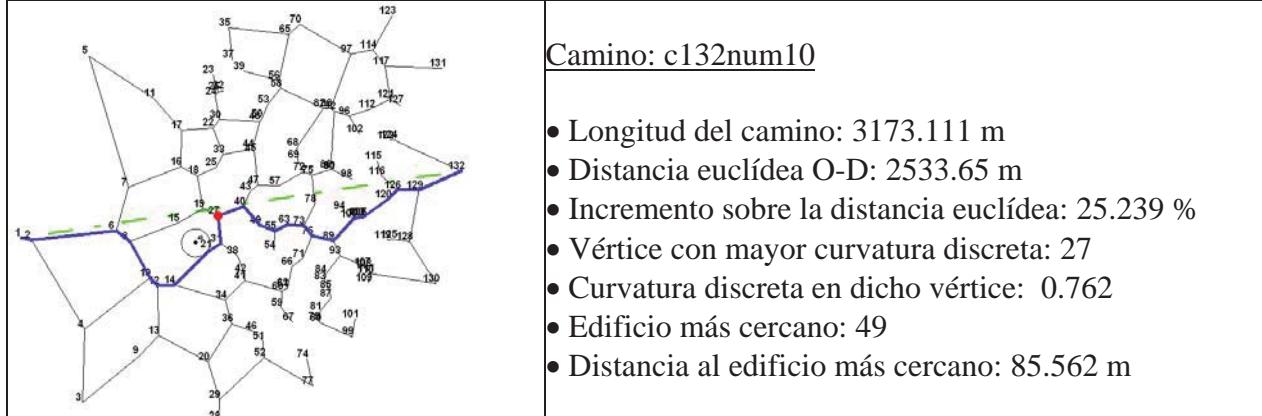
### Experiencia computacional:

La metodología descrita en el artículo ha sido aplicada para determinar los trazados Pareto-óptimos del tramo de la proyectada Línea 2 del Metro de Sevilla que atraviesa el Centro Histórico. Los resultados obtenidos se han clasificado según el nodo de finalización, dando lugar a tres tablas que incluyen las tres mejores opciones para los dos criterios considerados. Las características de cada solución se explicitan junto a su correspondiente trazado.

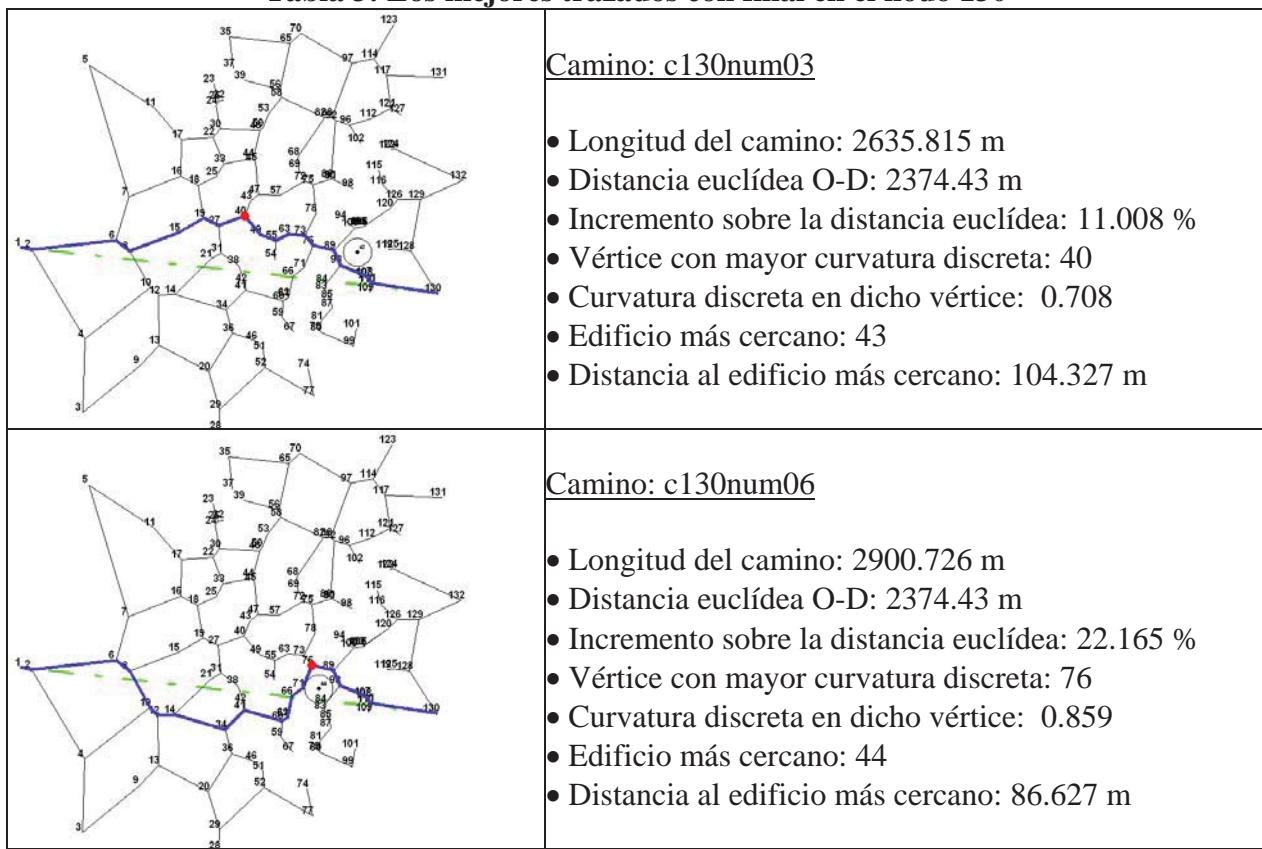
**Tabla 1: Los mejores trazados con final en el nodo 131**

