
UN ENFOQUE DE PARAMETRIZACIÓN PARA LA DETERMINACIÓN DE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN EQUIVALENTE DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE TRÁFICO CON COSTOS LINEALES ASIMÉTRICOS

Louis de Grange C.

Escuela de Ingeniería Industrial, Universidad Diego Portales, Santiago de Chile.

Fono: (56 2) 676 8118, E-mail: louis.degrange@udp.cl

Juan Carlos Muñoz A.

Departamento de Ingeniería de Transporte, Pontificia Universidad Católica de Chile,

Casilla 306, Santiago 22, Chile. E-mail: jcm@ing.puc.cl

RESUMEN

En este trabajo se presenta una formulación general del problema de asignación de tráfico determinístico mediante la especificación de un problema de optimización equivalente, que es válido el caso con funciones de costos lineales y asimétricas. La formulación se basa en el planteamiento de un problema de optimización no lineal en cuya función objetivo se define una integral de línea asociada al vector de costos lineales de la red, y en las restricciones se definen las ecuaciones de conservación y no negatividad de flujo. A partir de un camino de integración, la integral de línea puede ser escrita como una integral definida, con lo cual es factible formular un problema de optimización equivalente cuyas condiciones de optimalidad proporcionan soluciones que satisfacen el primer principio de Wardrop.

Palabras clave: asignación, costos asimétricos, integral de línea, Wardrop, camino de integración.

ABSTRACT

In this work we present a general formulation for the deterministic traffic assignment problem, using an equivalent optimization problem applicable to the case of asymmetric linear cost functions. We present a resolution approach for this problem in such a way that in equilibrium Wardrop's first principle is satisfied. We conclude that any deterministic traffic assignment problem with asymmetric linear cost can be formulated as an optimization problem which objective is defined by a line integral, and whose constraints correspond to non-negativity and flows conservation. By adequately defining the integration path, it is feasible to resolve the problem, obtaining Wardrop's equilibrium.

Keywords: trip assignment, asymmetric cost, line integral, Wardrop equilibrium, integration path.

1. INTRODUCCIÓN

En el problema básico de equilibrio de tráfico con redes congestionadas, también denominado problema de asignación de tráfico (Beckmann et al, 1956), se plantea un problema de optimización cuyas condiciones de optimalidad proporcionan el primer principio de Wardrop (Wardrop, 1952). Sin embargo, el problema formulado por Beckmann et al (1956) considera una serie de supuestos fuertes que impiden un uso más extenso de dicha formulación. Particularmente, supone que los costos sobre un arco dependen exclusivamente de su propio flujo, y no de otros flujos sobre la red, como efectivamente ocurre en situaciones reales.

Dada la limitación del modelo de asignación de tráfico de Beckmann, que no considera interacciones entre flujos, surgieron múltiples desarrollos que buscaban generalizar la formulación. En el caso particular que el jacobiano del vector de costos es simétrico, se formula un integral de línea la cual, al no depender del camino de integración (debido a que el jacobiano es simétrico o, dicho de una manera más general, el campo vectorial definido por el vector de costos es conservativo), puede ser resuelta de manera directa ya tiene un problema de optimización equivalente (Sheffi, 1985). Sin embargo, cuando el vector de costos no es simétrico, a la fecha no se ha reportado un problema de optimización equivalente, y el enfoque tradicionalmente utilizado fue el de plantear y resolver una desigualdad variacional o aplicar algún método alternativo, como por ejemplo métodos de punto fijo, diagonalización, métodos de descomposición (partitionable, transfer, simplicial and cobweb decomposition) métodos de relajación o métodos de proyección. Entre los trabajos más relevantes, que analizan la formulación del problema de equilibrio, la unicidad de la solución y el algoritmo de solución, destacan Dafermos and Sparrow (1969), Smith (1979, Dafermos (1980; 1982), Florian and Spiess (1982), Fisk and Nguyen (1982), Fisk and Boyce (1983), Nagurney (1984), Hammond (1984), Marcotte and Guelatt (1988), Auchmuty (1989), Gabriel and Bernstein (1997), Patriksson (1998).

