MODELO SIMPLE DE INVERSION EN INFRAESTRUCTURA Y SU FINANCIAMIENTO: TARIFAS POR KILOMETRO CIRCULADO VERSUS IMPUESTO A LOS COMBUSTIBLES

Luis Ignacio Rizzi
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística
Pontificia Universidad Católica de Chile
Casilla 306, Código 105, Santiago 22,Chile.
Fax: (562) 5530281; lirizzi@ing.puc.cl

RESUMEN

En la literatura sobre tarificación por el uso de la infraestructura (o capacidad) vial, los estudios se concentran en determinar principalmente la tarifa vial por kilómetro que debería cobrarse a los conductores a fin de internalizar las externalidades por congestión. Bajo el supuesto de economías constantes a escala en la construcción de infraestructura vial y homogeneidad de grado cero de los tiempos medios de viaje en los flujos y la capacidad vial es fácil demostrar que los cobros originados por esta tarifa cubren exactamente los costos de infraestructura si la tarifa vial y la inversión en infraestructura se deciden conjuntamente. Hay dos temas que suelen ser ignorados en estos estudios. En primer lugar, no se considera como una externalidad que a menor velocidad de circulación, producto de la congestión, aumenta el consumo de combustible de todos los usuarios. En segundo lugar, no se analiza como la provisión de la infraestructura óptima depende del instrumento de pago utilizado. En esta investigación, se analiza cómo determinar óptimamente la inversión en infraestructura vial y su financiamiento mediante un cargo a los conductores. En cuanto a los instrumentos de tarificación, se estudia dos posibles tipos de cobros alternativos: una tarifa vial por kilómetro circulado o un impuesto a los combustibles. Se presta especial atención al consumo de combustible que dependerá de la velocidad de circulación y de la eficiencia energética de los vehículos.

Debido a la eficiencia de los combustibles, se concluye que el impuesto a los combustibles es un instrumento segundo mejor para el financiamiento de la infraestructura vial. La eficiencia de los combustibles permite eludir parcialmente este impuesto haciendo uso de automóviles más eficientes. Por esta razón, al decidir de manera conjunta el monto del impuesto a los combustibles y la inversión en infraestructura, el monto de aquél es superior al costo externo por congestión. Con el cobro de un impuesto a los combustibles, la inversión en infraestructura se incrementa en relación a los flujos de tráfico cuando se compara con un instrumento de tarificación primero mejor. Se realizó un ejercicio de simulación que corroboró todos estos resultados. El ejercicio de simulación permitió observar que el uso de un impuesto a los combustibles, en lugar de una tarifa por kilómetro circulado, produce impactos redistributivos que benefician a personas de mayores ingresos y perjudican a personas de menores ingresos.

Palabras claves: tarifas viales, impuestos a los combustibles, externalidades, precios óptimos, precios segundo mejor

Introducción

En la literatura sobre tarificación por el uso de la infraestructura vial, los estudios se concentran en determinar principalmente la tarifa vial por kilómetro que debería cobrarse a los conductores a fin de internalizar las externalidades por congestión. Bajo el supuesto de economías constantes a escala en la construcción de infraestructura vial y homogeneidad de grado cero de los tiempos medios de viaje en los flujos y la capacidad vial es fácil demostrar que los cobros originados por esta tarifa cubren exactamente los costos de infraestructura si la tarifa vial y la inversión en infraestructura se deciden de manera conjunta (Small y Verhoef, 2007). Existen también algunos estudios (Parry y Small, 2004; Newbery 2005) que buscan establecer el impuesto óptimo a los combustibles a fin de internalizar las externalidades de transporte, principalmente externalidades de congestión, contaminación atmosférica, ruido y accidentes viales. Estos estudios suponen que la provisión de infraestructura corresponde a una decisión que ya fue tomada. Los dos estudios mencionados prestan atención al fenómeno de la eficiencia del combustible por parte del parque vehicular. A medida que se encarece el costo del combustible, los nuevos vehículos se vuelven más eficientes en el uso de las gasolinas, logrando rendimientos por litro de combustible cada vez mayores. Este hecho hace que el impuesto al combustible no pueda funcionar como un substituto perfecto de una tarifa vial.

Hay dos temas que suelen ser ignorados en estudios sobre tarificación de infraestructura con cargos a usuarios y que motivan este estudio. En primer lugar, se ignora que el consumo de combustibles depende de la velocidad de circulación y, en consecuencia, a mayor congestión mayor consumo de combustible por parte de todos los usuarios en áreas urbanas. A altas velocidades, propias de autopistas urbanas en horarios de baja congestión o de caminos interurbanos, velocidades superiores a los 100 km/h aumentan el consumo de combustible notablemente. En este caso, sin embargo, no existe una externalidad por consumo de combustible adicional puesto que el consumo de combustible de los demás conductores no se ve afectado por el exceso de velocidad de un conductor cualquiera[1]. Dado que nuestro análisis se focaliza en contextos urbanos, el análisis de externalidades debe incorporar el hecho que el consumo de combustible es monótonamente creciente en el nivel de congestión. El encarecimiento en los costos del petróleo observado en estos últimos años es probable que vuelva el costo de esta externalidad más notorio. En segundo lugar, el estudio de la provisión de la infraestructura óptima en función del instrumento de pago suele restringirse al cobro de tarifas viales por kilómetro circulado, ignorando la posibilidad de un impuesto a los combustibles. Como consecuencia tanto de la dependencia del consumo de combustible de la velocidad de circulación como del fenómeno de la eficiencia energética, el impuesto a los combustibles y la tarificación vial por kilómetro circulado tendrán impactos diferentes en el comportamiento de los usuarios, afectando a su vez el financiamiento de la infraestructura y, en consecuencia, su provisión óptima.

En este artículo, se analizará cómo determinar óptimamente la inversión en infraestructura vial y su financiamiento mediante un cargo a los conductores. En cuanto a los instrumentos de tarificación, se estudia dos posibles tipos de cobros. Por un lado, se considera el cobro de una tarifa vial por kilómetro circulado; por otro lado, un impuesto a los combustibles. Se

[1] Sí puede haber una externalidad de riesgo de accidente. Este externalidad no será tratada en este documento.

presta especial atención al consumo de combustible: este dependerá de la velocidad de circulación, que a su vez depende de la provisión de infraestructura. A mayor velocidad de circulación, menor será el consumo de gasolina por kilómetro circulado. Además, se supondrá que ante un aumento en el precio del combustible, las empresas automotrices responden mejorando la eficiencia en el uso del combustible de los vehículos. La evidencia empírica así lo manifiesta y, por lo tanto, este fenómeno será introducido en el análisis. En el modelo planteado, la congestión generará dos tipos de externalidades: demoras en los tiempos de viaje y mayor consumo de combustible. En cuanto a la provisión de infraestructura, se supone que los costos de proveer la misma son constantes por unidad de infraestructura y que tanto los tiempos medios de viaje como los consumos medios de combustible serán función del nivel de uso de la capacidad instalada.

