

# JUEGO DE RUTEO HETEROGENEO Y DINÁMICO BASADO EN TRÁFICO VEHICULAR URBANO

*José Muñoz-Figueroa, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile  
Blanco Encalada #2002, Santiago, Chile  
[jomunozf@gmail.com](mailto:jomunozf@gmail.com)*

*Cristián E. Cortés Carrillo, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile  
Blanco Encalada #2002, Santiago, Chile  
[ccortes@ing.uchile.cl](mailto:ccortes@ing.uchile.cl)*

*Francisco Martínez Concha, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile  
Blanco Encalada #2002, Santiago, Chile  
[fmartine@ing.uchile.cl](mailto:fmartine@ing.uchile.cl)*

## **Abstract**

En este artículo se presenta la formulación de un juego de congestión dinámico y heterogéneo para el análisis del tráfico vehicular urbano, reconociendo tres aspectos distintivos del tráfico vehicular, que no han sido debidamente incorporados en una formulación integrada: heterogeneidad de los usuarios (distintos tipos de conductores), contexto dinámico en que se desarrolla (los vehículos van entrando a la red en el tiempo) y anisotropía de la congestión (ésta depende de lo que ocurre aguas arriba).

Se comienza presentando una primera versión del juego en donde sólo hay elección de tiempo de entrada, encontrándose expresiones analíticas para las funciones de mejor respuesta, cuya estructura permite demostrar la existencia y unicidad del equilibrio de Nash, además de proporcionar un algoritmo para calcularlo. Este juego es expandido al caso de un par OD y rutas paralelas, encontrándose nuevamente expresiones analíticas para las funciones de mejor respuesta, que resultan ser una generalización de las encontradas en el juego de elección de tiempo. Además, la preservación de la estructura de las mismas permite demostrar existencia del equilibrio de Nash y el desarrollo de un procedimiento para calcularlo.

Los siguientes pasos se enfocarán en explorar la factibilidad de encontrar expresiones válidas para arcos de más de una pista, y finalmente para modelar al caso general de una red de configuración más compleja, lo que trae asociado modelar de una forma plausible las dinámicas en los nodos intermedios de una ruta.

**Palabras clave:** *juego ruteo, heterogeneidad de usuarios, asignación de tráfico*

**Numero de palabras:**5.492

## **1. Introducción**

En las principales ciudades o aglomeraciones urbanas de alta densidad en el mundo, se observan en la actualidad serios problemas de congestión vehicular, los cuales se asocian principalmente a la creciente tasa de motorización observada en la última década. Este incremento en número y uso del automóvil se explica en

parte por el aumento de ingreso de las personas, en conjunto con provisiones deficientes de los servicios de transporte público, los que han sido poco competitivos con el automóvil en casi todos los aspectos (tiempos de viaje, comodidad, cero tiempo de espera, disponibilidad a cualquier hora, etc.); esta situación se observa con mayor frecuencia en las grandes ciudades de países emergentes. Las condiciones de alta congestión conducen a mayores índices de contaminación, y lo más importante, mayores tiempos de traslado, tanto para los usuarios del transporte público como los de transporte privado, lo que se traduce en una menor calidad de vida y una menor productividad de los ciudadanos de estos centros urbanos. En resumen, la congestión del tráfico es un problema enorme en el diseño, la planificación y la sostenibilidad de las grandes ciudades. Debemos reconocer que la congestión es en realidad una consecuencia derivada de las decisiones de viaje de los usuarios que están utilizando la red de transporte de la ciudad. Este es un problema conocido en la literatura de transporte (asignación de tráfico), y ha sido tratado analíticamente bajo muchos enfoques en la literatura especializada. La motivación para este trabajo viene de reconocer tres aspectos distintivos del tráfico vehicular, que no han sido debidamente incorporados en una formulación integrada: heterogeneidad de los usuarios (distintos tipos de conductores), contexto dinámico en que se desarrolla (los vehículos van entrando a la red con el tiempo) y anisotropía de la congestión (depende de lo que pase aguas arriba).

El problema de la congestión en redes de transporte y de la asignación de tráfico ha sido estudiado por bastante tiempo. Los enfoques utilizados pueden catalogarse de acuerdo a la metodología: analíticos o numéricos (simulación), o de acuerdo a la naturaleza del tráfico: estático o dinámico. Dentro de los métodos analíticos y estáticos, resaltan el uso de optimización de flujos estáticos (Beckmann *et al.*, 1956), teoría de gases cinéticos (Lighthill y Whitham, 1955; Richards, 1956), y teoría de juegos (Roughgarden, 2005), mientras que en su versión dinámica, más conocida como DTA (*dynamic traffic assignment*), incluye enfoques tales como inecuaciones variacionales, flujos dinámicos y control óptimo. La revisión de Peeta y Ziliaskopoulos (2001) ofrece una completa visión de los avances en esta área. En este trabajo nos centraremos en el enfoque basado en teoría de juegos, puesto que representa de una manera más directa el problema a estudiar, y que se puede relatar como: un número de automovilistas (jugadores) distintos entre sí, los cuales deben escoger de manera simultánea el instante en el cual comenzar el viaje (*departure time*) y ruta sobre una misma red (vialidad urbana), y en donde los costos de cada uno (tiempos de viaje) dependen de lo que hayan decidido los demás.

El juego de ruteo clásico considera solo la elección de ruta, y los costos por ruta dependen de la ocupación de cada arco de la misma, medida esta última como el número de jugadores que lo utilizan. En un contexto de tráfico vehicular, este último supuesto es especialmente sensible, debido a que en una red de transporte la congestión que experimenta un automovilista se debe sólo a la influencia de los usuarios que han entrado antes. Este fenómeno se conoce en la literatura como anisotropía de la congestión, y dentro del contexto de teoría de juegos ha sido reconocido por Farzad *et al.* (2008), quienes extienden el juego de ruteo clásico a uno denominado “con prioridad”, tanto en sus versiones atómicas como no-atómicas, y en donde pueden incluirse elementos dependientes del tiempo. Sin embargo, la elección de tiempo de entrada o bien no se considera, o se deja de manera implícita; de acá que esta decisión queda representada como un proceso independiente en algunos casos, o bien como una decisión condicionada de un nivel superior.

En este trabajo se plantea un juego en el cual agentes diferenciados por su velocidad máxima deseada (o de flujo libre) eligen de forma simultánea tiempo de entrada y ruta, y en donde los tiempos de viaje para cada usuario dependerán de los agentes que han ingresado antes a la red, de una forma consistente con las propiedades observadas del tráfico vehicular. En Helbing (2001) se recopilan los fenómenos más recurrentes que se han visto de manera empírica; el que nos interesa a nosotros es el hecho de que los vehículos más lentos son los que congestionan a los más rápidos.

