

---

## ESTRATEGIA INTEGRADA DE ASIGNACIÓN DE FLOTA EN UN CORREDOR DE TRANSPORTE PÚBLICO

Alejandro Tirachini, Cristián E. Cortés y Sergio Jara-Díaz

Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile

Casilla 228-3, Santiago, Chile

Fono: (56 2) 978 43 80; Fax: (56 2) 689 42 06

E-mail: [atirachi@ing.uchile.cl](mailto:atirachi@ing.uchile.cl), [ccortes@ing.uchile.cl](mailto:ccortes@ing.uchile.cl), [jaradiaz@ing.uchile.cl](mailto:jaradiaz@ing.uchile.cl)

### RESUMEN

La demanda de sistemas de transporte público urbano exhibe puntas temporales y espaciales que pueden hacer inefficiente operar con la misma oferta en toda la red y a lo largo del día, lo que puede ser resuelto mediante frecuencias diferenciadas en el tiempo o en el espacio. En el caso de una línea dada, el problema espacial requiere aumentar la frecuencia en aquellos grupos de paraderos con mayor afluencia de pasajeros, dividiendo la flota. En este trabajo se desarrolla un modelo analítico de aplicación integrada de las estrategias *bucles* y *deadheading* para un corredor aislado de buses, ilustrado con aplicaciones. Las variables a optimizar son las frecuencias de servicio (tanto en la zona de alta demanda como fuera de ésta), de naturaleza continua, y las estaciones de inicio y término de los vehículos que ejecutan la estrategia, decisiones discretas. Se demuestra que, aunque en algunos casos se pueden encontrar formas algebraicas cerradas para las frecuencias óptimas, similares a la clásica “fórmula de la raíz cuadrada”, en general la solución conjunta de frecuencias y paraderos debe obtenerse mediante métodos numéricos.

*Palabras clave:* transporte público, estrategias óptimas, nivel de servicio.

### ABSTRACT

Urban transit demand exhibits peaks in time and space, which can make inefficient an invariant transport supply during the day or within the network. This can be solved by means of different fleets (frequency) in time and space. For a transit line, a spatial demand pattern with peaks could be served increasing frequencies in those groups of stops with larger passenger inflow. In this paper we develop a model that integrates short turns and deadheading for an isolated transit line, where the variables to be optimized are both of a continuous and discrete nature: frequencies within and outside the high demand zone, and the stations where the strategy begins and ends. We show that closed solutions can be obtained for frequencies in some cases, which resembles the classical “square root rule”. In most cases, however, optimal frequencies and bus stops locations have to be found numerically.

*Keywords:* public transport, optimal strategies, level of service.

## 1. INTRODUCCIÓN

La demanda de transporte público urbano presenta picos temporales y espaciales que podrían hacer ineficiente operar con la misma oferta en toda la red y a lo largo del día. En períodos punta suele observarse asimetría en la demanda en los corredores radiales de transporte público urbano, con una gran afluencia de pasajeros en un sentido (hacia la zona céntrica en la punta mañana, por ejemplo) y baja en el otro. Podría mejorarse la calidad de servicio y/o disminuirse el costo de operación imponiendo que ciertos vehículos, al llegar al terminal del sentido de mayor afluencia, regresen sin servir el sentido contrario, aumentando así la frecuencia en la dirección de mayor flujo y disminuyéndola en el sentido contrario, estrategia conocida como *deadheading*. También es usual en los corredores de transporte público encontrar perfiles con una baja carga de pasajeros en torno a un terminal y con puntas pronunciadas en torno a importantes centros atractores y/o generadores de viajes como el *Central Business District*, CBD. En estos casos puede ser útil que algunos vehículos sirvan sólo la zona más cargada, aumentando la frecuencia mediante ciclos cortos o bucles. Furth y Day (1984) describen en detalle estas y otras estrategias.<sup>1</sup>

En este trabajo se desarrolla un modelo para la aplicación integrada de las estrategias *deadheading* y bucles, con el fin de disminuir el costo total de operadores y usuarios en un corredor de transporte público. Luego de revisar brevemente los antecedentes sobre ambas estrategias, en la sección siguiente se define la estrategia integrada, desarrollada en la Sección 3 e ilustrada numéricamente en la Sección 4. Conclusiones y extensiones se entregan en la Sección 5.

La optimización de la operación sin estrategias de una línea de transporte público es abordada por Mohring (1972, 1976), Jansson (1980, 1984), Oldfield y Bly (1988) y Jara-Díaz y Gshwender (2003a) entre otros, usando una línea cíclica de largo  $L$ . En los modelos de demanda fija o paramétrica, la función objetivo es minimizar la suma de los costos del operador y de los usuarios (valor de tiempos de acceso, espera y viaje).

*Deadheading* como estrategia pre-planificada ha sido abordada en un grupo reducido de trabajos. Furth (1985) considera que la estrategia disminuye tanto el costo de los operadores, por ahorro en el tamaño de flota, como el costo de los usuarios, específicamente el tiempo de espera. Tres funciones objetivo son exploradas: minimización del tamaño de flota con una condición de intervalo máximo admisible; minimización del tiempo de espera para un tamaño de flota fijo y minimización de la suma de los costos del operador y usuarios. Ceder y Stern (1981) y Ceder (2003a, 2004) estudian la inserción de un viaje vacío entre dos terminales (*deadheading trip*) buscando reducir el tamaño de flota necesario para cumplir con una programación dada de las salidas desde terminales.