Bajo el supuesto que la infraestructura vial debe financiarse con cargo a los usuarios de la misma, sin recurrir a ningún tipo de financiamiento adicional, el presente estudio permitirá establecer cómo varía la provisión óptima de infraestructura dependiendo del instrumento de tarificación utilizado. En especial nos interesa entender qué diferencias existen en cuanto a la provisión óptima de infraestructura en cada caso y el por qué de las mismas. También se busca determinar si existe alguna condición bajo la que ambos instrumentos de tarificación puedan considerarse equivalentes. El documento contiene cuatro secciones adicionales. La primera describe el comportamiento de los usuarios; la segunda plantea el problema de optimización global y permite deducir los cobros y niveles de infraestructura óptimos. La tercera sección contiene el ejercicio de simulación y la cuarta sección entrega las conclusiones.

1. COMPORTAMIENTO DE LOS USUARIOS

Los conductores tienen la siguiente función de utilidad: $U^n(X_n, K_n, L_n)$, donde X_n es consumo de bienes, K_n kilómetros viajados (que entregan utilidad positiva) y L_n es tiempo de ocio y n representa un conductor cualquiera de una población total de N conductores/consumidores. El tiempo total disponible (Π) se dedica a trabajar (T_n), a viajar ($t\ K_n$; t tiempo de viaje por kilómetro) y el tiempo restante a ocio. El tiempo de trabajo es fijo, no así el tiempo de viaje que depende de cuánto se viaja. El consumidor enfrenta una restricción presupuestaria. Además de pagar por el bien X_n, paga por la gasolina (p_g por litro de gasolina) y/o por kilómetro circulado una tarifa p_k). En cuanto al consumo de gasolina, g representa el consumo por kilómetro, por lo tanto, $g.K_n = G_n$, representa el consumo total de gasolina. El ingreso del consumidor es Y_n. También enfrenta una restricción relacionada con el uso de su tiempo.

El problema del consumidor, para un individuo cualquiera *n*, es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&Max_{X_n,K_n} U^n\left(X_n, K_n, L_n\right) \\
&\text{sujeto a } \mathrm{X}_n + \mathrm{p}_g G_n + p_k K_n = Y_n \qquad (1) \\
&\qquad\qquad \mathrm{T}_n + \mathrm{L}_n + \mathrm{t}\ \mathrm{K}_n = \Pi
\end{aligned}
$$

Reemplazando la restricción del uso del tiempo en la función de utilidad directa, el problema de maximización a resolver contiene solo la restricción presupuestaria (con su respectivo multiplicador de Lagrange, λ_n):

$$Max_{X_n,K_n} U^n\left(X_n, K_n, \Pi - T_n - tK_n\right) - \lambda_n\left(X_n + p_g gK_n + p_k K_n - Y_n\right)$$

Desde el punto de vista del consumidor, las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\ )}{\partial X_n} &= U^n_{X_n} - \lambda_n = 0 \Leftrightarrow U^n_{X_n} = \lambda_n \\ \frac{\partial L(\ )}{\partial K_n} &= U^n_{K_n} - U^n_{L_n} t - \lambda_n\left(p_g g + p_k\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{U^n_{K_n}}{U^n_{X_n}} = \left(p_g g + p_k\right) + \frac{U^n_{L_n}}{U^n_{X_n}} t \end{aligned} \quad (2)$$

Resuelto el problema del consumidor, se obtiene la función de demanda de kilómetros circulados y bienes consumidos $K_n = K_n(p_g, p_k, t, g, Y_n)$ y $X_n = X_n(p_g, p_k, t, g, Y_n)$ respectivamente. Reemplazando estas funciones en la función de utilidad directa, se obtiene la función de utilidad indirecta en función de los parámetros del problema, $V^n(p_g, p_k, t, g, Y_n)$. De aquí podemos deducir

$$V^n_{p_k} = -\lambda K_n ; V^n_{p_g} = -\lambda_n g K_n ; V^n_t = -V^n_L K_n \quad (3)$$

(Se utiliza la nomenclatura V_i^n para indicar la derivada parcial de la utilidad indirecta con respecto a la variable i.) Si bien desde el punto de vista individual, el tiempo de viaje y el consumo de combustible por kilómetro circulado es fijo, a nivel urbano ello no es así. Se tienen dos funciones: $t = t(\sum_n K_n; I)$ y $g(\sum_n K_n; I; p_g)$. En relación al tiempo de viaje por kilómetros circulado, t, este depende del total de kilómetros circulados en la red por unidad de tiempo ($\sum_n K_n$) y de la inversión en infraestructura, *I*. Además se supone que $\partial t/\partial \sum_n K_n > 0$ y $\partial t/\partial I < 0$. Esta función es homogénea de grado cero. Por otro lado, el consumo de combustible también depende de las dos variables mencionadas anteriormente con derivadas parciales $\partial g/\partial \sum_i K_i > 0$ y $\partial g/\partial I < 0$. La función g es homogénea de grado cero en ellas y, también, depende del precio del combustible. Al aumentar el precio del combustible, los vehículos se vuelven más eficientes.

2. INFRAESTRUCTURA VIAL ÓPTIMA Y SU FINANCIAMIENTO

El problema de la autoridad de transporte es determinar el nivel de inversión en infraestructura que maximiza el bienestar social sujeto a la restricción que el costo de la infraestructura debe financiarse completamente a partir del cobro de tarifas a usuarios. Se adopta una función de bienestar social utilitaria que consiste en una suma ponderada de utilidades de los *N* individuos que componen la economía. El factor de ponderación, θ_n, representa la valoración que la sociedad hace de la utilidad del individuo *n*. Se supone que la infraestructura, *I*, debe financiarse a partir del cobro a usuarios, sea este una tarifa por kilómetro circulado, p_K, o un impuesto a los combustibles τ_g que se adiciona al costo unitario por combustible que se supone fijo, igual a c_g ($c_g + \tau_g = p_g$). La función de bienestar social a maximizar es la siguiente:

$$Max_{p_k, I} \sum_n \theta_n V^n \left(p_k, p_g, t\left(\sum_n K_n, I \right), g\left(\sum_n K_n, I, p_g \right), Y_n \right) +$$
$$+ \mu \left[p_k \sum_n K_n + \tau_g g\left(\sum_n K_n, I, p_g \right) \sum_n K_n - wI \right] \qquad (4)$$

Derivando respecto a p_k, τ_g e I, obtenemos las tres siguientes condiciones de primer orden, necesarias[2] para la existencia de un máximo (ver apéndice):

Tarifa vial por kilómetro circulado

Operando sobre la respectiva condición de primer orden, se llega a la siguiente ecuación para la determinación de la tarifa vial por kilómetro circulado óptima (ver apéndice).

$$p_k = \frac{\varepsilon_t^K t \sum_n \theta_n \frac{V_L^n}{\mu} \frac{K_n}{K} + \varepsilon_g^K p_g g \sum_n \theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} \frac{K_n}{K} - \tau_g g \left(1 + \varepsilon_g^K\right)}{1 - \sum_n \left(\theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} - 1 \right) \frac{K_n}{\sum_n \varepsilon_{K_n}^{p_k} K_n}}$$

$$p_k = \frac{t\varepsilon_t^K VSocT + \varepsilon_g^K p_g g \frac{1}{CMFP} - \tau_g g \left(1 + \varepsilon_g^K\right)}{1 - \frac{1}{\overline{\varepsilon_{K_n}^{p_k}}} \left[\frac{1}{CMFP} - 1 \right]} \qquad (5)$$

$$\sum_n \theta_n \frac{V_L^n}{\mu} \frac{K_n}{K} = VSocT; \sum_n \theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} \frac{K_n}{K} = \frac{1}{CMFP}; \sum_n \varepsilon_{K_n}^{p_k} \frac{K_n}{K} = \overline{\varepsilon_{K_n}^{p_k}},$$

El símbolo ε_i^j hace referencia a la elasticidad de la variable *i* (subíndice) con respecto a la variable *j* (supraíndice).