De todo lo anterior, se puede decir que la contribución de esta investigación por sobre la literatura existente está en plantear un problema de esta naturaleza en el contexto de un juego de ruteo dinámico, donde el modelo de seguimiento vehicular considerado incorpora heterogeneidad, y donde los jugadores deciden de manera estratégica, a diferencia de los tratamientos existentes que se basan en juegos obtenidos de flujos agregados (visión macroscópica). En este enfoque la congestión depende de los usuarios que comparten el recurso, notando que la congestión no es función directa de los flujos (modelos macroscópicos clásicos), sino que se genera a partir de las decisiones que toman los usuarios más lentos. Adicionalmente, se incorpora el elemento dinámico en el contexto del juego al considerar la elección tanto del tiempo de entrada a la red así como de la ruta.

## 2. Primera versión: juego con elección de tiempo de entrada.

El contexto en que se desarrolla el primer modelo será el siguiente: se considera un único par OD unido por un único arco, de largo  $L$  y de una pista (sin opciones de adelantamiento). En el origen de este par OD hay  $N$  jugadores (automovilistas), diferenciados por velocidad máxima deseada  $u$ , los cuales deben decidir el instante en que entrarán al arco. El objetivo de cada uno de ellos es minimizar su costo generalizado de transporte, que consta de dos componentes: el tiempo de viaje neto, es decir, cuanto demora el jugador en recorrer la totalidad del arco, y el *scheduledelaycost* (*SDC*), asociado con el instante en que llega a destino (que coincide con el instante en que completa el recorrido del arco). Así, el costo generalizado del jugador  $i$ ,  $c_i$ , es igual a

$$c_i(s_i, s_{-i}) = tv_i(s_i, s_{-i}) + \varphi_i(t_i + tv_i(s_i, s_{-i})) \quad \forall i, \forall s \quad (1)$$

y el problema que enfrenta cada jugador es

$$\min_{s_i \in S_i} c_i(s_i, s_{-i}) \quad (2)$$

donde  $tv_i(s)$  es el tiempo de viaje neto del jugador  $i$ , y  $\varphi_i$  es la función de *SDC* correspondiente a dicho jugador, evaluada en el instante en que  $i$  llega a destino, definido como  $t_i + tv_i$ .

En todo lo que sigue, supondremos para cada  $i$  que  $\varphi_i$  es continua, positiva y convexa, definida para todo  $t \geq 0$ , con un único mínimo en  $T_i^*$ , y para el cual  $\varphi_i(T_i^*) = 0$ . Este valor  $T_i^*$  será llamado el *instante ideal para llegar a destino* correspondiente al jugador  $i$ ; es fácil ver que si  $i$  es capaz de llegar a destino en el instante  $T_i^*$ , entonces el aporte que hace el *SDC* al costo generalizado es cero.

## 3. Naturaleza de las trayectorias tempo-espaciales (Modelo de seguimiento vehicular)

Dado un vector  $s$ , llamaremos  $\sigma = \sigma(s)$  al ordenamiento de los jugadores con respecto al tiempo de entrada en orden creciente, es decir,  $t_{\sigma(1)} \leq t_{\sigma(2)} \leq \dots \leq t_{\sigma(n)}$ . En lo que sigue, abusaremos de la notación al reconocer  $\sigma(i) = i$ , y hablaremos entonces del  $i$ -ésimo jugador para reconocer a  $\sigma(i)$ . Ahora bien, supondremos que las trayectorias tempo-espaciales  $T_i^x$ , que denotan el tiempo total (i.e. desde cero) en que el  $i$ -ésimo jugador recorre la distancia  $x$ , cumplen con la siguiente recursión

$$\begin{aligned} T_1^x &= \tau_1^x \\ T_i^x &= \max\{\tau_i^x, T_{i-1}^x + \epsilon\} \end{aligned} \quad (3)$$

donde

$$\tau_i^x = t_i + \frac{x}{u_i} \quad \forall x, i \quad (4)$$

son las curvas tempo-espaciales a flujo libre de cada jugador y  $\epsilon$  es la distancia temporal mínima entre vehículos consecutivos. El asumir  $\epsilon \neq 0$  obliga a considerar como factibles aquellos perfiles sociales  $s$  para los cuales se tenga  $t_i - t_j \geq \epsilon \quad \forall i, j \in N$ . En efecto, consideremos un perfil social  $s$  tal que  $\exists i, j$  tq  $t_j < t_i < t_j + \epsilon$ . Como hay finitos jugadores podemos suponer s.p.g. que  $i$  entra justo después de  $j$ , por lo que  $T_i^x = \max\left\{t_i + \frac{x}{u_i}, T_j^x + \epsilon\right\}$ . Además, se puede suponer que  $j$  viaja a flujo libre, con lo cual  $T_j^x = t_j + \frac{x}{u_j}$  (es cierto cuando  $x$  es pequeño). Evaluando en  $x = 0$ , tendríamos que  $T_i^0 = \max\{t_i, t_j + \epsilon\} = t_j + \epsilon$ , y así  $T_i^0 - t_i = t_j + \epsilon - t_i > 0$ , pero el tiempo de viaje (neto) necesario para recorrer una distancia de 0 es 0, por lo que las fórmulas pierden consistencia. Dicho esto, por simplicidad asumiremos en todo lo que sigue que  $\epsilon = 0$ .

Ahora bien, de (3) y  $\epsilon = 0$  es fácil ver que

$$T_i^x = \max_{1 \leq k \leq i} \left\{ t_k + \frac{x}{u_k} \right\} = \max_{1 \leq k \leq i-1} \left\{ \overbrace{\max\left\{t_i + \frac{x}{u_i}, t_k + \frac{x}{u_k}\right\}}^{T_{ik}^x} \right\} \quad (5)$$

Se tiene que el término  $T_{ik}^x$  corresponde al máximo de 2 funciones lineales (en  $x$ ), y en donde además  $t_k < t_i$ . Como las trayectorias tienen sentido para  $x \geq 0$ , es fácil ver que si  $u_k \geq u_i$  entonces  $T_{ik}^x = t_i + \frac{x}{u_i} \quad \forall x$ . De aquí se concluye que sólo los jugadores con velocidad menor a  $u_i$  pueden congestionar a  $i$ .<sup>1</sup>

Para un arco de longitud  $L$ , los tiempos totales de transporte se obtienen evaluando (3) en  $x = L$ . Abusaremos un poco de la notación al escribir  $T_i = T_i^L$  como el tiempo total de transporte para  $i$  en este contexto. Como hemos caracterizado el tiempo total para cada jugador, el costo generalizado de transporte para  $i$  será

$$c_i = T_i - t_i + \phi_i(T_i) \quad \forall i \quad (6)$$

Como último comentario, notar que cuando dos o más jugadores han escogido el mismo tiempo de entrada, el ordenamiento  $\sigma$  no es único. Luego, dependiendo de la forma en que se escoja  $\sigma$ , podemos tener desde que todos los jugadores que escogen un mismo tiempo no se congestionan entre sí, hasta que todos son congestionados desde un inicio por el más lento de ellos.