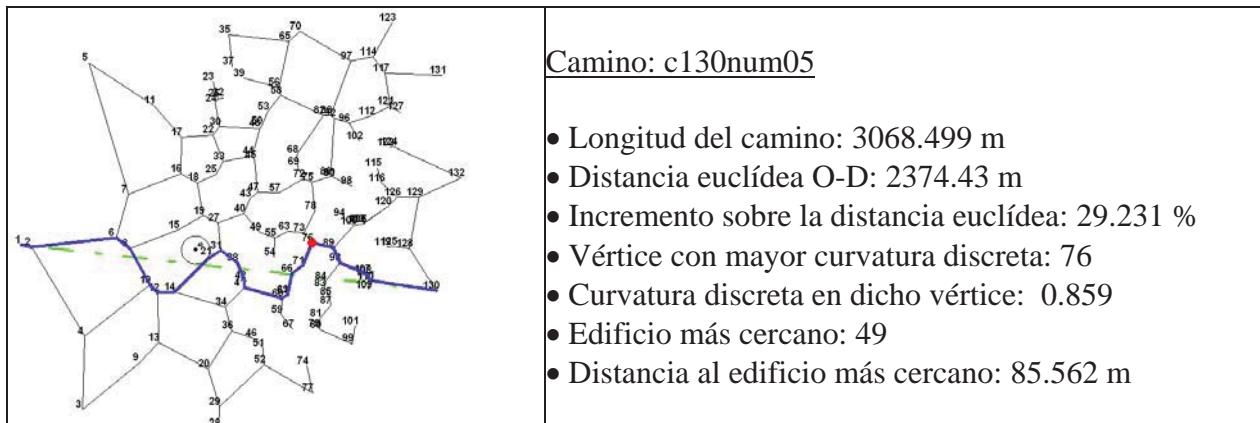
	<p><b>Camino: c131num17</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Longitud del camino: 3134.808 m</li> <li>• Distancia euclídea O-D: 2584.55 m</li> <li>• Incremento sobre la distancia euclídea: 21.29 %</li> <li>• Vértice con mayor curvatura discreta: 92</li> <li>• Curvatura discreta en dicho vértice: 1.271</li> <li>• Edificio más cercano: 23</li> <li>• Distancia al edificio más cercano: 80.687 m</li> </ul>
	<p><b>Camino: c131num06</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Longitud del camino: 3176.752 m</li> <li>• Distancia euclídea O-D: 2584.55 m</li> <li>• Incremento sobre la distancia euclídea: 22.91 %</li> <li>• Vértice con mayor curvatura discreta: 117</li> <li>• Curvatura discreta en dicho vértice: 1.189</li> <li>• Edificio más cercano: 3</li> <li>• Distancia al edificio más cercano: 88.051 m</li> </ul>