En cuanto al numerador de la ecuación (5), el primer sumando dice relación con las demoras de tiempo que un vehículo adicional impone sobre los restantes conductores. Estas demoras no se valoran en función de las valoraciones subjetivas de los tiempos de viaje (V_L^n/λ_n), sino que en función de la valoración social de esos tiempos de viaje ($\theta_n V_L^n/\mu$). Por último, cada uno de los valores $\theta_n V_L^n/\mu$ está ponderado por el porcentaje del total de kilómetros que corresponde al individuo *n* y se obtiene el valor social del tiempo de viaje (*VSOCT*). La valoración de las demoras aparece en toda fórmula sobre tarificación vial presente en la literatura (Small y Verhoef, 2007). El segundo sumando entrega un resultado

[2] Como no demostramos la convexidad del problema planteado, no podemos decir nada sobre las condiciones de segundo orden.

generalmente ignorado y corresponde a la monetización de las externalidades por consumo adicional de combustible en que incurren los demás conductores. Este valor *a priori* es de menor magnitud que el correspondiente a las demoras de tiempo. A fin de calcular este valor, se requiere conocer el impacto que un vehículo adicional genera sobre la velocidad de circulación y cómo esta afecta, por último, el consumo de combustible. El consumo adicional de combustible que este conductor adicional genera no se valora a su valor de mercado, sino que a su precio de mercado multiplicado por un término que es un promedio ponderado de las pérdidas de utilidad, valoradas en términos sociales, que cada conductor experimenta al ver reducido su ingreso personal por su mayor gasto en combustible. Esta pérdida de utilidad individual se pondera por el porcentaje del total de kilómetros circulados que corresponde al individuo. El tercer sumando debe considerarse solo en el caso en que exista un impuesto a los combustibles (fijado de antemano de manera probablemente subóptima) que no puede removerse por la autoridad de transporte. En este caso, corresponde restar el valor del impuesto a los combustibles por kilómetro multiplicado por $\left(1+\varepsilon_g^K\right)$, donde ε_g^K es la elasticidad del consumo de combustible por kilómetro circulado con respecto al flujo. Al aumentar la congestión, se incrementa el consumo de combustible por kilómetro circulado y, por tal motivo, hay que hacer un ajuste. Si es posible fijar una tarifa por kilómetro circulado, el impuesto a los combustibles debería ser igual a cero[3].

El denominador de la ecuación (5) contiene un segundo sumando que incorpora un componente tipo 'Ramsey'[4] en el impuesto óptimo, puesto que se está exigiendo cubrir totalmente los costos de la infraestructura. El valor de μ se interpreta como la pérdida de bienestar social marginal debida a la necesidad de recaudar *wI* fondos. Si $\left(\sum_n \theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} K_n \big/ K\right)^{-1} = CMFP > 1$, en el margen el gasto en vialidad tienen un mayor costo social que ese mismo gasto en manos de los consumidores destinado al consumo del bien generalizado. En este caso, la tarifa vial por kilómetro circulado será menor a los costos externos marginales. CMFP representa el costo marginal de los fondos públicos, tal como se lo suele definir en la literatura (Sandmo, 1998). Por el contrario, si este valor fuese menor a 1, la sociedad experimentará una ganancia de bienestar social puesto que en el margen el beneficio social provisto por el último peso invertido en infraestructura vial más que compensa el costo social originado por la postergación de consumo del bien generalizado.

Si la tarifa vial por kilómetro circulado y la inversión en infraestructura se deciden de manera conjunta, el denominador de la ecuación (5) es idénticamente igual a 1 y la tarifa vial se simplifica a $p_k = \varepsilon_t^K t\,VSocT + \varepsilon_g^K p_g g - \tau_g g\left(1+\varepsilon_g^K\right)$ (si $\tau_g = 0$, entonces $p_g = c_g$),

---

[3] Si existiesen externalidades originadas por el consumo de combustible, independientemente de los kilómetros circulados, el impuesto a los combustibles óptimo sería diferente a cero (Parry y Small, 2005).

[4] Por componente tipo Ramsey, nos referimos a la necesidad de adicionar (o restar) un plus al total de los costos externos por kilómetro circulado, a fin de que se cumpla la condición de autofinanciamiento de la infraestructura vial mediante cobros a usuarios.

siendo $\mu = \sum_n \theta_n \lambda_n \, {}^{K_n}\!/\!_{K}$. De esta forma, el CMFP = 1. Así, la tarifa vial internaliza las externalidades y tal cobro cubre el costo de infraestructura y el componente 'Ramsey' del cobro por kilómetro circulado desaparece.

Veamos dos casos particulares de la ecuación anterior. Primero, supongamos que $\varepsilon_g^K = 0$; es decir, el consumo de combustible no se ve afectado por la congestión. En este caso, la única externalidad que se genera es por las demoras en los tiempos de viaje y la tarifa vial a cobrar por kilómetro circulado se reduce a $p_k = \varepsilon_t^K t\, VSocT - \tau_g g$. Segundo, consideremos el caso en que $\theta_n \lambda_n = 1$, para todo n; es decir, se convalida la actual distribución del ingreso. Con este supuesto, la ecuación 8 se reduce a $p_k = \varepsilon_t^K t \sum_n \frac{V_L^n}{\lambda_n} \frac{K_n}{K} + \varepsilon_g^K p_g g$ (suponiendo además que $\tau_g = 0$, tal que $p_g = c_g$). En este caso, los ahorros de tiempo se valoran según las preferencias individuales.

Impuesto a los combustibles

Supongamos que no puede cobrarse una tarifa vial por kilómetro circulado, pero sí es posible establecer un impuesto a los combustibles a partir del que se financie enteramente la infraestructura vial. A partir de la respectiva condición de primer orden, se obtiene la siguiente ecuación de optimalidad:

$$g\tau_g = \frac{p_g g \left[\dfrac{\frac{1}{CMFP}}{\overline{\varepsilon_{K_n}^{p_g}}} - \dfrac{1}{\overline{\varepsilon_{K_n}^{p_g}}} + \left(\varepsilon_g^K + \dfrac{\varepsilon_g^{p_g}}{\overline{\varepsilon_{K_n}^{p_g}}} \right) \dfrac{1}{CMFP} \right] + \varepsilon_t^K t\, VSocT - p_k}{\left(\varepsilon_g^K + \dfrac{\varepsilon_g^{\tau_g}}{\overline{\varepsilon_{K_n}^{p_g}}} + 1 \right)} \qquad (6)$$