Es fácil ver de (5) que si  $t_i = t_k \wedge u_i \geq u_k \wedge k < i$ , entonces  $T_i > t_i + \frac{L}{u_i}$ , por lo que  $i$  viaja congestionado al escoger  $t_k$  como su tiempo de salida. Luego, podemos deducir que el ordenamiento  $\sigma$  bajo el cual se tiene la no-congestión mutua cumple con la siguiente condición:

$$\text{Si } \exists l \geq 1, k \geq 1 \text{ tq } t_{\sigma(l-1)} < t_{\sigma(l)} = t_{\sigma(l+1)} = \dots = t_{\sigma(l+k)} < t_{\sigma(l+k+1)} \Rightarrow u_{\sigma(l)} \geq u_{\sigma(l+1)} \geq \dots \geq u_{\sigma(l+k)} \quad (7)$$

---

<sup>1</sup> En efecto, cuando  $u_k < u_i$  se tiene que

$$T_{ik}^x = \begin{cases} t_i + \frac{x}{u_i} & \text{si } x \leq \frac{u_k u_i (t_i - t_k)}{u_i - u_k} \\ t_k + \frac{x}{u_k} & \text{si } x > \frac{u_k u_i (t_i - t_k)}{u_i - u_k} \end{cases}$$

Por lo que si el arco es lo suficientemente grande,  $i$  será congestionado por alguno de estos jugadores (si es que existen)

Considerando que  $t_{\sigma(0)} = 0$  y  $t_{\sigma(n+1)} = \infty$ , entonces  $l \in \{1, \dots, n-1\}$ . Por el contrario, el ordenamiento  $\sigma$  que logra la auto-congestión (i.e. todos son dominados desde el comienzo por el más lento de ellos) cumple la siguiente condición

$$\text{Si } \exists l \geq 1, k \geq 1 \text{ tq } t_{\sigma(l-1)} < t_{\sigma(l)} = t_{\sigma(l+1)} = \dots = t_{\sigma(l+k)} < t_{\sigma(l+k+1)} \Rightarrow u_{\sigma(l)} \leq u_{\sigma(l+1)} \leq \dots \leq u_{\sigma(l+k)} \quad (8)$$

En todo el desarrollo posterior, se asumirá implícitamente que el ordenamiento  $\sigma$  que se utiliza para el cálculo de (5) cumple con (8), es decir, los jugadores que escogen un mismo tiempo de entrada no se congestionan entre sí.

#### 4. Funciones de mejor respuesta para el juego de elección de tiempo

Para el desarrollo de las funciones de mejor respuesta, consideraremos que la numeración de los jugadores es tal que  $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n$ .

Partamos por analizar al jugador 1. Dado que es el de menor velocidad, es claro que este jugador no puede ser congestionado por ningún otro (ver (5)), por lo que cualquiera sea su elección de tiempo de entrada, su tiempo de viaje neto será siempre igual a  $\frac{L}{u_1}$ . Luego, es fácil ver que la mejor respuesta de 1 es igual a

$$BR_1(s_{-1}) = t_1^* = T_1^* - \frac{L}{u_1} \quad (9)$$

En donde  $t_1^*$  corresponde al tiempo ideal de entrada para el jugador 1. Notar que la mejor respuesta de 1 no depende del vector  $s_{-1}$ , i.e. la estrategia  $t_1^*$  es dominante para 1.

Veamos que sucede para el jugador 2. Como a este jugador solo lo puede congestionar 1, su mejor respuesta dependerá exclusivamente de la estrategia escogida por 1. Diremos que el jugador 1 define sobre 2 *un intervalo de dominancia*  $\mathcal{I}_{12} = \left(t_1, T_1 - \frac{L}{u_2}\right)$ , que corresponde al conjunto de tiempos de entrada para 2 que entregan un tiempo total de transporte de  $T_1$  y un tiempo de viaje neto mayor al de flujo libre; es decir, si 2 decide entrar al arco en  $t \in \mathcal{I}_{12}$ , entonces su tiempo total de viaje será  $T_1$  y su tiempo de viaje neto será  $T_1 - t_2 > \frac{L}{u_2}$  (ver (5) con  $t_2 \in \mathcal{I}_{12}$ ). La situación descrita se muestra en la figura 1.

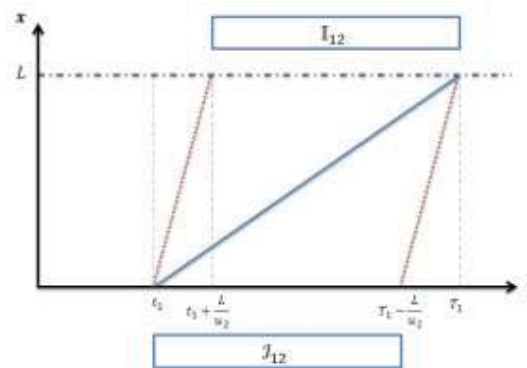


Figura 1. Intervalos de dominancia e imposibilidad para 2, inducidos por 1.

En los extremos de  $\mathcal{J}_{12}$ , el jugador 2 viaja a flujo libre, por lo que los tiempos totales de transporte que se obtienen son  $t_1 + \frac{L}{u_2}$  y  $T_1$  respectivamente. Por ende, existe un intervalo de tiempos totales de viaje a los cuales 2 no puede acceder, y cuyos extremos son precisamente  $t_1 + \frac{L}{u_2}$  y  $T_1$ . Así, definimos el *intervalo de imposibilidad* que 1 define sobre 2,  $\mathbb{I}_{12}$ , como

$$\mathbb{I}_{12} = \left(t_1 + \frac{L}{u_2}, T_1\right) \quad (10)$$

y que representa los tiempos totales de transporte que 2 no puede alcanzar debido a la presencia de 1 en el arco. Es fácil ver que los intervalos de dominancia e imposibilidad están relacionados de la siguiente forma:

$$\mathcal{J}_{12} = \mathbb{I}_{12} - \frac{L}{u_2} \quad (11)$$

Es decir,  $\mathcal{J}_{12}$  es una traslación de  $\mathbb{I}_{12}$ .