En la totalidad de los trabajos reportados en la literatura especializada, cuando el vector de costos es asimétrico, la formulación de un problema de optimización equivalente no ha sido considerada. Este último punto representa por lo tanto el principal aporte del presente trabajo, ya que se demuestra que el problema determinístico de asignación de tráfico con costos lineales, incluso con jacobiano del vector de costos asimétrico, puede ser formulado como un problema de optimización en cuya función objetivo se especifica una integral de línea asociada al vector de costos lineales de la red, y las restricciones corresponden a las clásicas restricciones de continuidad y no negatividad de flujos.

En la sección 2 se expone la formulación del problema generalizado de asignación de tráfico como un problema de optimización, y se explica detalladamente cómo determinar un camino de integración que permita resolver la integral de línea para obtener las condiciones de Wardrop; esta explicación se acompaña con ejemplos que permiten entender claramente la metodología. En la sección 3 se expone el proceso completo de formulación y resolución para el problema general de asignación de tráfico, y se reporta una serie de propiedades del cálculo vectorial que sirven de complemento para entender la metodología previamente descrita. Finalmente, en la sección 4 se reportan las principales conclusiones que se desprenden del trabajo acá reportado y se mencionan desarrollos que son factibles de investigar como extensión del presente trabajo.

2. FORMULACIÓN Y RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN EQUIVALENTE

Para entender el enfoque metodológico propuesto, esta sección se ha estructurado de la siguiente forma: primero, se expone la representación general relacionada con la formulación del problema; posteriormente, se exponen una serie de proposiciones y sus respectivas demostraciones, las que permiten contextualizar la representación inicial. Finalmente, se desarrolla una serie de ejemplo de redes con funciones de costo lineales asimétricas en los cuales se aplica el enfoque propuesto, corroborando la obtención de un equilibrio de Wardrop.

2.1. Formulación de un Problema de Optimización Equivalente

Representación: “Cualquier problema determinístico de asignación de tráfico puede ser formulado como un problema de optimización no lineal en cuyo objetivo se define una integral de línea asociada al vector de costos de la red, y cuyas restricciones corresponden a las ecuaciones de conservación y no negatividad de flujos”. La formulación general es por lo tanto la siguiente:

$$\min_{\{\mathbf{F}\}} Z = \int_P \mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_P \left[c_1(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 + \dots + c_m(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_m \right] \quad (1)$$

$$s.a.: \forall \mathbf{F} \in \Omega \quad (2)$$

\mathbf{x} : vector de variables de integración, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m)$.

\mathbf{C} : vector de costos de los arcos de la red, $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m)$.

c_a : función de costos del arco a , tal que $c_a = c_a(f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m)$.

\mathbf{F} : vector de flujos de los arcos de la red, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m)$.

P : camino de integración definido en el espacio $(f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m)$.

Ω : conjunto de restricciones de continuidad de flujos y no negatividad de flujos.

Proposición 1: Existe un camino de integración P para la integral expuesta en (1) entre $\mathbf{F}_0 \in \Omega$ y $\mathbf{F} \in \Omega$, tal que el problema general de asignación de tráfico (1)-(2) con costos lineales puede ser formulado como un problema de optimización equivalente ordinario parametrizado, en cuyo objetivo se especifica una integral definida, y las restricciones de conservación y no negatividad de flujos se mantienen. Notar que $\mathbf{F}_0 \in \Omega$ es constante pero desconocido, y que $\mathbf{F}_0 = [f_1^0, f_2^0, \dots, f_m^0]$.

Demostración: Conocer el camino de integración equivale a parametrizar el problema en función de una nueva variable, por ejemplo t . Luego, cada variable x_a puede ser expresada en función de t de la siguiente forma: $x_a = x_a(t)$; notar que $dx_a = \frac{dx_a}{dt} dt$.