donde $\sum_n \varepsilon_{K_n}^{p_g} \frac{K_n}{K} = \overline{\varepsilon_{K_n}^{p_g}}$. El término $\left(\varepsilon_g^K + \dfrac{\varepsilon_g^{p_g}}{\overline{\varepsilon_{K_n}^{p_g}}} + 1 \right)^{-1}$ refleja la eficiencia del combustible. Este valor se compone de tres términos. El primer sumando, positivo, dice cuánto se incrementa porcentualmente el consumo de combustible por kilómetro circulado ante un aumento de la congestión en un uno por ciento. El segundo sumando contiene dos elasticidades: en el numerador, la elasticidad precio del consumo de combustible por kilómetro circulado $\left(\varepsilon_g^{p_g}\right)$ y en el denominador, la suma ponderada de las elasticidades de los kilómetros circulados por individuo ante un cambio en el precio del combustible $\left(\varepsilon_{K_n}^{p_g}\right)$, siendo el ponderador el porcentaje de kilómetros circulados por cada conductor. Una vez más, este segundo sumando es positivo puesto que las dos elasticidades son negativas. En particular, que la elasticidad precio del consumo de combustible por kilómetro circulado sea negativa implica que ante aumentos en el precio de los combustibles, los vehículos se vuelven más eficientes en su uso. De esta manera, toda la expresión en paréntesis es mayor que uno y al tomar su inverso, se obtiene un número menor a uno. La eficiencia en el uso de combustible en contextos urbanos será siempre menor a uno, incluso si $\left(\varepsilon_g^{p_g}\right)$ fuese igual a cero. En contextos urbanos, la disminución de la congestión induce un efecto de *conservación* en el uso del combustible. Sin embargo, si $\varepsilon_g^{p_g}$ fuese igual a cero, el impuesto a los combustibles sería un sustituto perfecto de un impuesto o cargo por kilómetro circulado si se determina de manera conjunta con la inversión en infraestructura. En la ecuación (6), por inspección visual vemos que si $\varepsilon_g^{p_g} = 0$ y CMFP = 1, entonces $\tau_g g = c_g g \varepsilon_g^K + \varepsilon_t^K t VSocT$. En otras palabras, la congestión afecta el consumo de combustible, pero no por ello vuelve al impuesto a los combustibles en una herramienta de tarificación segunda mejor. El término $\varepsilon_g^{p_g}$ es el que produce este efecto.

La expresión $\left(\varepsilon_g^K + \dfrac{\varepsilon_g^{p_g}}{\overline{\varepsilon_{K_n}^{p_g}}} + 1\right)^{-1}$ puede escribirse como $\dfrac{\overline{\varepsilon_{K_n}^{p_g}}}{\varepsilon_G^{p_g}}$, siendo esta última la manera usual de expresar la eficiencia en el uso del combustible (Parry y Small, 2004[5]), donde $\varepsilon_G^{p_g}$ es la elasticidad del consumo total de combustible (G = K*g) por conductor ante un incremento en el precio del mismo.

El valor de τ_gg (el impuesto al combustible por kilómetro circulado óptimo) está dado por una expresión que incluye un ajuste en función de la eficiencia del combustible. Dado que el impuesto a los combustibles puede eludirse mediante la compra de vehículos más eficientes, este efecto debe considerarse en la ecuación correspondiente. La elusión, por el contrario, no es posible en el caso de una tarifa por kilómetro circulado. El fenómeno de elusión hace del impuesto al combustible una herramienta menos apta para la internalización de las externalidades de congestión que una tarifa vial por kilómetro circulado. En el presente modelo, las externalidades de congestión se deben a la intensidad de uso del vehículo (K_n) y no al consumo de combustible. Como es bien sabido en la teoría de externalidades (Baumol y Oates, 1998), debe tarificarse la generación de externalidades y no un insumo asociado como, en este caso, el consumo de combustible.

Bajo el supuesto que $\theta_n\lambda_n = 1$ para todo *n*, la ecuación del impuesto al combustible se simplifica a la siguiente expresión (considerando $p_k = 0$):

[5] En estricto rigor, estos autores trabajan con un individuo representativo, por lo tanto, el numerador del lado derecho de la esta última igualdad se reduce a $\varepsilon_K^{p_g}$ y así coincidirían la notación de estos autores con la del presente artículo.

$$g\tau_g = \frac{p_g g \left[\frac{\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)}{\varepsilon_{K_n}^{p_g}} + \left(\varepsilon_g^K + \frac{\varepsilon_g^{p_g}}{\varepsilon_{K_n}^{p_g}} \right) \frac{1}{\mu} \right] + \frac{1}{\mu} \varepsilon_t^K t \sum_n \frac{V_L^n}{\lambda_n} \frac{K_n}{K}}{\left(\varepsilon_g^K + \frac{\varepsilon_g^{p_g}}{\varepsilon_{K_n}^{p_g}} + 1 \right)}$$

El efecto de la eficiencia en el uso del combustible sigue presente y una vez más comprobamos que el impuesto a los combustibles es un sustituto imperfecto de la tarifa vial por kilómetro circulado.

Infraestructura vial

Por planteamiento del modelo, cualquier instrumento (tarifa vial o impuesto a los combustibles) que se utilice para financiar la infraestructura vial logrará el equilibrio presupuestario. Sin embargo, el costo final por kilómetro circulado y la provisión óptima de infraestructura dependerán del instrumento económico que se utilice. La condición de primer orden en relación a la infraestructura vial se encuentra en el apéndice. Si la infraestructura se financia con un cargo por kilómetro circulado (y $\tau_g = 0$) fácilmente se arriba a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial t}{\partial I} K \sum_n \theta_n \frac{V_L^n}{\mu} \frac{K_n}{K} - p_g K \frac{\partial g}{\partial I} = w$$

En este caso, se invierte en infraestructura vial hasta el punto en que su beneficio marginal dado por los ahorros de tiempo y de consumo de combustibles, valorados socialmente, se iguala a su costo marginal, consiguiéndose una solución primera mejor.

Por el contrario, si la infraestructura se financia con un impuesto a los combustibles, obtenemos la siguiente expresión para el CMFP:

$$\frac{-\left(\frac{\partial t}{\partial I} + \frac{\partial t}{\partial K} \sum_n \frac{dK_n}{dI} \right) VSocT - \frac{w}{K} + \tau_g \left(\frac{\partial g}{\partial I} + \frac{\partial g}{\partial K} \sum_n \frac{dK_n}{dI} \right) + \frac{1}{K} \tau_g g \sum_n \frac{dK_n}{dI}}{p_g \left(\frac{\partial g}{\partial I} + \frac{\partial g}{\partial K} \sum_n \frac{dK_n}{dI} \right)} = \frac{1}{CMFP} \qquad (7)$$

A continuación se conjetura que el costo marginal de los fondos públicos ha de ser menor a uno cuando el impuesto a los combustibles es utilizado para financiar la infraestructura vial. Para ello, supongamos que ambos lados de la ecuación (7) son mayores a 1 (es decir, CMFP < 1). El denominador del lado izquierdo de la ecuación (7) es negativo y procediendo algebraicamente, haciendo uso de las condiciones de homogeneidad de las funciones g(.;.) y t(.;.;.) y de la restricción presupuestaria, se obtiene la siguiente desigualdad (ver apéndice):

$$\varepsilon_t^K tVSocT + c_g g \varepsilon_g^K < \tau_g g = w\frac{I}{K} \tag{8}$$

Si CMFP = 1 en la ecuación (6), resulta $\tau_g g = \varepsilon_t^K t\,VSocT + c_g g\left(\varepsilon_g^K + \frac{\varepsilon_g^{p_g}}{\sum_n \varepsilon_{K_n}^{p_g} K_n / K}\right)$. Dado que el segundo sumando dentro del paréntesis es positivo, entonces la desigualdad en la ecuación (8) se verifica. Por continuidad, si CMFP varía en un infinitésimo, la desigualdad en la ecuación (8) sigue siendo válida y para que no exista contradicción, CMFP < 1; de lo contrario la ecuación (8) sería válida tanto con ‘<’ como con ‘>’, pero esto último es imposible. Supongamos que CMFP > 1. Haciendo un desarrollo análogo al anterior, obtendríamos

$$\varepsilon_t^K tVST + c_g g \varepsilon_g^K - \tau_g g > 0 \tag{9}$$

Pero como este resultado es inconsistente con la ecuación (9) para un valor de CMFP = 1 + κ (κ un infinitésimo positivo), CMFP no puede ser mayor que uno. Por lo tanto, el impuesto a los combustibles, en el margen, recauda una cantidad de dinero superior a los costos marginales externos por kilómetro circulado. De esta forma, se proveería mayor infraestructura vial que la correspondiente a una situación de primero mejor y mejoraría el nivel de servicio.