Furth (1987) estudia la aplicación de la estrategia bucles de forma que la frecuencia de los vehículos que realizan un bucle (en adelante, vehículos B) sea un múltiplo de la frecuencia de los vehículos que sirven la ruta completa (en adelante, vehículos A), analizando dos objetivos: minimizar el tamaño de flota (o maximizar el intervalo) y minimizar el tiempo de espera para un tamaño de flota fijo suponiendo que la estrategia no afecta el tiempo en movimiento. Ceder (1989, 2003b) nuevamente busca minimizar el tamaño de flota en una primera etapa, a través de

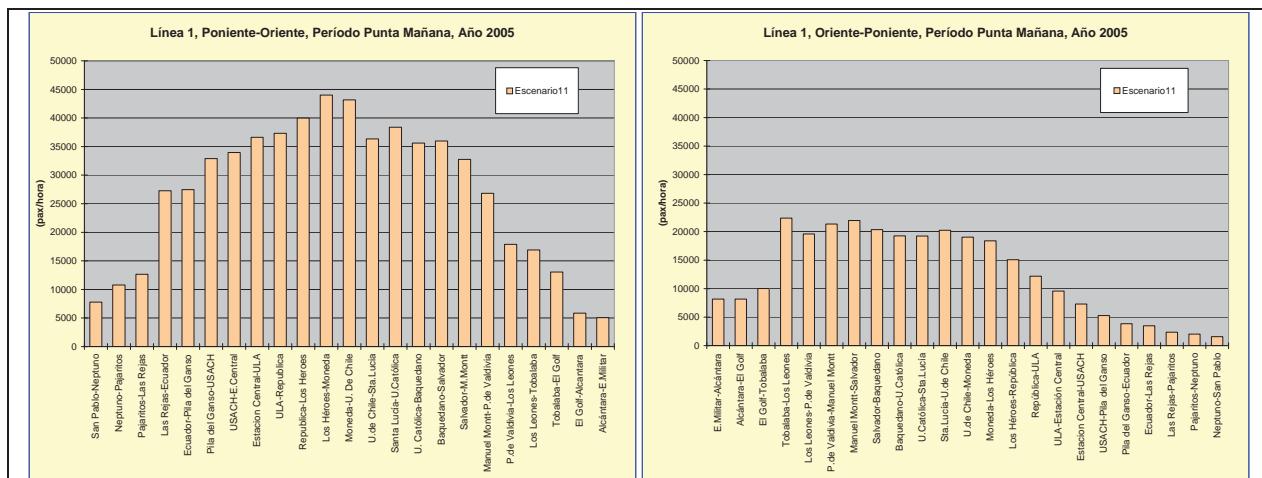
---

<sup>1</sup> Estrategias como *deadheading*, bucles y servicios expresos también pueden ser empleadas para mitigar problemas causados por cambios inesperados en el perfil de demanda o incidentes disruptivos (Eberlein *et al.* 1998,1999).

la inserción de viajes en *deadheading* y ciclos cortos para algunos vehículos, con el objeto de proveer una frecuencia suficiente para satisfacer la carga en cada segmento de la línea. En una segunda etapa se minimiza el número de viajes que realiza el bucle conservando el tamaño de flota mínimo encontrado en la primera etapa, con el fin de disminuir el efecto de la estrategia en el tiempo de los usuarios, quienes se ven afectados por la reducción de la flota.. El trabajo más completo es el de Delle Site y Fillipi (1998), en el cual se considera la operación de un bucle en un esquema multiperíodo para los casos de demanda elástica e inelástica. Se extiende el análisis de Furth al caso de arribo aleatorio de vehículos a las estaciones. Las variables son la posición de los puntos de retorno del bucle, la frecuencia, el tamaño de los vehículos (tratado paramétricamente) y la tarifa en el caso de demanda elástica. La complejidad de los modelos desarrollados no permite obtener soluciones analíticas y son resueltos numéricamente. Comparan la estrategia bucles con una operación normal no optimizada; la estrategia resulta aplicable sólo a períodos en que la demanda tiene picos pronunciados (períodos punta), reduciendo el costo fijo de los operadores (por menor tamaño de flota) e incrementando el costo variable de operación.

## 2. LA ESTRATEGIA INTEGRADA DEADHEADING-BUCLES

En corredores de transporte público reales se encuentran situaciones diversas, en que por ejemplo en un sentido la demanda es superior a la del otro pero además se observan concentraciones en zonas particulares, que podrían incluso no coincidir entre los dos sentidos de operación, es decir, situaciones “mixtas” en las cuales no es claro qué estrategia aplicar.

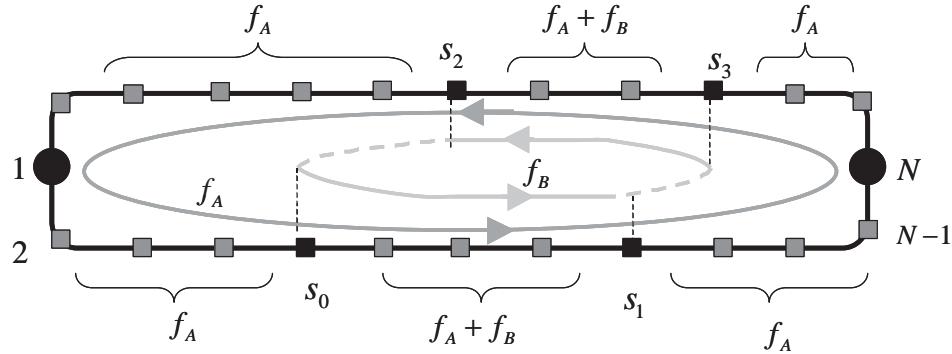


(Fuente: [www.transantiago.cl](http://www.transantiago.cl))