Por lo tanto, el vector de costos parametrizado es $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = [c_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)), \dots, c_m(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))]$. Finalmente, la integral de línea expuesta en (1) puede ser rescrita como:

$$\oint_P \mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{F}_0}^{\mathbf{F}} \mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{F}_0}^{\mathbf{F}(t)} \left[c_1(t) \frac{dx_1(t)}{dt} dt + \dots + c_m(t) \frac{dx_m(t)}{dt} dt \right] = \sum_{a=1}^m \int_{f_a^0}^{f_a(t)} c_a(t) \frac{dx_a(t)}{dt} dt \quad (3)$$

Por otra parte, dado que $\mathbf{F}_0 = [f_1^0, f_2^0, \dots, f_m^0]$ es constante, su valor no afectará la solución del problema de optimización, por lo que minimizar $\sum_{a=1}^m \int_{f_a^0}^{f_a(t)} c_a(t) \frac{dx_a(t)}{dt} dt$ es equivalente a minimizar

$\sum_{a=1}^m \int_0^{f_a(t)} c_a(t) \frac{dx_a(t)}{dt} dt$. Por lo tanto, el problema (1)-(2) puede ser finalmente representado de la siguiente forma:

$$\min_{\{t\}} Z = \sum_{a=1}^m \int_0^{f_a(t)} c_a(t) \frac{dx_a(t)}{dt} dt \quad s.a.: \forall \mathbf{F}(t) \in \Omega \quad (4)$$

Proposición 2: El problema de asignación clásico de Beckmann puede ser formulado como un problema parametrizado.

Demostración: Definiendo una parametrización adecuada $x_a = x_a(t) \forall a = 1, 2, \dots, m$, donde $dx_a = \frac{dx_a}{dt} dt$, el problema de Beckmann puede describirse como:

$$\min_{\{t\}} Z = \sum_{a=1}^m \int_0^{f_a(t)} c_a(x_a(t)) \frac{dx_a(t)}{dt} dt = \sum_a \int_0^{f_a(t)} c_a(t) \frac{dx_a(t)}{dt} dt \quad s.a.: \forall \mathbf{F}(t) \in \Omega \quad (5)$$

Se observa que el problema (5) es equivalente al problema (4). Por lo tanto, conocer un camino de integración adecuado equivale a formular un problema de Beckmann parametrizado.

Proposición 3: Definiendo un camino de integración adecuado, la resolución del problema de optimización (1)-(2) proporciona un equilibrio consistente con el primer principio de Wardrop

Demostración: A partir de las proposiciones 1 y 2 se observa que existe alguna parametrización (o algún camino de integración) que permite formular el problema (1)-(2) como un problema clásico de Beckmann que cumple Wardrop. En las siguientes secciones se expone cómo encontrar el camino de integración que nos permite obtener los resultados esperados (Wardrop).

Sin embargo, en lugar de representar cada variable en función de t producto de la parametrización, también es factible representar la función de costos de cada arco c_a en función de su propio flujo f_a , ya que la existencia del camino de integración proporciona $(m - 1)$ relaciones que así lo permiten. En dicho caso, la integral de línea puede ser representada de la siguiente forma:

$$\int_{\mathbf{F}_0}^{\mathbf{F}} \mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{F}_0}^{\mathbf{F}} \left[c_1(x_1, x_2(x_1), \dots, x_m(x_1)) dx_1 + \dots + c_m(x_1(x_m), x_2(x_m), \dots, x_m) dx_m \right] \quad (6)$$

$$\int_{\mathbf{F}_0}^{\mathbf{F}} \mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{F}_0}^{\mathbf{F}} \left[c_1(x_1) dx_1 + \dots + c_m(x_m) dx_m \right] = \sum_{a=1}^m \int_{f_a^0}^{f_a} c_a(x_a) dx_a \quad (7)$$

Por lo tanto, conociendo un camino de integración adecuado P , el problema (1)-(2) puede ser representado también, de la siguiente forma:

$$\min_{\{\mathbf{F}\}} Z = \sum_{a=1}^m \int_{f_a^0}^{f_a} c_a(x_a) dx_a = \sum_{a=1}^m \int_0^{f_a} c_a(x_a) dx_a \quad s.a.: \forall \mathbf{F} \in \Omega \quad (8)$$

2.2. Especificación del Camino de Integración y Resolución del Problema Parametrizado

Como ya se mencionó, para determinar el vector de flujos de equilibrio \mathbf{F}^* asociado al problema (1)-(2), es necesario conocer el “camino de integración” asociado a P entre $\mathbf{F}_0 \in \Omega$ y $\mathbf{F} \in \Omega$ que permita parametrizar dicho problema. Para ello, podemos considerar los siguientes 2 supuestos:

- i) que las restricciones de continuidad o conservación de flujos en la red se cumplen durante todo el camino de integración.
- ii) si las restricciones de conservación de flujos no permiten definir completamente el camino de integración (punto (i) anterior), como ocurrirá en casi todos los casos reales, supondremos además que los costos de determinadas rutas (usadas o no usadas) entre distintos pares O-D son constantes (pero desconocidos) dentro del camino de integración. El número de rutas para el cual se considerará este supuesto es tal que se pueda especificar completamente el camino de integración (sumadas a las ecuaciones de conservación de flujos).