Ahora bien, si  $T_2^* \notin \mathbb{I}_{12}$ , entonces la mejor respuesta de 2 será escoger su tiempo ideal de entrada, dado por

$$t_2^* = T_2^* - \frac{L}{u_2} \quad (12)$$

Al elegir este tiempo de entrada 2 viaja a flujo libre y llega a destino en  $T_i^*$ , por lo que su costo generalizado es el mínimo posible.

Por otro lado, si  $T_2^* \in \mathbb{I}_{12}$ , entonces 2 debe elegir entre dos opciones, que corresponden a los extremos del intervalo de dominancia correspondiente, es decir:

- Entrar en  $t_1$ , llegando a destino en  $t_1 + \frac{L}{u_2} < T_2^*$ .
- Entrar en  $T_1 - \frac{L}{u_2}$ , con lo cual llega a destino en  $T_1 > T_2^*$ .

Como en ambas alternativas 2 viaja a flujo libre<sup>2</sup>, basta comparar  $\phi_2\left(t_1 - \epsilon + \frac{L}{u_2}\right)$  con  $\phi_2(T_1)$  para saber cuál de las dos alternativas tiene un menor costo generalizado. Así, podemos resumir la función de mejor respuesta del jugador 2 como:

$$BR_2(s_{-2}) = \begin{cases} T_2^* - \frac{L}{u_2} & \text{si } T_2^* \notin \mathbb{I}_{12} \\ t_1 & \text{si } T_2^* \in \mathbb{I}_{12} \wedge \phi_2\left(t_1 + \frac{L}{u_2}\right) \leq \phi_2(T_1) \\ T_1 - \frac{L}{u_2} & \text{si } T_2^* \in \mathbb{I}_{12} \wedge \phi_2\left(t_1 + \frac{L}{u_2}\right) > \phi_2(T_1) \end{cases} \quad (13)$$

Analicemos al jugador 3. Dado un vector  $s_{-3}$ , 3 puede calcular los tiempos totales para todos los demás; en particular para 1 y 2. Ahora bien, 1 define para 3 un intervalo de imposibilidad de  $\mathbb{I}_{13} = \left(t_1 + \frac{L}{u_3}, T_1\right)$ , y 2 define para 3 un intervalo de  $\mathbb{I}_{23} = \left(t_2 + \frac{L}{u_3}, T_2\right)$ .

Es claro que si  $T_3^* \notin \mathbb{I}_{13} \cup \mathbb{I}_{23}$ , entonces la mejor respuesta de 3 corresponde a su tiempo de entrada ideal  $t_3^* = T_3^* - \frac{L}{u_3}$ .

¿Qué pasa si no?. Reconozcamos dos casos:

1.  $\mathbb{I}_{13} \cap \mathbb{I}_{23} = \emptyset$
2.  $\mathbb{I}_{13} \cap \mathbb{I}_{23} \neq \emptyset$

---

<sup>2</sup> Notar que en la primera opción se llega adelantado, y en la segunda atrasado.

En el primer caso, se tiene que si  $T_3^* \in \mathbb{I}_{13} \cup \mathbb{I}_{23}$ , entonces  $T_3^*$  pertenece solo a uno de los intervalos de imposibilidad, y por ende caemos en una situación análoga a la del jugador 2, en donde se debe elegir el tiempo de entrada de tal manera de caer en alguno de los extremos del intervalo de imposibilidad correspondiente (viajando en ambos casos a flujo libre).

En el segundo caso, hay que explorar bajo qué condiciones se tiene que  $\mathbb{I}_{13} \cap \mathbb{I}_{23} \neq \emptyset$ .

Pregunta clave: ¿el jugador 2 viajó a flujo libre, i.e.  $T_2 = t_2 + \frac{L}{u_2}$ ? (\*)

Si (\*) es falso, entonces  $t_2 \in (t_1, T_1 - \frac{L}{u_2}) \Rightarrow T_2 = T_1$ , y entonces  $\mathbb{I}_{23} \subset \mathbb{I}_{13}$ . Cuando  $\mathbb{I}_{23} \subset \mathbb{I}_{13}$ , el jugador 3 debe tomar en cuenta el intervalo más grande (i.e.  $\mathbb{I}_{13}$ ) como el intervalo de imposibilidad efectivo, debido a que el jugador 2 bajo estas condiciones es dominado por el jugador 1.

Si (\*) es cierta, entonces se tiene que  $t_2 \notin (t_1, T_1 - \frac{L}{u_2})$ . Analicemos los casos posibles.

Hacia abajo (i.e.  $t_2 \leq t_1$ ): Para que  $\mathbb{I}_{13} \cap \mathbb{I}_{23} \neq \emptyset$  y  $t_2 \leq t_1$ , se debe tener

$$t_1 + \frac{L}{u_3} \leq T_2 = t_2 + \frac{L}{u_2} \Rightarrow t_2 \geq t_1 - L \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} \right)$$

Así,  $t_2 \in [t_1 - L \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} \right), t_1]$ . Notar que si  $t_2 = t_1$ , entonces  $\mathbb{I}_{23} \subset \mathbb{I}_{13}$ .

Hacia arriba (i.e.  $t_2 \geq T_1 - \frac{L}{u_2}$ ): Se debe tener

$$t_2 + \frac{L}{u_3} \leq T_1 \Rightarrow t_2 \leq T_1 - \frac{L}{u_3}$$

Por lo que  $t_2 \in [T_1 - \frac{L}{u_2}, T_1 - \frac{L}{u_3}]$ . Notar que cuando  $t_2 = T_1 - \frac{L}{u_2}$ , se tiene que  $\mathbb{I}_{23} \subset \mathbb{I}_{13}$ .