Si el CMFP es menor a uno, entonces un peso adicional dedicado a inversión en infraestructura vial entregaría mayor beneficio social que si dicho bien fuese dedicado a consumo privado. Con un impuesto a los combustibles, además, los conductores pagarían una cantidad de dinero por kilómetro circulado superior al costo marginal externo que tal kilómetro circulado impone. Esta diferencia está dada por el componente Ramsey necesario para cubrir los costos de la infraestructura vial.

3. EJERCICIO DE SIMULACIÓN

En esta sección, se hacen algunas simulaciones para analizar la determinación de cobros y niveles de infraestructura óptimos bajo distintos supuestos. A fin de hacer un ejercicio sencillo que permita analizar de manera estilizada los aspectos más salientes del modelo desarrollado en la sección 2, haremos algunas simplificaciones. El modelo general procede con un tratamiento lo más amplio posible sobre la congestión. En el ejercicio a desarrollar supondremos que las externalidades de congestión ocurren en el arco por el que se circula sin ‘derramamientos’ hacia otros arcos de la red vial. De esta manera se puede analizar un arco de manera aislada. En segundo lugar, supondremos que existen dos tipos de individuos, personas de altos ingresos y personas de bajos ingresos. Tercero, suponemos que la demanda por transporte no depende del ingreso; de esta manera es muy sencillo obtener una curva de demanda agregada de mercado para personas de altos ingresos y otra para personas de bajos ingresos y ambas curvas conservan las propiedades de las curvas de demanda individuales. Las curvas de demanda por viaje dependen del costo generalizado de viaje, que comprende el costo monetario del tiempo de viaje más los costos por pagos de cargos viales más el pago del combustible. Se analizará en particular la demanda por utilizar un arco de longitud igual a un kilómetro.

Las curvas de demanda para las personas de altos y bajos ingresos es de elasticidad constante del tipo $K_n = K_{n0} (CG/CG_0)^{\eta}$, donde CG es el costo generalizado, el subíndice 0 hace referencia a una situación base donde el costo generalizado es CG_0 y la demanda es igual a K_{n0} y η es la elasticidad de la demanda, valor constante. La formulación de la curva de demanda por conducción bajo nuestros supuestos es compatible con la siguiente función de utilidad directa por tipo de individuo:

$$MaxU = \lambda_n X_n + \frac{K_n^{\frac{1}{\eta_n}+1}}{\left(\frac{1}{\eta_n}+1\right)\alpha_n^{\frac{1}{\eta_n}}} + V_l^n L_n$$

sujeto a las restricciones que aparecen en la ecuación (1) (n = individuos pobres, individuos ricos), (y suponiendo que el precio del bien X es 1). Debido a la estructura separable de la función de utilidad, se puede introducir las dos restricciones (presupuestaria y de uso de tiempo) en la función de utilidad directa y maximizando en K se obtiene la función de utilidad indirecta que se introduce en la ecuación (4). En relación a los ponderadores sociales, adoptamos la función de bienestar social utilitaria simétrica, es decir, $\theta_1 = \theta_2 = 1$.

El nivel de servicio del arco vial está dado por una función BPR:

$$t_a = t_a^0 \left(1 + \alpha \left(\frac{f_a}{k_a}\right)^{\beta}\right),$$

donde t_a : tiempo de viaje, t_a^0 tiempo de viaje a flujo libre en el arco *a*; *fa*: flujo total en el arco *a*, *ka*: capacidad del arco *a*, y α y β ($\beta > 1$). Se adoptan los parámetros α y β de una curva BPR para una calle céntrica de Santiago, sin presencia de transporte público. La unidad temporal de modelación será una hora. La curva de consumo de combustible es del tipo $g = a + b\, vel + c\, vel^2 + d\, vel^3$, donde *vel* es velocidad y a, b, c y d parámetros con valores tales para que el consumo disminuya ante incrementos de la velocidad.

La Tabla 1 muestra los parámetros adoptados para la modelación; todos estos valores son elegidos de manera tal que tengan algún asidero en la realidad, pero son meramente ilustrativos. El costo de la infraestructura, w, debe ser entendido como un costo por unidad de capacidad (infraestructura) vial por hora.

Tabla 1: parámetros de la simulación

	Pobres	Ricos
K_{n0}	300; 600	600; 300
η	-0,45	-0,3
V_1^n	0,05	0,04
λ_n	0,001	0,002
θ_n	1	1
VST (V_1^n / λ_n)	\$50	\$20
Parámetros de la Función BPR		
α	1,572	
β	2,957	
Parámetros de la Función de Consumo de Combustible g		
a	0,18804764	
b	-0,00437947	
c	0,00005068	
d	-1,691E-07	
c_g	\$300	
w	\$100; \$150	

VST: Valor subjetivo del tiempo

La Tabla 2 entrega los resultados cuando infraestructura y tarifa vial por kilómetro circulado se determinan de manera conjunta[6,7]. Ante un incremento en el costo de la infraestructura, la inversión vial disminuye y la tarifa vial aumenta. También disminuye la velocidad de circulación, es decir, disminuye el nivel de servicio. Por otro lado, si la proporción de personas de altos ingresos aumenta, aumentará la provisión de infraestructura y los niveles de servicios. En relación a los costos marginales de los fondos públicos, este es siempre igual a 1.

La Tabla 3 entrega los resultados de la simulación, cuando se determinan de manera conjunta la inversión en infraestructura y el impuesto a los combustibles, bajo el supuesto que $\varepsilon_g^{p_g}$ = -0,1. La inversión en infraestructura aumenta levemente, hay una mejora apenas marginal en el nivel de servicio (a nivel de decimales) y el costo monetario total por kilómetro circulado apenas se incrementa. Las demandas son prácticamente iguales al caso anterior. El CMFP es 0,98; es decir, en el margen un peso invertido en infraestructura vial entrega un beneficio mayor que si se lo dedica a consumir el bien generalizado. La recaudación por el impuesto a los combustibles supera a los costos marginales por conducción y este ingreso extra se destina a ampliar la infraestructura. Bajo las condiciones

[6] Debido a la especial estructura de la demanda, la resolución computacional del problema se realizó en una planilla Excel, que puede ser solicitada al autor.