A partir de estos dos supuestos, es factible definir un camino de integración (que en nuestro caso corresponde a una curva en el espacio m -dimensional definido por $m - 1$ variables) asociado al campo de flujos P , para luego resolver directamente el problema (1)-(2). A continuación se presentan algunos ejemplos para entender cómo funciona el enfoque.

Ejemplo 1: Consideremos la siguiente red con funciones de costo asimétricas:

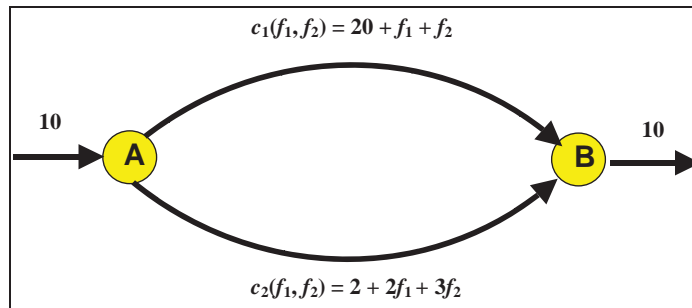


Figura 1: ejemplo de red de 2 arcos con costos asimétricos y lineales

En este ejemplo, $\frac{\partial c_1}{\partial f_2} = 1$ y $\frac{\partial c_2}{\partial f_1} = 2$, por lo que hay interacciones asimétricas. El equilibrio de tráfico en este caso está dado por las siguientes ecuaciones (igualdad de costos y conservación de flujos):

$$20 + f_1 + f_2 = 2 + 2f_1 + 3f_2, \quad f_1 + f_2 = 10 \quad (9)$$

Los valores en el equilibrio son:

$$f_1^* = 2, f_2^* = 8, c_1^* = c_2^* = 30. \quad (10)$$

De acuerdo al enfoque metodológico planteado, el problema del ejemplo anterior también puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\min_{\{F\}} Z = \int_0^{f_1, f_2} \left[(20 + x_1 + x_2) dx_1 + (2 + 2x_1 + 3x_2) dx_2 \right] \quad (11)$$

s.a.:

$$f_1 + f_2 = 10 \quad (\lambda) \quad (12)$$

$$f_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2 \quad (\beta_i) \quad (13)$$

En este caso en particular, el camino de integración queda definido completamente por la restricción de conservación de flujo: $f_1 + f_2 = 10$, por lo que el camino de integración es la línea recta en \mathbb{R}^2 definida por $x_1 + x_2 = 10$. Luego, el problema (11)-(12) puede ser rescrito como:

$$\min_{\{F\}} Z = \int_{F_0}^F \left[(20 + x_1 + (10 - x_1)) dx_1 + (2 + 2(10 - x_2) + 3x_2) dx_2 \right] \quad (14)$$

s.a.:

$$f_1 + f_2 = 10 \quad (\lambda), \quad f_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2 \quad (\beta_i) \quad (15)$$

Aplicando las condiciones de K-K-T al problema anterior se obtiene:

$$f_1^* = 2, f_2^* = 8, \lambda^* = 30, \beta_1^* = 0, \beta_2^* = 0 \quad (16)$$

El resultado (16) es idéntico a (10). Por lo tanto, se obtiene el equilibrio de tráfico de Wardrop.