Dicho esto, exploremos la mejor respuesta cuando  $\mathbb{I}_{13} \cap \mathbb{I}_{23} \neq \emptyset \wedge \mathbb{I}_{23} \not\subset \mathbb{I}_{13}$

Hacia abajo (i.e.  $t_2 < t_1 \wedge t_1 + \frac{L}{u_3} \leq T_2$ )

En este caso, el gráfico de trayectorias espacio-temporales para 1 y 2 se aprecia como el expuesto en la figura 2:

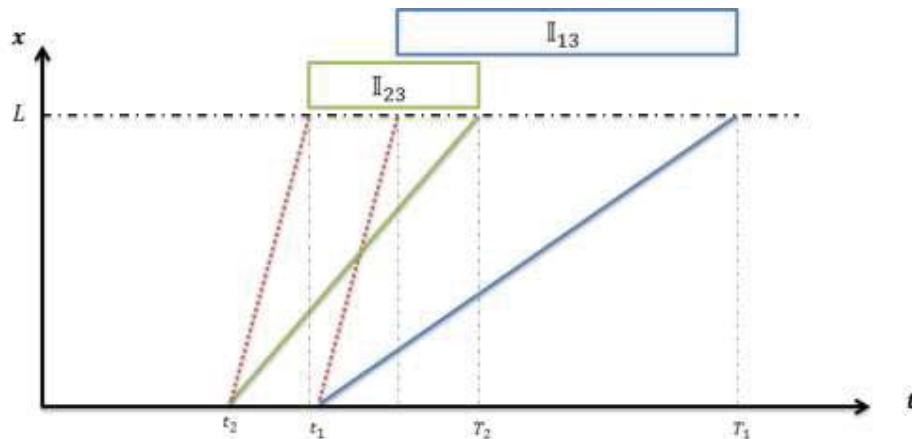


Figura 2: Ejemplo de trayectorias espacio temporales para 1 y 2 que cumplen  $\mathbb{I}_{13} \cap \mathbb{I}_{23} \neq \emptyset \wedge \mathbb{I}_{23} \not\subset \mathbb{I}_{13}$

Notar que al ir moviendo la elección de tiempo de entrada de 3 a través de  $t$ , partiendo de  $t_2$ , es posible analizar los tiempos totales que resultarían en cada elección:

- Si  $t_3 \leq t_2$ , 3 viaja a flujo libre y llega a destino en  $t_3 + \frac{L}{u_3}$ .
- Si  $t_3 \in (t_2, t_1]$ , su tiempo de llegada a destino será  $T_2$ , viajando  $T_2 - t_3 > \frac{L}{u_3}$ , i.e. no viaja a flujo libre.
- Si  $t_3 \in (t_1, T_1 - \frac{L}{u_3})$ , su tiempo de llegada a destino es  $T_1$ , y su tiempo neto de viaje es  $T_1 - t_3 > \frac{L}{u_3}$ .
- Si  $t_3 \geq T_1 - \frac{L}{u_3}$ , 3 viaja a flujo libre y llega a destino en  $t_3 + \frac{L}{u_3}$ .

Dicho esto, se debe determinar donde queda  $T_3^*$  para computar la mejor respuesta. Reconocemos los siguientes sub-casos:

- Si  $T_3^* \in \mathbb{I}_{23} \wedge T_3^* \notin \mathbb{I}_{13}$ , 3 debe escoger entre salir en  $t_2$ , viajar a flujo libre y llegar a destino en  $t_2 + \frac{L}{u_3}$ ; o salir en  $t_1$ , viajar  $T_2 - t_1$  y llegar a destino en  $T_2$ .
- Si  $T_3^* \in \mathbb{I}_{23} \cap \mathbb{I}_{13}$ , 3 debe elegir entre salir en  $t_2$ , viajar a flujo libre y llegar a destino en  $t_2 + \frac{L}{u_3}$ ; o salir en  $t_1$ , viajar  $T_2 - t_1$ , y llegar en  $T_2$ .
- Si  $T_3^* \in \mathbb{I}_{13} \wedge T_3^* \notin \mathbb{I}_{23}$ , 3 debe escoger entre entrar en  $t_1$ , viajar  $T_2 - t_1$  y llegar a destino en  $T_2$ ; o salir en  $T_1 - \frac{L}{u_3}$ , viajar a flujo libre y llegar en  $T_1$ .

Notar que los dos primeros sub-casos tienen las mismas opciones para determinar la mejor respuesta de 3. El caso *Hacia arriba* es análogo al anterior, permutando el jugador 1 con el 2. Con esto, ya estamos en condiciones para computar la mejor respuesta de 3. Para ahorrarnos una descripción exhaustiva de cada caso, propondremos una forma general para computar la mejor respuesta de cualquier jugador  $i \geq 2$ , pues ya sabemos la mejor respuesta para el jugador 1 (y que no depende de lo que hagan los demás).

Para lo que sigue conviene dar una definición general para los intervalos de imposibilidad y dominancia, válida para jugadores genéricos. Así, dados jugadores  $i, j$  con  $j < i$ , definimos el intervalo de dominancia  $\mathcal{J}_{ji}$  que  $j$  impone sobre  $i$  como

$$\mathcal{J}_{ji} = \left( t_j, T_j - \frac{L}{u_i} \right) \quad (14)$$

el cual equivale a los tiempos de entrada para  $i$  que otorgan un tiempo total de transporte igual o mayor a  $T_j$ <sup>3</sup>. Análogamente, definimos el intervalo de imposibilidad  $\mathbb{I}_{ji}$  que  $j$  impone sobre  $i$  como

$$\mathbb{I}_{ji} = \left( t_j + \frac{L}{u_i}, T_j \right) \quad (15)$$

que representa el conjunto de tiempos totales de transporte a los cuales  $i$  no puede acceder debido a la presencia de  $j$ . Es fácil ver que  $\mathcal{J}_{ji} = \mathbb{I}_{ji} - \frac{L}{u_i}$ .

#### 4.1. Procedimiento para el cálculo de la mejor respuesta para un jugador $i \geq 2$ cualquiera

<sup>3</sup>Esta definición abarca los casos en que dicho jugador  $j$  es dominado a su vez por otro jugador  $k$ .



Antes de comenzar, sabemos de (5) que los jugadores relevantes para  $i$  son los más lentos que él. Luego, de  $s_{-i}$ , solo nos interesan (en principio) las decisiones tomadas por los  $i - 1$  jugadores anteriores, por lo que si introducimos la siguiente descomposición de  $s_{-i}$ :

$$s_{-i}^- = \{s_j\}_{j < i}, \quad s_{-i}^+ = \{s_j\}_{j > i} \quad (16)$$

entonces se puede escribir lo siguiente

$$BR_i(s_{-i}) = BR_i(s_{-i}^-) \quad \forall i \geq 2 \quad (17)$$

Ahora bien, las mejores respuestas que hemos ilustrado hasta este punto nos permiten abstraernos, y derivar un procedimiento para el cálculo de la función de mejor respuesta, válido para cualquier jugador  $i$  genérico, que detallaremos a continuación.