[7] Hemos dicho que las condiciones de convexidad del problema planteado en la ecuación 4 no se han estudiado. Por ello, en todas las simulaciones realizadas hemos usado distintos puntos de partida de las variables de decisión y en todos los casos, se arriba a las mismas soluciones que satisfacen las condiciones de primer orden para un máximo.

simuladas, el efecto de eficiencia en el uso del combustible es aproximadamente igual a 0,47, valor que se encuentra dentro del rango de valores [0,2 – 0,6] que reportan Parry y Small (2005).

En la Tabla 4, se muestran los resultados de las simulaciones cuando $\varepsilon_g^{p_g}$ = -0,5. Todos los efectos anteriores se potencian: la provisión de infraestructura aumenta, la demanda se mantiene constante y el nivel de servicio, en consecuencia, aumenta. El impuesto a los combustibles también aumenta. El costo marginal de los fondos públicos disminuye, llegando a valores en torno a 0,85. Se cumple la conjetura sobre que el CMFP será menor a 1 con un impuesto a los combustibles. Así, el financiamiento de la infraestructura vial mediante el uso del impuesto a los combustible lleva a una sobreinversión en relación a una situación en la que se cobra un cargo o impuesto por kilómetro circulado. En este caso, la eficiencia energética, medida por la fórmula $\left(\varepsilon_g^K + \frac{\varepsilon_g^{p_g}}{\varepsilon_{K_n}^{p_g}} + 1 \right)^{-1}$, se ubica en torno 0,31, una vez más un valor consistente con los reportados en la literatura.

Con estas simulaciones se puede apreciar otro efecto: la demandad vial total apenas cambia, pero sí se observa un pequeñísimo pero sistemático incremento de la demanda vial de las personas de altos ingresos y una pequeñísima pero sistemática disminución en la demanda vial de personas de bajos ingresos. La explicación de esto aparentemente es la siguiente. En la sección anterior vimos que el impuesto a los combustibles por kilómetro circulado es mayor que el costo de la externalidad. Este incremento en el pago por kilómetro circulado remueve de las calles a algunas personas de bajos ingresos que no pueden afrontar ese mayor pago. Esta disminución del flujo mejora los niveles de servicio y entonces para las personas de altos ingresos el costo generalizado de conducir cae. Por el contrario, para las personas de bajos ingresos el costo generalizado de conducir sube. De esta manera, vemos que el uso del impuesto al combustible como vehículo de financiamiento de la infraestructura vial tiene efectos redistributivos que favorecen a las personas de mayores ingresos.

Tabla 2: Determinación conjunta Infraestructura y tarifa vial por kilómetro, resultados de la simulación

Costo Infraestructura $	Demanda Inicial Ricos veh/h	Demanda Inicial Pobres veh/h	Capacidad Infraestructura veh/h	Demanda Ricos veh/h	Demanda Pobres veh/h	Flujo veh/h	Velocidad km/h	Tarifa por km $	Costo monetario total por km $	Costo total* por km $ Ricos	Costo total* por km $ Pobres	Costo marginal fondos públicos
100	600	300	848	506	197	703	32	121	149	244	187	1
150	600	300	704	473	177	649	27	163	194	306	239	1
100	300	600	733	252	396	648	29	113	143	248	185	1
150	300	600	598	235	356	591	24	152	185	311	235	1

*Por costo total debe entenderse costo generalizado.

Tabla 3: Determinación conjunta Infraestructura e impuesto a los combustibles, resultados de la simulación ($\varepsilon_g^{p_g}$ =-0,1)

Costo Infraestructura $	Demanda Inicial Ricos veh/h	Demanda Inicial Pobres veh/h	Capacidad Infraestructura veh/h	Demanda Ricos veh/h	Demanda Pobres veh/h	Flujo veh/h	Velocidad km/h	Impuesto a los combustibles por km $	Costo monetario total por km $	Costo total* por km $ Ricos	Costo total* por km $ Pobres	Costo marginal fondos públicos
100	600	300	856	506	197	703	32	122	150	244	188	0,98
150	600	300	710	473	176	649	27	164	195	305	239	0,98
100	300	600	741	252	396	648	29	114	144	247	185	0,98
150	300	600	604	235	355	591	24	153	186	310	236	0,98

*Por costo total debe entenderse costo generalizado.

Tabla 4: Determinación conjunta Infraestructura e impuesto a los combustibles, resultados de la simulación ($\varepsilon_g^{p_g}$ =-0,5)

Costo Infraestructura $	Demanda Inicial Ricos veh/h	Demanda Inicial Pobres veh/h	Capacidad Infraestructura veh/h	Demanda Ricos veh/h	Demanda Pobres veh/h	Flujo veh/h	Velocidad km/h	Impuesto a los combustibles por km $	Costo monetario total por km $	Costo total* por km $ Ricos	Costo total* por km $ Pobres	Costo marginal fondos públicos
100	600	300	913	506	195	701	35	130	157	243	192	0,85
150	600	300	754	473	175	648	30	175	204	304	244	0,87
100	300	600	797	253	393	646	33	123	151	244	188	0,84
150	300	600	647	236	353	589	27	165	196	305	239	0,86

*Por costo total debe entenderse costo generalizado.

4. CONCLUSIONES

Bajo economías de escala en la construcción de caminos y suponiendo tanto que las funciones de tiempos medios de viaje y consumo de combustible son homogéneas de grado cero en el flujo y la capacidad vial, la decisión conjunta de establecer una tarifa por kilómetro circulado y de inversión en infraestructura vial generará suficientes recursos para el financiamiento de la infraestructura. En este caso, el cobro por kilómetro circulado iguala el costo externo por congestión (tanto en términos de demoras de viaje como de consumo extra de combustible) por kilómetro circulado. Este resultado se mantiene si se introducen externalidades adicionales que se originan a partir del flujo total circulado. En la literatura, este resultado es conocido como el teorema 'Mohring-Harwitz'.

Debido a la eficiencia de los combustibles, el impuesto a los combustibles es un instrumento segundo mejor para el financiamiento de infraestructura vial con cargo a usuarios. Este es el principal resultado de esta investigación. La eficiencia de los combustibles permite eludir parcialmente este impuesto haciendo uso de automóviles más eficientes. Por esta razón, al decidir de manera conjunta el monto del impuesto a los combustibles y la inversión en infraestructura, el monto de aquél es superior al costo externo por kilómetro circulado. La diferencia se explica por el componente Ramsey necesario incluir en el respectivo impuesto para el financiamiento de la infraestructura con cargo a usuarios. Con el cobro de un impuesto a los combustibles, se tiene que la inversión en infraestructura se incrementa en relación a los flujos de tráfico cuando se compara con un instrumento de tarificación primero mejor. De esta manera, el costo marginal de los fondos públicos es menor a uno, implicando que en el margen socialmente es más rentable invertir un peso en infraestructura vial que dedicarlo a mayor consumo de bienes privados. Estos resultados son el principal aporte de esta investigación.

Se realizó un ejercicio de simulación que corroboró todos los resultados expuestos en los dos párrafos anteriores. A medida que la eficiencia de los combustibles aumenta, el uso del impuesto a los combustibles como herramienta de tarificación conduce a situaciones que más se alejan de la situación óptima primero mejor. El principal impacto observado es en términos de la inversión en infraestructura. En una situación de segundo mejor la provisión de infraestructura es mayor que en una situación primero mejor. La demanda total apenas varía, pero con el uso de impuestos a los combustibles se observan (leves) impactos redistributivos que favorecen a las personas de mayores ingresos y perjudican a las personas de menores ingresos.