Figura 1: Perfil de carga, simulación en Línea 1, Metro de Santiago

En la Figura 1 (Línea 1 del Metro de Santiago), se observa que en el sentido Poniente-Oriente la carga está concentrada entre las estaciones Las Rejas y Pedro de Valdivia y en el sentido Oriente-Poniente los puntos de inflexión deberían ser las estaciones Tobalaba y Los Héroes. En este caso podría estudiarse una estrategia en la cual una flota sirve el corredor de punta a punta como es tradicional mientras otro grupo de vehículos inicia el servicio en Las Rejas y lo termina en Pedro de Valdivia en el sentido Poniente-Oriente, entre Pedro de Valdivia y Tobalaba viaja sin servicio de pasajeros haciendo *deadheading*, retoma el servicio en el sentido Oriente-Poniente entre Tobalaba y Los Héroes, y de ahí circula sin pasajeros hasta Las Rejas para iniciar un nuevo ciclo.

Tal estrategia que combina bucles y *deadheading* será denominada **estrategia integrada**, la que requiere definir cuatro estaciones relevantes para la flota B que ejecuta la estrategia:  $s_0$  y  $s_1$  marcan el inicio y el término del servicio en el sentido 1, reiniciado en el sentido 2 en la estación  $s_3$  y finalizado en  $s_2$ , como se ilustra en la Figura 2. En el ejemplo anterior,  $s_0$  es Las Rejas,  $s_1$  es Pedro de Valdivia,  $s_2$  es Los Héroes y  $s_3$  es Tobalaba, sin considerar posibles restricciones físicas.



**Figura 2: Esquema de operación de la estrategia integrada *deadheading-bucle*.**

En el presente trabajo se analiza una ruta o corredor lineal de transporte público de demanda entre paraderos conocida. Número y ubicación de los paraderos no son modificados, por lo cual el tiempo de acceso se excluye de la modelación. Siguiendo la Figura 2 se considera dos terminales en los extremos y dos sentidos opuestos de operación (denotados con los índices 1 y 2), en que los usuarios llegan aleatoriamente a las estaciones, supuesto razonable para servicios con intervalos menores a 10 minutos (Seddon y May, 1974; Danas, 1980). Se supondrá que los intervalos entre vehículos son aleatorios bajo un proceso Poisson, característico de sistemas con alta variabilidad en los tiempos en movimiento, como aquellos que comparten el derecho de vía con otros modos, e.g. automóvil, o sobre los cuales se ejerce escaso control en cuanto a sus tiempos de viaje y detenciones. En este caso, el tiempo de espera medio es igual a la esperanza del intervalo<sup>2</sup>. Se consideran  $N$  estaciones y  $N-1$  tramos por sentido. Se asumirán conocidos: la matriz origen-destino (OD) con elementos  $\lambda_{kl}$  [pax/h] representando la tasa de viajes entre estaciones  $k$  y  $l$ ; el tiempo en movimiento en servicio normal entre las estaciones  $k$  y  $k+1$ ,  $R_k$  [min]; y el tiempo marginal de subida de pasajeros,  $b$  [seg/pax].  $R_k$  incluye los tiempos de aceleración y frenado en paraderos además de los tiempos muertos. Por simplicidad se asume que en la operación de transferencia de pasajeros en paraderos, el efecto dominante es la subida por sobre la bajada, por lo tanto en la modelación se considera sólo este primer fenómeno, a través de  $b$ <sup>3</sup>. A partir de la tasa de viajes entre estaciones se definen las tasas de subida y bajada de pasajeros en la estación  $k$ ,  $\lambda_k^+$  y  $\lambda_k^-$ :

- $\lambda_k^+(l_1, l_2) = \sum_{l=l_1}^{l_2} \lambda_{kl}$ : para viajes con destino entre las estaciones  $l_1$  y  $l_2$  inclusive.
- $\lambda_k^-(l_1, l_2) = \sum_{l=l_1}^{l_2} \lambda_{lk}$ : para viajes con origen entre las estaciones  $l_1$  y  $l_2$  inclusive.

<sup>2</sup> El caso de un sistema que funciona con intervalos regulares entre los vehículos se analiza en Tirachini (2007)

<sup>3</sup> Este supuesto es plausible en vehículos que operan con subida y bajada simultánea de pasajeros; generalmente la operación más lenta es la subida, si el pasajero debe subir peldaños y/o pagar la tarifa al ingresar al vehículo.

- $\lambda_k^{1+} \equiv \lambda_k^+(k+1, N) = \sum_{l=k+1}^N \lambda_{kl}$      $\lambda_k^{1-} \equiv \lambda_k^-(1, k-1) = \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_{lk}$  : para viajes en sentido 1.
- $\lambda_k^{2+} \equiv \lambda_k^+(1, k-1) = \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_{kl}$      $\lambda_k^{2-} = \lambda_k^-(k+1, N) = \sum_{l=k+1}^N \lambda_{lk}$  : para viajes en sentido 2