Dado que estamos en un contexto de información completa,  $i$  conoce los tiempos totales de viaje del resto de los jugadores (dado un  $s_{-i}$ ), y puede identificar que jugadores  $j$  viajan a flujo libre, con  $j < i$ . Denotemos  $N_i^0$  dicho conjunto, es decir

$$N_i^0 = \left\{ j < i : T_j = t_j + \frac{L}{u_j} \right\} \quad (18)$$

Ocurre que es necesario eliminar de (18) a los jugadores que hayan escogido como tiempo de entrada el mismo que alguno más lento que ellos, ya que los intervalos de imposibilidad correspondientes están contenidos en el intervalo que define el más lento. Esto da origen a un nuevo conjunto, que llamaremos  $N_i$ ; si denotamos  $N_i^1 = \{j \in N_i^0 : \exists k \in N_i^0, k < j \wedge t_k = t_j\} \subset N_i^0$ , es fácil ver que

$$N_i = N_i^0 \setminus N_i^1 \quad (19)$$

Notar que  $N_i = N_i(s_{-i}^-)$ , y que por definición solo hay jugadores con tiempos de entrada distintos. Ahora bien, dentro de  $N_i$ ,  $i$  ordena a los jugadores con respecto al tiempo de entrada (de menor a mayor)<sup>4</sup>. Sea  $\delta$  dicho ordenamiento, y sea  $j$  el índice tal que

$$T_{\delta(j-1)} \leq T_i^* < T_{\delta(j)} \quad (20)$$

Notar que  $j = j(T_i^*, s_{-i}^-)$ . Definiendo  $T_{\delta(0)} = 0$ , entonces  $j \in \{1, \dots, n_i\}$ , donde  $n_i$  es el cardinal de  $N_i$  (por construcción se tiene  $n_i \leq i - 1$ ). Si tal índice no existe, entonces la mejor respuesta de  $i$  será entrar al arco en su tiempo ideal  $t_i^* = T_i^* - \frac{L}{u_i}$ . Notar que la no-existencia de dicho índice puede escribirse como  $T_i^* > T_j \quad \forall j \in N_i$ .

Supongamos entonces que dicho índice  $j$  existe; lo primero que debemos hacer es explorar la factibilidad de llegar a destino en el instante  $T_i^*$ . Para ello, consideramos el intervalo de imposibilidad que  $\delta(j)$  define sobre  $i$ ,  $\mathbb{I}_{\delta(j)i}$ , y nos preguntamos si  $T_i^* \in \mathbb{I}_{\delta(j)i}$ . Si es así,  $T_i^*$  no es alcanzable, y entonces  $i$  debe comparar el siguiente par de estrategias para determinar su mejor respuesta:

- entrar en  $t_{\delta(j)}$ , con lo cual llega a destino en  $\max\left\{t_{\delta(j)} + \frac{L}{u_i}, T_{\delta(j-1)}\right\}$ .
- entrar en  $\min\left\{T_{\delta(j)} - \frac{L}{u_i}, t_{\delta(j+1)}\right\}$  y llegar a destino en  $T_{\delta(j)}$ .

<sup>4</sup> Notar que como se cumple FIFO, los ordenamientos con respecto al tiempo de entrada y el tiempo total de transporte coinciden.

Es decir, hay que comparar  $c_i(t_{\delta(j)}, s_{-i})$  con  $c_i\left(\min\left\{T_{\delta(j)} - \frac{L}{u_i}, t_{\delta(j+1)}\right\}, s_{-i}\right)$ <sup>5</sup>. Notar que en la primera de estas opciones se llega adelantado, y en la segunda atrasado.

Por el contrario, si  $T_i^* \notin \mathbb{I}_{\delta(j)i}$ , entonces en particular se tiene que

$$T_{\delta(j-1)} \leq T_i^* < t_{\delta(j)} + \frac{L}{u_i} \Rightarrow T_{\delta(j-1)} - \frac{L}{u_i} < t_{\delta(j)} \quad (21)$$

Gracias a esto, los intervalos de dominancia que  $\delta(j-1)$  y  $\delta(j)$  definen sobre  $i$  no se intersectan (ver (14)), y así existe un intervalo de tiempos totales de transporte a los cuales  $i$  puede acceder libremente (que vive entre  $T_{\delta(j-1)}$  y  $t_{\delta(j)} + \frac{L}{u_i}$ ). En efecto, si  $i$  entra en  $t_i \in \left[T_{\delta(j-1)} - \frac{L}{u_i}, t_{\delta(j)}\right]$ , entonces  $i$  viaja a flujo libre (ver (5)) y llega a destino en  $t_i + \frac{L}{u_i} \in \left[T_{\delta(j-1)}, t_{\delta(j)} + \frac{L}{u_i}\right]$ . Por lo tanto, la mejor respuesta de  $i$  en dicho caso será escoger su tiempo ideal de entrada, dado por

$$t_i^* = T_i^* - \frac{L}{u_i} \quad (22)$$

Así, podemos dar la siguiente expresión para la función de mejor respuesta del jugador  $i$ .

$$BR_i(s_{-i}) = \begin{cases} T_i^* - \frac{L}{u_i} & \text{si } T_i^* > T_k \forall k \in N_i \vee T_i^* \notin \mathbb{I}_{\delta(j)i} \\ t_{\delta(j)} & \text{si } T_i^* \in \mathbb{I}_{\delta(j)i} \wedge c_i(t_{\delta(j)}) \leq c_i\left(\min\left\{T_{\delta(j)} - \frac{L}{u_i}, t_{\delta(j+1)}\right\}\right) \\ \min\left\{T_{\delta(j)} - \frac{L}{u_i}, t_{\delta(j+1)}\right\} & \text{si } T_i^* \in \mathbb{I}_{\delta(j)i} \wedge c_i(t_{\delta(j)}) > c_i\left(\min\left\{T_{\delta(j)} - \frac{L}{u_i}, t_{\delta(j+1)}\right\}\right) \end{cases} \quad (23)$$

Con  $N_i$  definido en (19) y  $j$  definido en (20).

## 5. Existencia y unicidad del equilibrio de Nash para el juego de elección de tiempo de entrada

### 5.1. Unicidad

Primero veamos la unicidad del equilibrio. Para ello, tomemos dos perfiles de equilibrio  $s$  y  $r$ . Como en dichos perfiles todos los jugadores están jugando una mejor respuesta, en particular esto es cierto para el jugador 1. Pero, de (9) sabemos que 1 tiene una estrategia dominante, luego en ambos perfiles la elección de 1 es la misma, i.e.  $s_1 = r_1$ .

Procediendo de forma recurrente, tenemos que la mejor respuesta de 2 depende solo de la mejor respuesta de 1, y como en ambos perfiles la decisión de 1 es la misma la decisión de 2 debe ser la misma también, luego  $s_2 = r_2$ . Siguiendo de esta forma, tendremos para un jugador  $i \geq 2$  que  $s_{-i} = r_{-i}$ , y por (17) se concluye que la mejor respuesta de  $i$  es la misma en ambos perfiles. Como esto es válido  $\forall i \geq 2$ , se tiene que  $s \equiv r$ , y así el equilibrio es único.