Como paso futuro deberían realizarse simulaciones que consideren estructuras de red y de demanda más complejas a los efectos de estudiar si los impactos observados en nuestro análisis se magnifican o no. En especial si se magnificará el resultado observado en términos redistributivos por aplicación del impuesto a los combustibles, tendríamos entonces un argumento a favor de la tarificación vial si es que esta fuese a reemplazar el impuesto a los combustibles: se verían favorecidas las personas de menores ingresos. Otra dirección en la que el modelo debe extenderse es en la incorporación de algún modo de transporte público dentro de las posibles opciones de viaje, de manera tal que también se vea afectada la decisión de poseer o no un vehículo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco los comentarios de dos réferis que contribuyeron a mejorar el contenido del documento. Agradezco también al proyecto FONDECYT 1100631 y al Instituto Milenio Sistemas Complejos en Ingeniería (ICM:P-05-004-F;CONICYT: FBO16) por el apoyo financiero provisto.

REFERENCIAS

Baumol, W. y Bradford, D. (1970) Optimal Departures from Marginal Cost. Pricing. *American Economic Review* 60, 265-283

Baumol, W. and Oates, J. (1988) *The Theory of Environmental Policy*, Segunda Edición, Cambridge University Press. Cambridge.

Newbery, D. (2005) Why Tax Energy? Towards a More Rational Energy Policy. *Cambridge Working Papers in Economics* CWPE 0508.

Parry, Ian W. H. and Small, K A. (2004) Does Britain or the United States Have the Right Gasoline Tax? *Resources for the Future, Discussion Paper*: No. 02-12, (http://www.rff.org/rff/Documents/ RFF-DP-02-12.pdf).

Sandmo, A. (1998) Redistribution and the marginal cost of public funds. *Journal of Public Economics* 70, 365–382.

Small, K.A. y E.T. Verhoef (2007) *The* Economics *of* Urban Transportation. Routledge, London.

APENDICE: deducción de fórmulas

Tarifa vial por kilómetro circulado:

$$\frac{\partial}{\partial p_k} = \sum_n \theta_n V_{p_k}^n + \left(\frac{\partial t}{\partial F} \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} \right) \sum_n \theta_n V_t^n + \frac{\partial g}{\partial F} \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} \sum_n \theta_n V_g^n +$$

$$+ \mu \left(K + p_k \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} + \tau_g \frac{\partial g}{\partial F} \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} K + \tau_g g \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} \right) = 0$$

Trabajando sobre la función de utilidad indirecta del consumidor, pasamos a

$$-\sum_n \theta_n \lambda_n K_n - \left(\frac{\partial t}{\partial F} \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} \right) \sum_n \theta_n V_L^n K_n - p_g \frac{\partial g}{\partial F} \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} \sum_n \theta_n \lambda_n K_n +$$

$$+ \mu \left(K + p_k \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} + \tau_g \frac{\partial g}{\partial F} \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} K + \tau_g g \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} \right) = 0$$

$$-\sum_n (\theta_n \lambda_n - \mu) K_n - \left(\frac{\partial t}{\partial F} \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} \right) \sum_n \theta_n \lambda_n \frac{V_L^n}{\lambda_n} K_n - p_g \frac{\partial g}{\partial F} \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} \sum_n \theta_n \lambda_n K_n +$$

$$+ \mu \left(p_k \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} + \tau_g \frac{\partial g}{\partial F} \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} K + \tau_g g \sum_n \frac{dK_n}{dp_k} \right) = 0$$

$$-\sum_n (\theta_n \lambda_n - \mu) \frac{K_n}{\sum_n \frac{dK_n}{dp_k}} - \frac{\partial t}{\partial K} \sum_n \theta_n \lambda_n \frac{V_L^n}{\lambda_n} K_n - p_g \frac{\partial g}{\partial K} \sum_n \theta_n \lambda_n K_n + \mu \left(p_k + \tau_g \frac{\partial g}{\partial K} K + \tau_g g \right) = 0$$

$$-p_k \sum_n (\theta_n \lambda_n - \mu) \frac{K_n}{\sum_n \varepsilon_{K_n}^{p_k} K_n} - \frac{\partial t}{\partial K} \sum_n \theta_n \lambda_n \frac{V_L^n}{\lambda_n} K_n - p_g \frac{\partial g}{\partial K} \sum_n \theta_n \lambda_n K_n + \mu p_k + \mu \left(\tau_g \frac{\partial g}{\partial K} K + \tau_g g \right) = 0$$

$$p_k \sum_n \left(\theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} - 1 \right) \frac{K_n}{\sum_n \varepsilon_{K_n}^{p_k} K_n} + \frac{\partial t}{\partial K} \sum_n \theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} \frac{V_L^n}{\lambda_n} K_n + p_g \frac{\partial g}{\partial K} \sum_n \theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} K_n - \tau_g \frac{\partial g}{\partial K} K - \tau_g g = p_k$$

$$p_g \frac{\partial g}{\partial K} \sum_n \theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} K_n + \frac{\partial t}{\partial K} \sum_n \theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} \frac{V_L^n}{\lambda_n} K_n - \tau_g \frac{\partial g}{\partial K} K - \tau_g g = p_k - p_k \sum_n \left(\theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} - 1 \right) \frac{K_n}{\sum_n \varepsilon_{K_n}^{p_k} K_n}$$

$$p_k = \frac{p_g \frac{\partial g}{\partial K} \sum_n \theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} K_n + \frac{\partial t}{\partial K} \sum_n \theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} \frac{V_L^n}{\lambda_n} K_n - \tau_g \frac{\partial g}{\partial K} K - \tau_g g}{1 - \sum_n \left(\theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} - 1 \right) \frac{K_n}{\sum_n \varepsilon_{K_n}^{p_k} K_n}}$$

De esta expresión se llega a la ecuación (5) en la sección 2.

Impuesto a los combustibles:

$$\frac{\partial}{\partial\tau_g} = \sum_n \theta_n V_{\tau_g}^n + \left(\frac{\partial t}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g}\right)\sum_n \theta_n V_t^n + \left(\frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g} + \frac{\partial g}{\partial\tau_g}\right)\sum_n \theta_n V_g^n +$$

$$+\mu\left(p_k\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g} + gK + \tau_g\left(\frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g} + \frac{\partial g}{\partial\tau_g}\right)K + \tau_g g\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g}\right) = 0$$