### 3. FUNCIONES DE COSTO Y OPTIMIZACIÓN DE VARIABLES

Para el **costo de los usuarios**, se considera el **costo asociado al tiempo de espera** ( $C_e$ ) como el producto entre el tiempo total de espera y el valor del tiempo de espera de los usuarios ( $P_e$ ). Recordando que el intervalo entre vehículos es el inverso de la frecuencia y reconociendo que la demanda total es la suma de la afluencia de pasajeros a cada paradero, en cada sentido, en operación normal  $C_e$  resulta ser:

$$C_e = P_e \left[ \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k^{1+}}{f} + \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k^{2+}}{f} \right] \quad (1)$$

donde  $f$  es la frecuencia de operación en régimen. Al aplicarse la estrategia los usuarios observan frecuencias distintas en función del origen y el destino de sus viajes. Aquellos cuyo viaje está comprendido entre las estaciones  $s_0$  y  $s_1$  en el sentido 1, o entre  $s_2$  y  $s_3$  en el sentido 2 observan una frecuencia  $f_A + f_B$ , mientras a los demás sólo les sirve los vehículos de la flota A. Luego el costo con estrategia,  $C_e^{db}$ , es:

$$\begin{aligned} C_e^{db} = P_e & \left\{ \sum_{k=1}^{s_0-1} \frac{\lambda_k^{1+}}{f_A} + \sum_{k=s_0}^{s_1-1} \left( \frac{\lambda_k^+(k+1, s_1)}{f_A + f_B} + \frac{\lambda_k^+(s_1+1, N)}{f_A} \right) + \sum_{k=s_1}^N \frac{\lambda_k^{1+}}{f_A} + \sum_{k=s_3+1}^N \frac{\lambda_k^{2+}}{f_A} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=s_2+1}^{s_3} \left( \frac{\lambda_k^+(1, s_2-1)}{f_A} + \frac{\lambda_k^+(s_2, k-1)}{f_A + f_B} \right) + \sum_{k=1}^{s_2} \frac{\lambda_k^{2+}}{f_A} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Por otra parte, el tiempo de viaje  $t_{kl}$  entre cada par OD ( $k,l$ ) se calcula como

$$t_{kl} = \begin{cases} \sum_{i=k}^{l-1} \left( R_i + b \frac{\lambda_i^{1+}}{f} \right) & \text{si } k < l \\ \sum_{i=l+1}^k \left( R_{i-1} + b \frac{\lambda_i^{2+}}{f} \right) & \text{si } l < k \end{cases} \quad (3)$$

Multiplicando (3) por la demanda de viajes en el par OD ( $k,l$ ),  $\lambda_{kl}$  y sumando sobre todos los pares OD se obtiene el tiempo de viaje total, el que ponderado por el valor del tiempo de viaje ( $P_v$ ) provee el **costo asociado al tiempo en el vehículo** en operación normal. Analíticamente,

$$C_v = P_v \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{l=k+1}^N \left[ \sum_{i=k}^{l-1} \left( R_i + b \frac{\lambda_i^{1+}}{f} \right) \right] \lambda_{kl} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} \left[ \sum_{i=l+1}^k \left( R_{i-1} + b \frac{\lambda_i^{2+}}{f} \right) \right] \lambda_{kl} \right\} \quad (4)$$

La formulación se complica bastante en la situación con estrategia, pues un viaje puede abarcar zonas en que los usuarios se suben a los vehículos a tasas  $\lambda_i^+/f_A$  o  $\lambda_i^+/(f_A + f_B)$ . Así, el costo asociado al tiempo de viaje al aplicar la estrategia tiene la forma

$$C_v^{db} = 2 \sum_{k=1}^{N-1} R_k + b \frac{g_5^{db}(\vec{s})}{f_A + f_B} + b \frac{g_6^{db}(\vec{s})}{f_A} \quad (5)$$

donde las funciones  $g_i^{db}(\vec{s})$  agrupan términos de segundo orden de las tasas de viaje  $\lambda_{kl}$  como función de  $\vec{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ . Su definición detallada puede encontrarse en Tirachini (2007).

En cuanto al **costo del operador**  $C_o$  se consideran dos componentes, ya que algunos ítems de la función de costos del operador quedan mejor representados en una base temporal (salarios) y otros en una base espacial (consumo de combustible, mantenimiento, etc.). Además, tal como proponen Jansson (1980) y Oldfield y Bly (1988) se utilizará una dependencia lineal en la capacidad de los vehículos  $K$  para las funciones de costo unitario,  $c(K)$  para el costo por vehículo-hora (expresado en [\$/veh-h]) y  $c'(K)$  para el costo por vehículo-kilómetro (expresado en [\$/veh-km]). Analíticamente

$$c(K) = c_0 + c_1 K \quad c'(K) = c'_0 + c'_1 K \quad (6)$$

$$C_o = c(K)F + c'(K)vF \quad (7)$$

donde  $v$  es la velocidad comercial de operación y  $F$  representa el tamaño de flota. Este último se calcula como el producto entre la frecuencia de operación y el tiempo de ciclo  $t_c$  (considerando tanto el tiempo en movimiento como el que se ocupa en paraderos durante la transferencia de pasajeros). Así, (7) puede ser expresado como función de  $t_c$  y  $f$  como se detalla en (8) y (9), donde  $L$  denota el largo del corredor:

$$C_o = c(K)f t_c + 2c'(K)f L \quad (8)$$

$$C_o = f \left\{ c(K) \left[ \sum_{k=1}^{N-1} \left( R_k + b \frac{\lambda_k^{1+}}{f} \right) + \sum_{k=2}^N \left( R_{k-1} + b \frac{\lambda_k^{2+}}{f} \right) \right] + 2c'(K)L \right\} \quad (9)$$

Para determinar el costo del operador al aplicar la estrategia, se estudia separadamente las flotas A y B. Para el caso de la flota A, se debe considerar dos grupos de pasajeros abordando los vehículos a tasa  $\lambda_i^+/f_A$  o a tasa  $\lambda_i^+/(f_A + f_B)$  según sea el caso, lo cual afecta el tiempo de ciclo.