<sup>5</sup>Abusaremos de la notación al escribir  $c_i(t)$  para denotar el costo generalizado para  $i$  cuando él escoge  $t$  como su tiempo de entrada, en vez de  $c_i(t, s_{-i})$ .

## 5.2. Existencia

La existencia de un equilibrio (en general) puede ser planteada como un problema de punto fijo. Lamentablemente, una de las hipótesis claves en este contexto falla: la función de pagos  $c_i(s)$  no es continua como función de  $s$ , debido a que los tiempos totales de transporte son en general discontinuos.

Sin embargo, en este juego es posible demostrar la existencia del equilibrio de una forma mucho más simple, utilizando para ello la observación en (17). En efecto, de aquí podemos determinar, a partir de una estrategia  $s_1$  para el jugador 1 dada, un perfil de estrategias para los demás jugadores que conforman un equilibrio, condicional en la decisión tomada por 1. En efecto, dado  $s_1$ , este perfil se calcula mediante el siguiente algoritmo:

**Dado**  $s_1$ ;

**For**  $i = 2, \dots, n$ ;

**Calcular**  $s_i = BR_i(s_1, \dots, s_{i-1})$ ;

$i = i + 1$ ;

**Endfor**;

**Return**  $s$ ;

O sea, a partir de la estrategia de 1, calculamos la mejor respuesta para 2; con estos valores, calculamos la mejor respuesta de 3, y así sucesivamente, hasta llegar al último jugador. Es fácil ver que el perfil generado por este procedimiento es un equilibrio para el resto de los jugadores, condicional en la estrategia de 1. Ahora, como de (8) sabemos que 1 posee una estrategia dominante, concluimos que existe un único equilibrio global del juego.

## 6. Segunda versión: juego de elección de tiempo de entrada y ruta sobre una red de arcos paralelos

Generalicemos el juego anterior, añadiendo la elección de ruta como parte de la estrategia del jugador  $i$ . Así, la estrategia de  $i$  será un par ordenado  $s_i = (t_i, r_i)$ , donde  $t_i$  es el tiempo de entrada y  $r_i$  la ruta escogida por  $i$ , respectivamente. Supondremos un único par OD, unido por un conjunto  $K$  de rutas paralelas, cada una con un cierto largo  $L_k$ . Consideraremos que las rutas están numeradas de menor a mayor distancia, es decir,  $L_1 \leq L_2 \leq \dots \leq L_K$ . La red descrita se muestra en la figura 3.

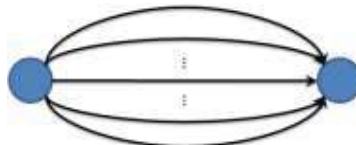


Figura 3: Red considerada

En este contexto, dado un perfil social de estrategias  $s$ , podemos particionar el conjunto de jugadores de la siguiente manera:

1. Definir los conjuntos  $M_k(s) = \{i \mid r_i = k\} \forall k$ .<sup>6</sup>
2. Determinar el ordenamiento  $\sigma_k$  de los jugadores en  $M_k$  con respecto al tiempo de entrada en orden creciente<sup>7</sup>.

Con esto tenemos, por cada ruta  $k$ , el orden en que los diferentes jugadores ingresan a ella, con lo cual se calculan los tiempos totales de viaje para cada jugador en  $M_k$  según (3), es decir,

$$\begin{aligned} T_{\sigma_k(1)} &= t_{\sigma_k(1)} + \frac{L_k}{u_{\sigma_k(1)}} \\ T_{\sigma_k(i)} &= \max \left\{ t_{\sigma_k(i)} + \frac{L_k}{u_{\sigma_k(i)}}, T_{\sigma_k(i-1)} \right\} \forall i \geq 2 \end{aligned} \quad \forall k \quad (24)$$

Supondremos que  $\forall k$ ,  $\sigma_k$  cumple con (8).

### 6.1. Funciones de mejor respuesta

Es fácil ver que si la elección de ruta para el jugador  $i$  se considera dada, entonces el proceso para encontrar el mejor tiempo de entrada es el mismo que en (23), solo que la distancia  $L$  que hay que ocupar es la de la ruta correspondiente. Así, si denotamos  $BRT_i(s_{-i}|k)$  como el mejor tiempo de entrada para el jugador  $i$  en la ruta  $k$ , se tiene que

$$BRT_i(s_{-i}|k) = \begin{cases} T_i^* - \frac{L_k}{u_i} & \text{si } T_i^* > \max_{l \in N_{ik}} \{T_l\} \vee T_i^* \notin \mathbb{I}_{\delta(j)i} \\ t_{\delta(j)} & \text{si } T_i^* \in \mathbb{I}_{\delta(j)i} \wedge c_i(t_{\delta(j)}) \leq c_i\left(\min\left\{T_{\delta(j)} - \frac{L_k}{u_i}, t_{\delta(j+1)}\right\}\right) \\ \min\left\{T_{\delta(j)} - \frac{L_k}{u_i}, t_{\delta(j+1)}\right\} & \text{si } T_i^* \in \mathbb{I}_{\delta(j)i} \wedge c_i(t_{\delta(j)}) > c_i\left(\min\left\{T_{\delta(j)} - \frac{L_k}{u_i}, t_{\delta(j+1)}\right\}\right) \end{cases} \quad (25)$$

En donde el conjunto  $N_{ik}$  es una generalización del conjunto  $N_i$  en (19) para el caso de varias rutas, dada por  $N_{ik} = N_{ik}^0 \setminus N_{ik}^1$ , con  $N_{ik}^0 = \{j \in M_k \mid j < i \wedge T_j = t_j + \frac{L_k}{u_j}\}$  y  $N_{ik}^1 = \{j \in N_{ik}^0 \mid \exists l \in N_{ik}^0, l < j \wedge t_l = t_j\}$ ,  $\delta$  es el ordenamiento de  $N_{ik}$  con respecto al tiempo de entrada en orden creciente, y  $j$  es análogo al índice definido en (20), con las salvedades anteriores.