Ejemplo 2: Consideremos la siguiente red con funciones de costo asimétricas:

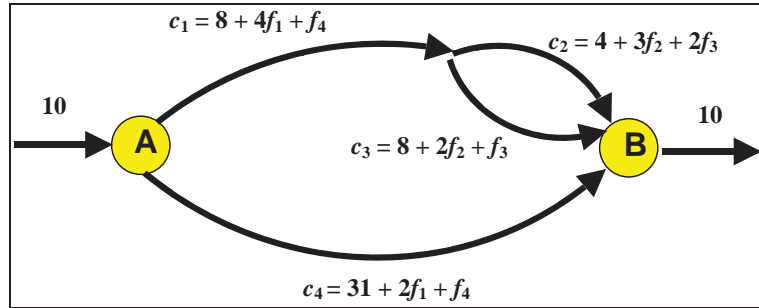


Figura 2: ejemplo de red de 4 arcos con costos asimétricos y lineales

El equilibrio de tráfico en este caso está dado por las siguientes ecuaciones (igualdad de costos y continuidad de tráfico):

$$(8 + 4f_1 + f_4) + (4 + 3f_2 + 2f_3) = 31 + 2f_1 + f_4 \quad (17)$$

$$(8 + 4f_1 + f_4) + (8 + 2f_2 + f_3) = 31 + 2f_1 + f_4 \quad (18)$$

$$f_1 + f_4 = 10, f_2 + f_3 = f_1 \quad (19)$$

Los valores en el equilibrio son:

$$f_1^* = 4, f_2^* = 3, f_3^* = 1, f_4^* = 6, (c_1^* + c_2^*) = (c_1^* + c_3^*) = c_4^* = 45 \quad (20)$$

El problema del ejemplo anterior también puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\min_{\{F\}} Z = \int_{F_0}^F \left[(8 + 4x_1 + x_4) dx_1 + (4 + 3x_2 + 2x_3) dx_2 + (8 + 2x_2 + x_3) dx_3 + (31 + 2x_1 + x_4) dx_4 \right] \quad (21)$$

$$s.a.: f_1 + f_4 = 10 \ (\lambda_1), \quad f_2 + f_3 = f_1 \ (\lambda_2), \quad f_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \ (\beta_i) \quad (22)$$

En este caso, el camino de integración NO queda definido completamente por la restricción de conservación de flujo. Una ruta factible de considerar es la ruta compuesta por el arco 1 y el arco 2. Como ya se explicó, cualquiera de las otras rutas también puede ser utilizada, teniendo cuidado de no generar relaciones linealmente dependientes.

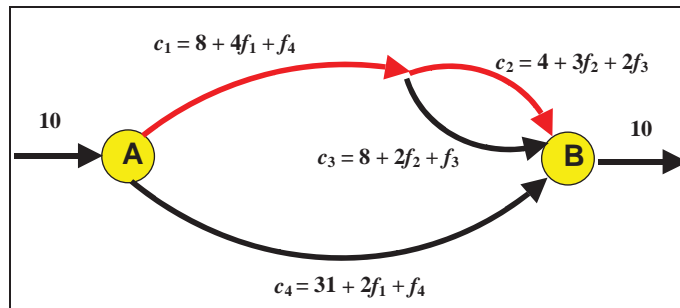


Figura 3: especificación de ruta que ayuda a definir el camino de integración

Por lo tanto, considerando que $c_1 + c_2 = c^*$, se cumplirá que:

$$(8 + 4f_1 + f_4) + (4 + 3f_2 + 2f_3) = c^* \rightarrow 12 + 4f_1 + 3f_2 + 2f_3 + f_4 = c^* \quad (23)$$

En consecuencia, el camino de integración en \mathbb{R}^4 queda determinado por las siguientes relaciones:

$$x_1 + x_4 = 10 \quad (24)$$

$$x_2 + x_3 = x_1 \quad (25)$$

$$12 + 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = c^* \quad (26)$$

Dado que por conservación de flujos se cumple que $f_1 + f_4 = 10$ y $f_2 + f_3 = f_1$, la expresión (23) puede ser rescrita como: $22 + 6f_2 + 5f_3 = c^*$, de la cual se deduce directamente que:

$$f_2 = (c^* - 22 - 5f_3)/6 \rightarrow x_2 = (c^* - 22 - 5x_3)/6 \quad (27)$$

$$f_3 = (c^* - 22 - 6f_2)/5 \rightarrow x_3 = (c^* - 22 - 6x_2)/5 \quad (28)$$

Finalmente, considerando las ecuaciones de conservación de flujos (19), además de las ecuaciones (27) y (28), el problema puede ser rescrito como:

$$\min_{\{F\}} Z = \int_0^{f_1} (18 + 3x_1) dx_1 + \int_0^{f_2} \left(-4,8 + \frac{2c^*}{5} + 0,6x_2 \right) dx_2 + \int_0^{f_3} \left(\frac{2}{3} + \frac{c^*}{3} - \frac{2x_3}{3} \right) dx_3 + \int_0^{f_4} (51 - x_4) dx_4 \quad (29)$$

$$\text{s.a.: } f_1 + f_4 = 10 \quad (\lambda_1), \quad f_2 + f_3 = f_1 \quad (\lambda_2), \quad f_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\beta_i) \quad (30)$$

Las condiciones de optimalidad sobre el problema (29)-(30) representan un sistema de 10 ecuaciones y 11 incógnitas, ya que c^* aún se desconoce. Sin embargo, es factible incluir la ecuación $22 + 6f_2 + 5f_3 = c^*$, para obtener 11 ecuaciones y 11 incógnitas. La resolución de este sistema de ecuaciones de 11×11 entrega las siguientes 3 soluciones (todas cumplen Wardrop):

Tabla 1: Soluciones del Sistema

f_1	f_2	f_3	f_4	λ_1	λ_2	c^*	β_1	β_2	β_3	β_4	Solución N°
4	3	1	6	45	15	45	0	0	0	0	1
5	0	5	5	46	13	47	0	1	0	0	2
3.8	3.8	0	6.2	44.8	15.4	44.8	0	0	0.2	0	3

Costos en arcos y rutas para solución 1 (se usan las 3 rutas)

Costo arco 1	30,0
Costo arco 2	15,0
Costo arco 3	15,0
Costo arco 4	45,0

Ruta 1	Arco 1 + Arco 3	Costo	45,0
Ruta 2	Arco 1 + Arco 2	Costo	45,0
Ruta 3	Arco 4	Costo	45,0

Costos en arcos y rutas para solución 2 (se usan sólo las Rutas 1 y 3)

Costo arco 1	33,0
Costo arco 2	14,0
Costo arco 3	13,0
Costo arco 4	46,0

Ruta 1	Arco 1 + Arco 3	Costo	46,0
Ruta 2	Arco 1 + Arco 2	Costo	47,0
Ruta 3	Arco 4	Costo	46,0

Costos en arcos y rutas para solución 3 (se usan sólo las Rutas 2 y 3)

Costo arco 1	29,4
Costo arco 2	15,4
Costo arco 3	15,6

Ruta 1	Arco 1 + Arco 3	Costo	45,0
Ruta 2	Arco 1 + Arco 2	Costo	44,8
Ruta 3	Arco 4	Costo	44,8

Costo arco 4	44,8
--------------	------

Notar que los resultados de la solución 1 corresponden a los expuestos en la expresión (20). En este último ejemplo, si bien se obtienen 3 soluciones diferentes, todas ellas cumplen Wardrop.

4. ANÁLISIS DE UN CASO NO LINEAL

Si las funciones de costos de la red son no lineales, la obtención del camino de integración puede ser difícil o imposible. Por ejemplo, una función de costos de la forma

$c_a(f_a, f_b) = 50 + \exp(f_a) + (f_b)^2$ es difícil de manipular para obtener el camino de integración. En estos casos, la aplicación del método descrito en la sección 3 puede ser difícil o imposible. Sin embargo, existen casos no lineales para los cuales sí es factible obtener el camino de integración.

Ejemplo 3: Consideremos la siguiente red con funciones de costo no lineales y asimétricas:

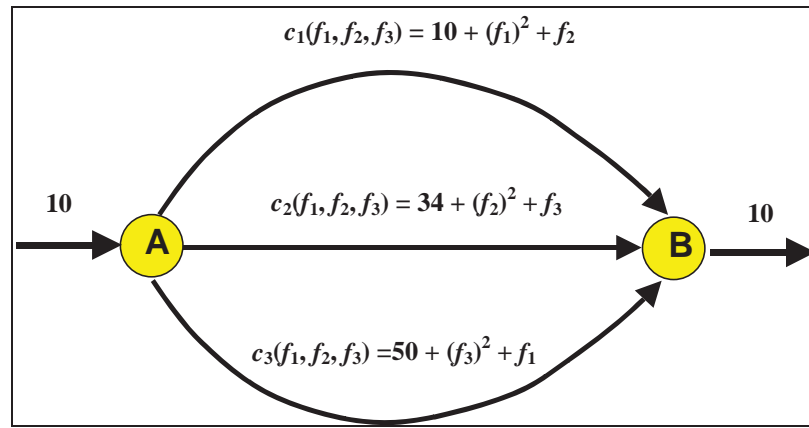


Figura 4: ejemplo de red de 3 arcos con costos asimétricos y no lineales

Los valores en el equilibrio son:

$$f_1^* = 6, f_2^* = 4, f_3^* = 0, c_1^* = c_2^* = 50, c_3^* = 56 \quad (31)$$

El problema del ejemplo anterior también puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\min_{\{F\}} Z = \int_{F_0}^F \left[(10 + x_1^2 + x_2) dx_1 + (34 + x_2^2 + x_3) dx_2 + (50 + x_1 + x_3^2) dx_3 \right] \quad (32)$$

$$s.a.: f_1 + f_2 + f_3 = 10 \quad (\lambda), \quad f_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\beta_i) \quad (33)$$

En este caso en particular, existen 3 variables (f_1 , f_2 y f_3) y sólo una ecuación de conservación de flujos: $f_1 + f_2 + f_3 = 10$, por lo que el camino de integración NO queda definido directamente por la restricción de conservación de flujo. En consecuencia, en este caso es necesario explicitar $(3-1) - 1 = 1$ relación adicional para determinar el camino de integración. Como ya se dijo, dicha relación es obtenida considerando el supuesto expuesto en el punto (ii) anterior, basado en el concepto que en el equilibrio los costos de todas las rutas son constantes (usadas o no usadas). Por ejemplo, es factible definir el costo de la ruta compuesto por el arco 3 como constante:

$$50 + (f_3)^2 + f_1 = c^* \quad (34)$$

donde c^* es constante pero desconocido. Notar que es factible definir cualquier ruta con un costo constante específico para dicha ruta (c_i^*), siempre y cuando permita parametrizar el problema. Luego, a partir de (33) y (34) es factible definir el siguiente camino de integración en \mathbb{R}^3 :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \rightarrow x_2 + x_3 = 10 - x_1 \quad (35)$$

$$50 + (x_3)^2 + x_1 = c^* \quad (36)$$

A partir de las relaciones (35) y (36) se deduce fácilmente que:

$$x_2 = 10 - x_1 - \sqrt{c^* - 50 - x_1} \rightarrow x_3 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - 4(60 - x_2 - c^*)}}{2} \quad (37)$$

Dado que $f_1 + f_2 + f_3 = 10$, se cumple que $\frac{\partial f_3}{\partial f_2} < 0$ y $\frac{\partial f_2}{\partial f_1} < 0$. Luego, de la ecuación (37) interesa

sólo la relación $x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 - 4(60 - x_2 - c^*)}}{2}$, ya que garantiza que $\frac{\partial x_3}{\partial x_2} < 0$. Por lo tanto, el problema (32) y (33) puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min_{\{F\}} Z = & \int_0^{f_1} \left(10 + x_1^2 + \left(10 - x_1 - \sqrt{c^* - 50 - x_1} \right) \right) dx_1 \\ & + \int_0^{f_2} \left(34 + x_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 - 4(60 - x_2 - c^*)}}{2} \right) \right) dx_2 + \int_0^{f_3} c^* dx_3 \end{aligned} \quad (38)$$

$$s.a.: f_1 + f_2 + f_3 = 10 \quad (\lambda), \quad f_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\beta_i) \quad (39)$$

Las condiciones de optimalidad definen un sistema de 7 ecuaciones y 8 incógnitas ($f_1, f_2, f_3, \lambda, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, y c^*). Sin embargo, incorporando la ecuación (34), se obtiene la ecuación faltante que permite resolver el sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas que entrega los siguientes resultados:

$$f_1^* = 6, f_2^* = 4, f_3^* = 0, c^* = 56, \lambda^* = 50, \beta_1^* = 0, \beta_2^* = 0, \beta_3^* = 6 \quad (40)$$