Considerando además que el costo de los vehículos que realizan *deadheading* es de la forma (6), es decir,

$$c_{dh}(K) = c_{0dh} + c_{1dh} K \quad (10)$$

los costos de operación para las flotas A y B son respectivamente:

$$\begin{aligned} C_{oA}^{db} &= f_A \left\{ c(K) \left[ \sum_{k=1}^{s_0-1} \left( R_k + b \frac{\lambda_k^{1+}}{f_A} \right) + \sum_{k=s_0}^{s_1-1} \left( R_k + b \left\{ \frac{\lambda_k^+(k+1, s_1)}{f_A + f_B} + \frac{\lambda_k^+(s_1+1, N)}{f_A} \right\} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=s_1}^{N-1} \left( R_k + b \frac{\lambda_k^{1+}}{f_A} \right) + \sum_{k=s_3+1}^N \left( R_{k-1} + b \frac{\lambda_k^{2+}}{f_A} \right) + \sum_{k=s_2+1}^{s_3} \left( R_{k-1} + b \left\{ \frac{\lambda_k^+(1, s_2-1)}{f_A} + \frac{\lambda_k^+(s_2, k-1)}{f_A + f_B} \right\} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sum_{k=2}^{s_2} \left( R_{k-1} + b \frac{\lambda_k^{2+}}{f_A} \right) \right] + 2c'(K)L \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} C_{oB}^{db} &= f_B \left\{ c(K) \left[ \sum_{k=\min(s_0, s_2)}^{\max(s_0, s_2)-1} R_k + \sum_{k=s_0}^{s_1-1} \left( R_k + b \frac{\lambda_k^+(k+1, s_1)}{f_A + f_B} \right) + \sum_{k=\min(s_1, s_3)}^{\max(s_1, s_3)-1} R_k + \sum_{k=s_2+1}^{s_3} \left( R_{k-1} + b \frac{\lambda_k^+(s_0, k-1)}{f_A + f_B} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ c(K) \frac{s_1 - s_0 + s_3 - s_2}{N-1} + c_{dh}(K) \frac{|s_2 - s_0| + |s_3 - s_1|}{N-1} \right] L \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

La flota B opera en *deadheading* entre  $s_0$  y  $s_2$  y entre  $s_1$  y  $s_3$ , y en servicio desde  $s_0$  a  $s_1$  en el sentido 1, y desde  $s_3$  a  $s_2$  en el sentido 2. El costo total del operador es la suma de (11) y (12).

De las expresiones anteriores, es posible calcular tanto el costo total en operación normal como con estrategia. Para encontrar el valor óptimo de las variables continuas ( $f$  y  $K$  en operación normal,  $f_A$ ,  $f_B$  y  $K$  en operación con estrategia) se aplican condiciones de primer orden (CPO). La capacidad de los buses se estima a partir de la demanda en el tramo más cargado obtenido de la matriz OD, definiendo un factor de seguridad  $\eta$ ,  $K = q_{\max}/\eta f$ . Para operación normal resulta

$$f^* = \sqrt{\frac{P_e \left( \sum_{k=1}^N \lambda_k^{1+} + \sum_{k=1}^N \lambda_k^{2+} \right) + P_v b \left( \sum_{k=1}^N \sum_{l=k+1}^N \lambda_{kl} \sum_{i=k}^{l-1} \lambda_i^{1+} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_{kl} \sum_{i=l+1}^k \lambda_i^{2+} \right) + c_1 \frac{q_{\max}}{\eta} b \left( \sum_{k=1}^N \lambda_k^{1+} + \sum_{k=1}^N \lambda_k^{2+} \right)}{2 \left( c_0 \sum_{k=1}^{N-1} R_k + c_0' L \right)}} \quad (13)$$

frecuencia óptima que emula la clásica *fórmula de la raíz cuadrada* de los modelos microeconómicos de transporte público de demanda agregada (Mohring, 1972; Jansson, 1980; Jara-Díaz y Gshwender, 2003a), pero en su versión desagregada. Con estrategia integrada

$$\begin{aligned}
C_t^{db}(f_A, f_B, K, \vec{s}) = & f_A \left\{ c(K) \left( g_0^{db} + b \frac{g_1^{db}(\vec{s})}{f_A + f_B} + b \frac{g_2^{db}(\vec{s})}{f_A} \right) + 2c^*(K)L \right\} + \\
& + f_B \left\{ c(K) \left( g_3^{db}(\vec{s}) + b \frac{g_1^{db}(\vec{s})}{f_A + f_B} \right) + \left[ c^*(K) \frac{s_1 - s_0 + s_3 - s_2}{N-1} + c_{dh}^*(K) \frac{|s_2 - s_0| + |s_3 - s_1|}{N-1} \right] L \right\} \\
& + P_e \left( \frac{g_1^{db}(\vec{s})}{f_A + f_B} + \frac{g_2^{db}(\vec{s})}{f_A} \right) + P_v \left( g_4^{db} + b \frac{g_5^{db}(\vec{s})}{f_A + f_B} + b \frac{g_6^{db}(\vec{s})}{f_A} \right)
\end{aligned} \tag{14}$$