Trabajando sobre la función de utilidad indirecta del consumidor, pasamos a

$$-g\sum_n \theta_n\lambda_n K_n - \left(\frac{\partial t}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g}\right)\sum_n \theta_n V_L^n K_n - p_g\left(\frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g} + \frac{\partial g}{\partial\tau_g}\right)\sum_n \theta_n\lambda_n K_n +$$

$$\mu\left(p_k\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g} + gK + \tau_g\left(\frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g} + \frac{\partial g}{\partial\tau_g}\right)K + \tau_g g\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g}\right) = 0$$

$$-g\left(\sum_n(\theta_n\lambda_n - \mu)K_n\right) - \left(\frac{\partial t}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g}\right)\sum_n \theta_n V_L^n K_n - \left(\frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g} + \frac{\partial g}{\partial\tau_g}\right)\left(p_g\sum_n \theta_n\lambda_n K_n - \mu\tau_g K\right) +$$

$$+\mu\left(p_k\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g} + \tau_g g\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g}\right) = 0$$

$$\frac{-g\left(\sum_n(\theta_n\lambda_n - \mu)K_n\right) - \left(\frac{\partial t}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g}\right)\sum_n \theta_n V_L^n K_n - \left(\frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g} + \frac{\partial g}{\partial\tau_g}\right)\left(p_g\sum_n \theta_n\lambda_n K_n\right) + \mu p_k\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g}}{\left(-\left(\frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g} + \frac{\partial g}{\partial\tau_g}\right)K - g\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g}\right)} = \mu\tau_g$$

$$\mu\tau_g = \frac{-g\frac{\left(\sum_n(\theta_n\lambda_n - \mu)K_n\right)}{\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g}} - \frac{\partial t}{\partial K}\sum_n \theta_n V_L^n K_n - \left(\frac{\partial g}{\partial K} + \frac{\frac{\partial g}{\partial\tau_g}}{\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g}}\right)\left(p_g\sum_n \theta_n\lambda_n K_n\right) - \mu p_k}{\left(-\left(\frac{\partial g}{\partial K} + \frac{\frac{\partial g}{\partial\tau_g}}{\sum_n \frac{dK_n}{d\tau_g}}\right)K - g\right)}$$

$$g\tau_g = \frac{p_g g\left[\frac{\left(\sum_n \theta_n \frac{\lambda_n}{\mu} K_n/K\right)}{\sum_n \varepsilon_{K_n}^{p_g} K_n/K} - \frac{1}{\sum_n \varepsilon_{K_n}^{p_g} K_n/K} + \left(\varepsilon_g^K + \frac{\varepsilon_g^{p_g}}{\sum_n \varepsilon_{K_n}^{p_g} K_n/K}\right)\sum_n \theta_n \frac{\lambda_n}{\mu}\frac{K_n}{K}\right] + \varepsilon_t^K t \sum_n \theta_n \frac{V_L^n}{\mu}\frac{K_n}{K} - p_k}{\left(\varepsilon_g^K + \frac{\varepsilon_g^{\tau_g}}{\sum_n \varepsilon_{K_n}^{\tau_g} K_n/K} + 1\right)}$$

De esta expresión, se llega a la ecuación (6) en la sección 2.

Provisión de infraestructura

$$\frac{\partial}{\partial I} = \sum_n \theta_n V_t^n \left(\frac{\partial t}{\partial I} + \frac{\partial t}{\partial F}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right) + \sum_n \theta_n V_g^n \left(\frac{\partial g}{\partial I} + \frac{\partial g}{\partial F}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right) - \mu w + \mu\tau_g \left(\frac{\partial g}{\partial I} + \frac{\partial g}{\partial F}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right)K +$$

$$+\mu\tau_g g \sum_n \frac{dK_n}{dI} + \mu p_k \sum_n \frac{dK_n}{dI} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial I} = -\sum_n \theta_n V_L^n K_n \left(\frac{\partial t}{\partial I} + \frac{\partial t}{\partial F}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right) - p_g \sum_n \theta_n \lambda_n K_n \left(\frac{\partial g}{\partial I} + \frac{\partial g}{\partial F}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right) - \mu w + \mu\tau_g \left(\frac{\partial g}{\partial I} + \frac{\partial g}{\partial F}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right)K +$$

$$+\mu\tau_g g \sum_n \frac{dK_n}{dI} + \mu p_k \sum_n \frac{dK_n}{dI} = 0;$$

Costo marginal de los fondos públicos si la infraestructura se financia con impuestos a los combustibles ($p_k = 0$)

$$\frac{-\left(\frac{\partial t}{\partial I} + \frac{\partial t}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right)\sum_n \theta_n \frac{V_L^n}{\mu}\frac{K_n}{K} - \frac{w}{K} + \tau_g \left(\frac{\partial g}{\partial I} + \frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right) + \frac{1}{K}\tau_g g \sum_n \frac{dK_n}{dI}}{p_g \left(\frac{\partial g}{\partial I} + \frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right)} = \sum_n \theta_n \frac{\lambda_n}{\mu}\frac{K_n}{K} > 1;$$

Si $\left(\frac{\partial g}{\partial I} + \frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right) = \frac{g}{I}\varepsilon_g^K \left(-1 + \sum_n \varepsilon_{K_n}^I \frac{K_n}{K}\right)$, supongamos entonces que $\left(-1 + \sum_n \varepsilon_{K_n}^I \frac{K_n}{K}\right)$ es negativo.

$$\frac{-\left(\frac{\partial t}{\partial I} + \frac{\partial t}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right)\sum_n \theta_n \frac{V_L^n}{\mu}\frac{K_n}{K} - \frac{w}{K} + \tau_g \left(\frac{\partial g}{\partial I} + \frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right) + \frac{1}{K}\tau_g g \sum_n \frac{dK_n}{dI}}{p_g \left(\frac{\partial g}{\partial I} + \frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right)} > 1$$

$$-\left(\frac{\partial t}{\partial I} + \frac{\partial t}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right)\sum_n \theta_n \frac{V_L^n}{\mu}\frac{K_n}{K} - \frac{w}{K} + \tau_g \left(\frac{\partial g}{\partial I} + \frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right) + \frac{1}{K}\tau_g g \sum_n \frac{dK_n}{dI} < p_g \left(\frac{\partial g}{\partial I} + \frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial t}{\partial I}+\frac{\partial t}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right)\sum_n \theta_n \frac{V_L^n}{\mu}\frac{K_n}{K}-c_g\left(\frac{\partial g}{\partial I}+\frac{\partial g}{\partial K}\sum_n \frac{dK_n}{dI}\right)+\frac{1}{K}\tau_g g\sum_n \frac{dK_n}{dI}<\frac{w}{K}$$

$$-\varepsilon_t^K t\left(-1+\sum_n \varepsilon_{K_n}^I \frac{K_n}{K}\right)VST-c_g g\varepsilon_g^K\left(-1+\sum_n \varepsilon_{K_n}^I \frac{K_n}{K}\right)+\tau_g g\sum_n \varepsilon_{K_n}^I \frac{K_n}{K}<\frac{wI}{K}$$

$$-\varepsilon_t^K t\left(-1+\sum_n \varepsilon_{K_n}^I \frac{K_n}{K}\right)VST-c_g g\varepsilon_g^K\left(-1+\sum_n \varepsilon_{K_n}^I \frac{K_n}{K}\right)+\tau_g g\left(\sum_n \varepsilon_{K_n}^I \frac{K_n}{K}-1\right)<0$$

$$\left(-1+\sum_n \varepsilon_{K_n}^I \frac{K_n}{K}\right)\left(-\varepsilon_t^K tVST-c_g g\varepsilon_g^K+\tau_g g\right)<0$$

$$\left(-\varepsilon_t^K tVST-c_g g\varepsilon_g^K+\tau_g g\right)>0$$

$$\left(\varepsilon_t^K tVST+c_g g\varepsilon_g^K-\tau_g g\right)<0$$

Y así obtenemos la ecuación (9) en el texto. Si por el contrario $\left(-1+\sum_n \varepsilon_{K_n}^I \frac{K_n}{K}\right)$ es negativo, una vez más arribamos a la misma ecuación (9).