**Tabla 2: Los mejores trazados con final en el nodo 132**

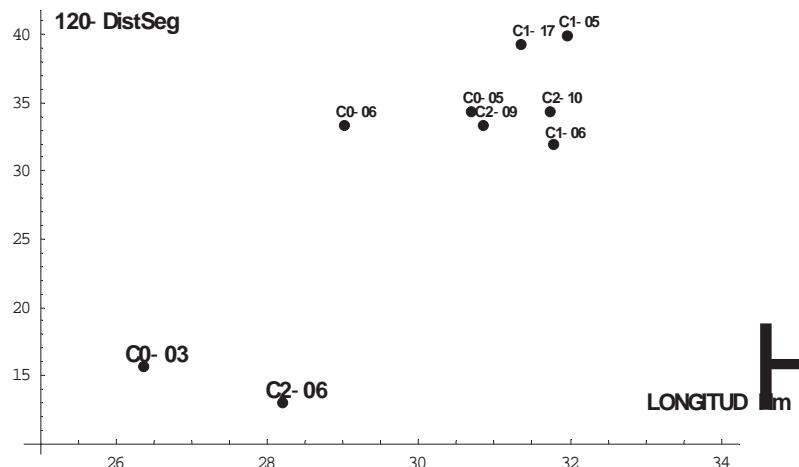


**Tabla 3: Los mejores trazados con final en el nodo 130**





Para apreciar mejor visualmente la dominancia de los puntos eficientes en el plano bicriterio, la longitud de los trazados se expresan en hectómetros y las mínimas distancias entre los caminos y los edificios históricos se complementan respecto a 120 metros. De esta forma, las direcciones de mejora en los criterios son ambas descendentes, tanto para el eje de abscisas (longitud del trazado poligonal) como para el de ordenadas (que recoge la diferencia entre 120 m y la mínima distancia entre los edificios y la perforación).



**Figura 6: Eficiencia de los puntos en el plano bi-criterio.**

Entre todas las opciones analizadas, sólo los caminos etiquetados c132num06 y c132num03 son Pareto-óptimos. La eficiencia de tales alineamientos puede apreciarse en la Figura 6, comprobando que los rectángulos, cuyos vértices opuestos son el origen de coordenadas y el punto asociado a la valoración de los criterios considerados, no contiene puntos en su interior (Cohon, 1978). Los trazados c130num03 y c132num06, identificados como los más eficientes, se muestran en las Figuras 7 y 8, respectivamente.



**Figura 7: Trazado eficiente C0-03.**



**Figura 8: Trazado eficiente C2-06.**

## 6. CONSIDERACIONES FINALES.

Otra cuestión inherente a los problemas de diseño del trazado de líneas de metro en los cascos históricos es la localización y la arquitectura de las estaciones más profundas. El acceso desde la superficie hasta la estación subterránea requiere una perforación vertical de un determinado radio, así como características específicas que sólo es posible realizar desde puntos concretos del viario que no presenten obstáculos (bloques de vivienda, salidas de garajes, pasillos de evacuación ante emergencias, etc.). Las dos redes planas (una red subterránea deseable y otra red superficial de accesos posibles) deben encontrar aristas verticales de conexión para, conjuntamente, generar un escenario real, factible y eficiente. Si todas las opciones de interés en el trazado subterráneo discurrieran bajo calles o plazas cuya estrechez imposibilitara la conexión con superficie, una ineludible operación de *aclarado urbano* habría de acometerse para garantizar la utilidad de la infraestructura.

## AGRADECIMIENTOS

Este artículo ha sido patrocinado por los Proyectos de Investigación 70029/T05 del Ministerio de Fomento y MAT2006-15054 del Ministerio de Educación y Ciencia del Gobierno de España.

## REFERENCIAS

- Bradley, G.L. y K.J. Smith (1998) **Cálculo de Varias Variables. Volumen II.** Prentice Hall Iberia, Madrid.
- Cohon, J. L. (1978) **Multiobjective Programming and Planning.** Academic Press, New York.
- De Justo Alpañés, J. L. (1994) **Pasado y Futuro del Metro de Sevilla.** Publicaciones de la Universidad de Sevilla (ISBN 84-472-0179-1).

Laporte G., J.A. Mesa y F.A. Ortega (2000) Optimization methods for the planning of rapid transit systems. **European Journal of Operational Research**, Vol. 122, 1-10.

Laporte G., J.A. Mesa y F.A. Ortega (2004) Generación de Alineamientos no Zigzagueantes de Máxima Cobertura de Viaje en el Diseño de Sistemas Urbanos de Transporte. **Actas del VI Congreso de Ingeniería del Transporte**. Publicaciones Universidad de Zaragoza (ISBN 84-609-1362-7), 703-710. Zaragoza, España.

Mesa J.A. y F.A. Ortega (2001) Park-and-Ride Station Catchment Areas in Metropolitan Rapid Transit Systems. **Mathematical Methods on Optimization in Transportation Systems**. Kluwer Academic Publishers. Vol. 29, 81-93.

Megerian, S., F. Koushanfar, M. Potkonjaj y M.B. Srivastava (2005) Worst and Best-Case Coverage in Sensor Networks. **IEEE Transactions on Mobile Computing**, Vol. 4 (1), 84-92.

Okabe, A., B. Boots, K. Sugihara y S.N. Chiu (1999) **Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams**. 2nd. Edition, John Wiley and Sons.