Las CPO no arrojan expresiones cerradas para  $f_A^*$  y  $f_B^*$ . En el caso particular en que el costo del operador no depende de la capacidad  $K$ , esto es cuando  $c(K) = c$ ,  $c^*(K) = c_0^*$  y  $c_{dh}^*(K) = c_{dh}^*$  es posible obtener valores analíticos para las frecuencias óptimas condicionales en  $\vec{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ , presentadas en las ecuaciones (15) y (16); el análisis de segundo orden permite demostrar que corresponden a un mínimo global de  $C_t^{db}(f_A, f_B, \vec{s})$ ,  $\forall (f_A, f_B) \in \square^2_+$ :

$$f_A^*(\vec{s}) = \sqrt{\frac{P_e g_2^{db}(\vec{s}) + P_v b g_6^{db}(\vec{s})}{c(g_0^{db} - g_3^{db}(\vec{s})) + c^* \left( 2 - \frac{s_1 - s_0 + s_3 - s_2}{N-1} \right) L - c_{dh}^* \frac{|s_2 - s_0| + |s_3 - s_1|}{N-1} L}} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
f_B^*(\vec{s}) = & \sqrt{\frac{P_e g_1^{db}(\vec{s}) + P_v b g_5^{db}(\vec{s})}{c g_3^{db}(\vec{s}) + c^* \frac{s_1 - s_0 + s_3 - s_2}{N-1} L + c_{dh}^* \frac{|s_2 - s_0| + |s_3 - s_1|}{N-1} L}} - \\
& - \sqrt{\frac{P_e g_2^{db}(\vec{s}) + P_v b g_6^{db}(\vec{s})}{c(g_0^{db} - g_3^{db}(\vec{s})) + c^* \left( 2 - \frac{s_1 - s_0 + s_3 - s_2}{N-1} \right) L - c_{dh}^* \frac{|s_2 - s_0| + |s_3 - s_1|}{N-1} L}}
\end{aligned} \tag{16}$$

Luego se debe evaluar la función objetivo  $C_t^{db}(f_A^*(\vec{s}), f_B^*(\vec{s}), \vec{s}) \equiv \bar{C}_t^{db}(\vec{s})$  para todos las combinaciones posibles y seleccionar aquel conjunto  $\vec{s}^* = (s_0^*, s_1^*, s_2^*, s_3^*) / \vec{s}^* = \arg \min_{\vec{s}} \bar{C}_t^{db}(\vec{s})$ .

La expresión (15) es análoga a la frecuencia óptima en el caso de operación normal (expresión 13), pero considerando solamente las estaciones que están fuera del bucle (cuya demanda está representada por las funciones  $g_2^{db}$  y  $g_6^{db}$ ). Por otro lado, el primer término de (16) corresponde exactamente a la frecuencia óptima para servir el bucle (forma idéntica a 13), luego, a tal frecuencia hay que restarle aquella que ya provee la flota A,  $f_A$  (segundo término en 16) para obtener la frecuencia extra que debe aplicarse en el bucle, es decir,  $f_B^*(\vec{s})$ . Al ser cuatro el número de estaciones a encontrar en el problema, el conjunto factible de soluciones tiene cardinal  $N^2(N-1)^2/4$ . A modo de ejemplo, la línea de la Figura 1 tiene 24 estaciones, lo que representa 76176 combinaciones posibles de  $s_0, s_1, s_2$  y  $s_3$ . Sin embargo, un adecuado preprocesamiento del

diagrama de carga permite acotar el espacio de elección de las estaciones relevantes. Así, en el ejemplo de la Figura 1 se puede pronosticar que  $s_0$  está entre Las Rejas y Pila del Ganso (3 estaciones),  $s_1$  entre Salvador y Pedro de Valdivia (3),  $s_2$  entre Los Héroes y Universidad de Santiago (5) y  $s_3$  debiese ser Tobalaba pues en esa estación se produce un gran salto en la carga, generando 45 opciones con el consiguiente ahorro en tiempo computacional.

## 5. APLICACIÓN

En esta sección se muestra una aplicación numérica usando los datos de la Figura 3.

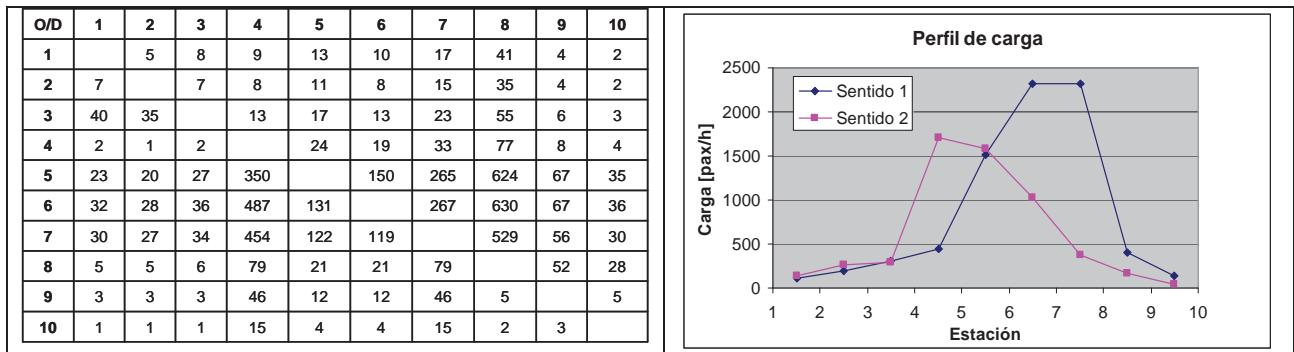


Figura 3: Matriz O/D [pax/h] y perfil de carga.