Si denotamos

$$c_i^*(s_{-i}, k) = c_i(s_i^k, s_{-i}), \text{cons}_i^k = (BRT_i(s_{-i}|k), k) \quad (26)$$

como el costo generalizado mínimo para el jugador  $i$  en la ruta  $k$ , dado un perfil  $s_{-i}$  (i.e. el costo que obtiene  $i$  en la mejor elección de tiempo de entrada para la ruta  $k$ ), entonces la mejor respuesta del jugador  $i$  en el juego de elección de tiempo y ruta,  $t_i^*$  y  $r_i^*$ , cumple con las siguientes condiciones

$$c_i^*(s_{-i}, r_i^*) = \min_k \{c_i^*(s_{-i}, k)\} \quad (27a)$$

$$t_i^* = BRT_i(s_{-i}|r_i^*) \quad (27b)$$

<sup>6</sup> Notar que  $\cup_k M_k = N$  y que  $M_k \cap M_{k'} = \emptyset \forall k \neq k'$ .

<sup>7</sup> Es decir  $t_{\sigma_k(j)} \leq t_{\sigma_k(i)} \forall i \geq j, \forall k$ .

Lo anterior nos permite concluir que  $i$  compara solo  $K$  estrategias para elegir su mejor respuesta, dadas por  $s_i^k = (BRt_i(s_{-i}|k), k) \forall k \in K$ . Por ende, podemos escribir la mejor respuesta de  $i$  como

$$BR_i(s_{-i}) = \operatorname{argmin}_k \{c_i(s_i^k, s_{-i})\} \quad (28)$$

Notar que todo el desarrollo anterior tiene sentido si  $i \geq 2$ , pues para  $i = 1$  se tiene que  $N_{1k} = \emptyset \forall k$ , por lo que (25) no esta bien definido. Para el jugador 1, es claro que dada una ruta  $k$ , su mejor respuesta temporal será  $t_1^k = T_1^* - \frac{L_k}{u_1}$ , por lo que alcanza su costo generalizado mínimo al escoger la ruta de largo mínimo, i.e.  $r_1^* = 1$  (recordar como se numeran las rutas), y  $t_1^* = T_1^* - \frac{L_1}{u_1}$ . Luego, al igual que en el juego anterior, el jugador 1 posee una estrategia dominante  $s_1^*$ , dada por

$$s_1^* = \left( t_1^* = T_1^* - \frac{L_1}{u_1}, r_1^* = 1 \right) \quad (29)$$

Notar que en este juego se sigue manteniendo la propiedad (17), por lo que es posible demostrar la existencia del equilibrio de forma algorítmica, es decir, entregando un algoritmo que calcula dicho equilibrio.

## 6.2. Existencia y unicidad del equilibrio

### 6.2.1. Existencia

Al igual que para el caso del juego con solo elección de tiempo, para este juego también puede darse una demostración algorítmica, debido a que en este juego con elección de tiempo y ruta se sigue cumpliendo (17), y por ende podemos ir calculando de manera recursiva un perfil de equilibrio mediante el mismo algoritmo utilizado anteriormente, es decir,

**Dado**  $s_1$ ;

**For**  $i = 2, \dots, n$ ;

**Calcular**  $s_i = BR_i(s_1, \dots, s_{i-1})$ ;

$i = i + 1$ ;

**Endfor**;

**Return**  $s$ ;

Este algoritmo ejecutado desde la condición inicial  $s_1^*$  en (29) entrega un perfil de equilibrio.

### 6.2.2. Unicidad

Como hemos ampliado los grados de libertad del problema, no es tan claro que el equilibrio sea único. Si hay rutas con el mismo largo, entonces claramente el equilibrio no será único; esta fase está actualmente en investigación.

## 7. Síntesis y conclusiones

En este trabajo se presentan los primeros desarrollos en la formulación de un juego de congestión para el análisis del tráfico vehicular urbano con heterogeneidad de individuos y naturaleza dinámica.

Se comienza mostrando un primer juego que considera solo elección de tiempo de entrada, para el cual se determinan las funciones de mejor respuesta, además de demostrar la existencia y unicidad del equilibrio de Nash en estrategias puras de forma algorítmica, lo cual nos entrega una forma precisa de calcular dicho perfil de equilibrio. Este juego a continuación es extendido al caso de rutas paralelas, encontrándose las funciones de mejor respuesta como una generalización de las encontradas anteriormente, además de demostrar la existencia del equilibrio de forma algorítmica, lo que entrega un procedimiento para su cálculo. Actualmente en desarrollo está el planteamiento del juego para una red general de arcos de una pista, lo que trae asociado modelar de una forma plausible las dinámicas en los nodos intermedios de una ruta, así como también explorar la factibilidad de encontrar expresiones válidas para arcos de más de una pista, donde se abre la posibilidad del adelantamiento vehicular; este último fenómeno es de especial interés, ya que plantea la existencia de una instancia de decisión *en tiempo real* para cada jugador.

Como pasos siguientes de esta investigación, se deberá construir un modelo del juego en una red general, con arcos y cantidad de pistas variable, así como también diferentes tipos de nodos (por ejemplo intersecciones semaforizadas, ceda el paso, etc.). Con este modelo, se podrá investigar por ejemplo, la evolución día-a-día hecha por jugadores con comportamiento miope, como ya lo ha hecho Cominetti *et al.* (2010) para el juego de ruteo clásico, o utilizando el enfoque propuesto en Sandholm (2011).

## Agradecimientos

Esta investigación fue parcialmente financiada por Fondecyt (proyecto 1100239) y el Instituto Sistemas Complejos de Ingeniería (ICM P-05-004-F, CONICYT FBO16).

## 8. Referencias

- Beckmann, M., McGuire, C.B., Winsten, C.B., 1956. *Studies in the Economics of Transportation*. Yale University Press, New Haven.
- Lighthill, M.J., Whitham, J.B., 1955. *On kinematic waves II: a theory of traffic flow in long crowded roads*. Proceedings of the Royal Society A 229, 317–345.
- Richards, P.I., 1956. *Shockwaves on the highway*. Operations Research 4, 42–51.
- Roughgarden, T. 2005. *Selfish routing with atomic players*. SODA, 973–974.
- Peeta, S., Ziliaskopoulos, A. 2001. *Foundations of Dynamic Traffic Assignment: the Past, the Present and the Future*. Networks and Spatial Economics, 1, 233-265.
- Farzad, B., Olver, N., Vetta, A. 2008. *A priority-based model of routing*. Chicago Journal of Theoretical Computer Science, Article Nº 1.

Helbing, D. 2001. *Traffic and related self-driven many-particle systems*. Reviews of Modern Physics, 73, 4, 1067-1141.

Nash, J. 1951. *Noncooperative games*. Annals of Mathematics, 54, 289–295.

Cominetti, R., Melo, E., Sorin, S. 2010. *A payoff-based learning procedure and its application to traffic games*. Games and Economic Behavior, 70, 71-83.

Sandholm, W. 2011. *Population games and evolutionary dynamics*. The MIT Press.