4. CONCLUSIONES

En este artículo se ha propuesto un enfoque generalizado para formular un problema determinístico de asignación de tráfico con costos lineales. La primera conclusión que se obtiene

es que un problema determinístico de equilibrio de tráfico con costos lineales puede ser planteado como un problema de optimización en cuya función objetivo se especifica una integral de línea asociada al vector de costos, y cuyas restricciones corresponden a las ecuaciones de conservación y no negatividad de flujos. Una segunda conclusión es que, especificando adecuadamente el camino de integración, la integral de línea de la función objetivo del problema general de equilibrio de tráfico puede ser transformada en una integral definida, cuyas condiciones de optimalidad proporcionan soluciones que satisfacen el primer principio de Wardrop. El enfoque fue implementado por los autores en decenas de casos diferentes, obteniéndose en la totalidad de los casos los resultados satisfactorios. Finalmente, como extensiones del presente trabajo que los autores se encuentran actualmente elaborando, se pueden mencionar las siguientes:

- i. Validar el método en el caso multi-producto (varios orígenes y destinos). Ya se han validado ejemplos simples con 2 orígenes y 2 destinos, pero por razones de espacio no ha sido factible incorporarlos en el presente documento.
- ii. Comparar el método propuesto con el método de diagonalización.
- iii. Analizar el caso de múltiples tipos de usuarios

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen los valiosos comentarios realizados por los Profesores Roberto Cominetti, David Boyce, Hillel Bar-Gera y Michael Florian.

REFERENCIAS

- Auchmuty, G. (1989). Variational principles for variational inequalities. **Numerical Functional Analysis and Optimization** 10, 863-874.
- Bar-Gera, H. (2002). Origin-Based Algorithm for the Traffic Assignment Problem. **Transportation Science**, Nov2002, Vol. 36 Issue 4, 398-418.
- Beckmann, M.J., C.B. McGuire, y C.B. Winsten (1956). **Studies in the Economics of Transportation**. Yale University Press, New Haven, Connecticut.
- Dafermos, S. y F.T. SPARROW (1969). The traffic assignment problem for a general network. **J. Res. Nat. Bur. Standards-B**, 73B, N°2, 91-117.
- Dafermos, S. (1980). Traffic equilibrium and variational inequalities. **Transportation Science** 14, 42-54.
- Dafermos, S. (1982). Relaxation algorithms for the general asymmetric traffic equilibrium problem. **Transportation Science** 16, 231-240.
- Fisk, C. y S. Nguyen (1982). Solution algorithms for network equilibrium with asymmetric user costs. **Transportation Science** 16, 361-381.

Fisk, C. y D. Boyce, (1983). Alternative variational inequality formulations of the equilibrium travel choice problem. **Transportation Science** 17, 454-463.

Florian, M. y H. Spiess (1982). The convergence of diagonalization algorithms for asymmetric network equilibrium problems. **Transportation Research** 16B, 447-483.

Gabriel, S. y D. Bernstein (1997). The traffic equilibrium problem with nonadditive path costs. **Transportation Science**, 31 Issue 4, p337.

Hammond, J. (1984): **Solving Asymmetric Variational Inequality Problems and Systems of Equations with Generalized Nonlinear Programming Algorithms**, Ph.D. dissertation, Department of Mathematics, MIT, Cambridge.

Marcotte, P. y J. Guelat (1988). Adaptation of a modified method for solving the asymmetric traffic equilibrium Problem. **Transportation Science**, 22, 112-124.

Nagurney, A. (1984) "Comparative Tests of Multimodal Traffic Equilibrium Methods", **Transportation Research**, 18B, 6, 469-485.

Patriksson, M. (1998): Nonlinear Programming and Variational Inequality Problems: A Unified Approach, vol. 23 of **Applied Optimization**, Kluwer, Dordrecht

Sheffi, Y. (1985). **Urban Transportation Networks**. Prentice Hall, Inc. New Jersey.

Smith, M. J. (1979). Existence, uniqueness, and stability of traffic equilibria. **Transportation Research** 13B, 259-304.

Wardrop, J.G. (1952). Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. **Proceedings Institution of Civil Engineers**, II(1), 325-378.