El valor asignado a los parámetros es el siguiente:  $R_k = 0.8 \text{ min}$  y  $R_k^* = 0.45 \text{ min} \forall k$ ,  $L=4 \text{ km}$ ,  $P_e=2700 \text{ [$/h]}$ ,  $P_v=900 \text{ [$/h]}$ ,  $c_0 = 1800 \text{ [$/h]}$ ,  $c_1 = 0.5 \text{ [$/h-cupo]}$ ,  $c_0^* = 400 \text{ [$/km]}$ ,  $c_1^* = 1 \text{ [$/h-cupo]}$ ,  $c_{0dh}^* = 300 \text{ [$/km]}$ ,  $c_{1dh}^* = 0.5 \text{ [$/km-cupo]}$ ,  $b=5 \text{ [s/pax]}$  y  $\eta=0.9$ . Con tales valores, el resultado señala que en el óptimo se debe operar con un bucle entre las estaciones 4 y 8, con ahorros en los costos totales de un 8.0% (Tabla 1). Es decir, a pesar de existir una carga baja entre las estaciones 4 y 5 en el sentido 1 y entre las estaciones 7 y 8 en el sentido 2, la estrategia de todos modos considera tales segmentos y los beneficia con una frecuencia mayor. Sin embargo, el resultado depende del valor adoptado de los parámetros que definen el problema. Con otros valores para los parámetros (en particular, el valor de los parámetros que hacen la diferencia entre operar en servicio y operar haciendo *deadheading*) es posible que cambie la configuración de los segmentos en los que realiza servicio la flota B. Así, si el costo de operación en *deadheading* disminuye lo suficiente (de 300 a 180), la configuración de la estrategia se ve modificada, tal como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1: Resultados aplicación estrategia integrada

$c_{0dh}^*$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	Operación	$C_e$ [\$/min]	$C_v$ [\$/min]	$C_o$ [\$/min]	$C_t$ [\$/min]	$\Delta C_e$	$\Delta C_v$	$\Delta C_o$	$\Delta C_t$
300	4	8	4	8	Normal	3327	4944	6838	15109	-2.2%	-12.0%	-7.8%	-8.0%
					Estrategia	3254	4349	6304	13907				
180	5	8	4	7	Normal	3327	4944	6838	15109	-1.0%	-12.2%	-8.4%	-8.0%
					Estrategia	3294	4341	6263	13898				

En la primera fila de la Tabla 1 se reporta el caso inicial, con un costo fijo de operación de  $c_{0dh} = 300$  \$/bus-km, es decir, un 75% del costo en servicio. Cuando el costo  $c_{0dh}$  disminuye a 180 [\$/bus-km] cambia la configuración de la estrategia, haciendo que la flota B en el sentido 2 realice servicio sólo hasta la estación 7 y luego haga *deadheading* de la 7 a la 8 para retomar el servicio en el sentido inverso, mientras en el lado 1 el servicio empieza sólo en la estación 5. Notar que la configuración  $s_0=5$ ,  $s_1=8$ ,  $s_2=4$  y  $s_3=7$  no se modificará incluso si se sigue reduciendo el valor de  $c_{0dh}$  desde 180, pues de acuerdo a la Figura 3 es en estos segmentos donde esta concentrada la carga. Los resultados muestran que, sin embargo, recién cuando el costo fijo de realizar *deadheading* es la mitad que su homólogo en operación normal, la formulación empieza a proponer vehículos realizando *deadheading* (saltos de estaciones). Cuando el costo de realizar *deadheading* es similar al costo de operar normalmente, el modelo sugiere que en el óptimo es preferible operar con un bucle (más ancho), pues el ahorro en costo operacional de saltarse las zonas de baja carga es superado por el costo que significa para estos usuarios ser servidos por una frecuencia menor,  $f_A$ . El ahorro porcentual de un 8% en el costo total hace la estrategia atractiva para su aplicación en un corredor con estas características. Notar que se producen ahorros en las tres componentes de la función de costos, es decir, a pesar de producirse beneficios en el costo de los usuarios a través de un ahorro en el tamaño de flota, los usuarios en promedio también son beneficiados.

## 6. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

En este artículo se reporta un modelo analítico general para el estudio de una estrategia integrada de asignación de flota en sistemas de transporte público urbano, cuyo objetivo es minimizar la suma de costos de operadores y usuarios distribuyendo la oferta de transporte de manera más eficiente a través de un aumento de la frecuencia de operación en las zonas de mayor demanda por viajes. En general, la literatura ha enfatizado el uso de estrategias para disminuir el tamaño de flota, es decir, considerando sólo los costos de operación.

Desde el punto de vista analítico se pueden reconocer varios aportes al estado del arte en este tema. Primero, se ha considerado una representación más estricta de la función de costos del operador, incluyendo componentes por tiempo y distancia. Con respecto a la aplicación óptima de la estrategia, se muestra que cuando fue posible obtener una expresión analítica para las frecuencias óptimas, resultan expresiones del tipo “fórmula de la raíz cuadrada”, pero donde los usuarios favorecidos y desfavorecidos por la estrategia aparecen representados en términos separados. Cabe señalar que las fórmulas encontradas para las frecuencias óptimas  $f_A$  y  $f_B$  son condicionales en la elección de las estaciones de inicio y término de las estrategias, variables discretas que se agregó al problema de optimización.

Del análisis de los resultados obtenidos destaca que la configuración de las zonas en las que se aumenta la frecuencia se ve influenciada por el valor de los costos de hacer *deadheading* relativos a los costos en operación normal. Mientras menor sea el valor de los costos de operación cuando se circula vacío, más se diferencian las estaciones que definen la estrategia en uno y otro sentido; en contrapartida, mientras menos atractivo sea el corredor para realizar *deadheading*, la estrategia óptima resulta más parecida a un bucle. Cabe hacer notar que una estrategia que mezcla bucles y *deadheading* debe ser comparada también con las estrategias puras, pues en la estrategia

*deadheading* se evita el costo alto de circulación de vehículos vacíos, y en bucles existen vehículos que circulan sin realizar servicio de pasajeros aunque sea en un segmento pequeño. La teoría desarrollada en este trabajo puede ser extendida de diversas maneras: considerar el hacinamiento (Jara-Díaz y Gschwender, 2003a)<sup>4</sup>, estudiar la existencia de líneas paralelas competitivas (Chang y Schonfeld, 1991), o comparar líneas directas o líneas con trasbordos al diseñar una red (Jara-Díaz y Gschwender, 2003b). También resulta interesante estudiar un sistema en el cual dos o más líneas se intersectan en estaciones de trasbordo o tienen terminales en común, en donde es posible cambiar los vehículos de una línea a otra cuando se requiera (técnica denominada *interlineado*). En cuanto al tratamiento analítico, la generalización a modelos de demanda elástica o endógena parece ser el siguiente paso, además de considerar un enfoque multiperíodo para analizar si las decisiones tomadas cuando se implementan las estrategias, es decir en horas punta, son compatibles con períodos de bajo flujo.

## AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por los proyectos FONDECYT 1061261 y 1050643 y por el Instituto Milenio “Sistemas Complejos de Ingeniería”.

## REFERENCIAS

- Ceder, A. y H.I. Stern, (1981) Deficit Function Bus Scheduling with Deadheading Trip insertion for Fleet Size Reduction. **Transportation Science** 15 (4), 338-363.
- Ceder, A.(1989) Optimal Design of Transit Short-Turn Trips. **Transportation Research Record** 1221,8-22.
- Ceder, A. (2003a) Public Transport Timetabling and Vehicle Scheduling. En Lam, W.H.K. y Bell, G.H. (Eds.) **Advanced Modeling for Transit Operations and Service Planning**. Elsevier Science Ltd. 31-57.
- Ceder, A. (2003b) Designing Public Transport Network and Route. En Lam, W.H.K. y Bell, G.H. (Eds.) **Advanced Modeling for Transit Operations and Service Planning**. Elsevier Science Ltd. 59-91.
- Ceder, A. (2004) Improved Lower-Bound Fleet Size for Fixed and Variable Transit Scheduling. **9th International Conference on Computer-Aided Scheduling of Public Transport (CASPT)**, San Diego, EE.UU.
- Chang, S.K. y P.M. Schonfeld (1991) Multiple Period Optimization of Bus Transit Systems. **Transportation Research**, 25B, 453–478.
- Danas, A. (1980) Arrival of Passengers and Buses at Two London Bus-stops. **Traffic Engineering and Control** 21(10), 472-475.

---

<sup>4</sup> Considerar el tiempo de espera como una función creciente del hacinamiento aumenta el beneficio de la estrategia bucles, precisamente porque la estrategia aumenta la frecuencia de operación en los sectores de mayor demanda, reduciéndose así el hacinamiento (Tirachini y Cortés, 2007).

Delle Site, P.D. y F. Filippi (1998). Service Optimization for Bus Corridors with Short-Turn Strategies and Variable Vehicle Size. **Transportation Research A** 32(1), 19-28.

Eberlein, X.-J., N.H.M. Wilson, C. Barnhart, y D. Bernstein (1998). The Real-Time Deadheading Problem in Transit Operations Control. **Transportation Research B** 32(2), 77–100.

Eberlein, X.-J., N.H.M. Wilson y D. Bernstein (1999) Modeling Real-Time Control Strategies in Public Transit Operations. En N.H.M. Wilson, (ed.), **Computer-Aided Transit Scheduling**, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 471, Springer-Verlag, Heidelberg, 325-346.

Furth, P.G. (1985) Alternating Deadheading in Bus Route Operations. **Transportation Science** 19(1), 13–28.

Furth, P.G. (1987) Short Turning on Transit Routes. **Transportation Research Record** 1108, 42–52.

Furth, P.G. y F.B. Day (1984) Transit Routing and Scheduling Strategies for Heavy Demand Corridors. **Transportation Research Record** 1011, 23-26.

Jansson, J. O. (1980) A Simple Bus Line Model for Optimization of Service Frequency and Bus Size. **Journal of Transport Economics and Policy**, 14, 53–80.

Jansson, J. O. (1984) **Transport System Optimization and Pricing**. Chichester: Wiley.

Jara-Díaz S.R. y A. Gschwender (2003a) Towards a General Microeconomic Model for the Operation of Public Transport. **Transport Reviews**, 23(4), 453-469.

Jara-Díaz, S.R. y A. Gschwender (2003b) From the Single Line Model to the Spatial Structure of Transit Services: Corridors o Direct? **Journal of Transport Economics and Policy** 37(2), 261-277.

Mohring, H. (1972) Optimization and Scale Economies in Urban Bus Transportation. **American Economic Review**, 62, 591-604.

Mohring, H. (1976) **Transportation Economics**. Cambridge, MA: Ballinger.

Oldfield, R.H. y P.H. Bly (1988) An Analytic Investigation of Optimal Bus Size. **Transportation Research** 22B, 319–337.

Seddon, P.A. y M.P. Day (1974) Bus Passenger Waiting times in Greater Manchester. **Traffic Engineering and Control** 15(9), 442-445.

Tirachini, A. (2007) **Estrategias de Asignación de Flota en un Corredor de Transporte Público**. Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería, Mención Transporte. Universidad de Chile.

Tirachini, A. y C.E. Cortés (2007) Disaggregated Modeling of Pre-Planned Short-turning Strategies in Transit Corridors. **Actas en CD de Transportation Research Board (TRB) 86<sup>th</sup> Annual Meeting**, Washington DC, USA.