

MODELO DE ASIGNACIÓN DE TRÁFICO BASADO EN DENSIDADES DE ARCOS

Louis de Grange

School of Industrial Engineering, Diego Portales University, Santiago de Chile.

FONO: (56-2) 2213 0469; e-mail: louis.degrange@udp.cl

Matthieu Marechal

Institute of Basic Sciences, Faculty of Engineering, Diego Portales University, Santiago de Chile.

FONO: (56-2) 2676 2409; e-mail: matthieu.marechal@mail.udp.cl

Felipe González

School of Industrial Engineering, Diego Portales University, Santiago de Chile.

FONO: (56-2) 2213 0468; e-mail: felipe.gonzalezr@udp.cl

RESUMEN

En este trabajo presentamos un nuevo modelo que permite obtener el equilibrio de tráfico en redes congestionadas, usando simultáneamente costos y densidades en arcos, de manera consistente con la ecuación fundamental del tráfico. El modelo se basa en resolver una desigualdad variacional conformada por un vector de costos asociado a la cantidad de vehículos que hay los arcos de la red durante un determinado instante de tiempo, y cuya solución proporciona un equilibrio que satisface el primer principio de Wardrop. Este modelo tiene la ventaja de que reconoce la eventual reducción en el flujo que ocurre cuando existe alta congestión en la red; también permite estimar largos de cola (número de vehículos en un arco saturado) y, además, considera explícitamente el máximo de flujo que puede circular en un arco, el cual se define por la ecuación fundamental del tráfico. Validamos el modelo usando microsimulaciones de tráfico, y además lo implementamos en la típica red definida por Nguyen-Dupuis para compararlo con el enfoque clásico basado en flujos.

Keywords: Wardrop, equilibrio de tráfico, densidad, ecuación fundamental del tráfico, desigualdad variacional.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo desarrollamos e implementamos un modelo determinístico que permite obtener el equilibrio de tráfico, en redes congestionadas, considerando las densidades en los arcos. Nuestro modelo se basa en resolver una desigualdad variacional cuyo vector de costos considera la cantidad de vehículos que desean desplazarse dentro la red en un instante de tiempo, de manera consistente con la relación entre flujo, costo (inverso de la velocidad) y densidad que proporciona la ecuación fundamental del tráfico ($flujo = velocidad \times densidad$), para cada arco de la red. La solución de esta desigualdad variacional proporciona un equilibrio a nivel de densidades en arcos que satisface el primer principio de Wardrop (Wardrop, 1952).

Las principales ventajas que presenta usar densidades en arcos para obtener el equilibrio de tráfico en una red congestionada, proporcionando un mayor nivel de realismo en la modelación respecto a los clásicos modelos de asignación de tráfico basados en flujos con funciones de costo monótonas crecientes, son las siguientes:

- i) Se reconoce que la capacidad de los arcos (o flujo máximo) no es fija o exógena, sino que depende del nivel de densidad. Es decir, el flujo máximo que es capaz de cruzar por un arco es variable y dependerá de la demanda. Esto también impide que los flujos superen las capacidades físicas de los arcos. Estas capacidades o flujos máximos se determinan en función de la velocidad y densidad en cada arco, a partir de la ecuación fundamental del tráfico.
- ii) Es posible identificar si un flujo bajo en un determinado arco se debe a una baja demanda latente por usar dicho arco (e.g. baja densidad) o, por el contrario, a que existe mucha congestión (e.g. alta densidad) y por lo tanto el flujo que es capaz de circular por dicho arco es bajo, generando cola y un mayor nivel de demora.
- iii) Es posible estimar un largo promedio de cola en los distintos arcos de la red.
- iv) Permite identificar los pares origen-destino cuyos vehículos alcanzan, en promedio, a llegar a su destino durante el período modelado, y aquellos que no alcanzarían.

2. FORMULACIÓN DEL NUEVO MODELO DE ASIGNACIÓN

2.1. Definiciones Generales

Normalmente, los flujos de tráfico no son uniformes, sino que varían en el espacio y en el tiempo, lo que representa un fenómeno difícil de describir. Sin embargo, su comportamiento tradicionalmente se explica relacionando tres variables: volumen de flujo, velocidad, y densidad (o concentración).

Bajo un enfoque determinístico, la velocidad media (V) se define como velocidad promedio de varios vehículos que pasan por una ubicación o arco específico. El flujo f (o volumen) se define como el número de vehículos que cruzan una sección específica dentro de un período de tiempo determinado. Densidad o concentración (D) se define como el número de vehículos que ocupa una sección o tramo particular de la calle, carretera o camino.

Para carreteras o caminos con varias pistas, el flujo se expresa por unidad de tiempo por cada pista de la carretera, pero debido a la condición de tráfico mixto, el flujo se expresa como vehículos por unidad de tiempo por el número total de pistas existentes (Arasan y Krishnamurthy, 2008). Lo mismo ocurre con la densidad, que también se expresa en términos de ancho total de la carretera. Una buena revisión de este tipo de modelos se puede consultar en Wang et al. (2009).

El primero y probablemente más simple modelo macroscópico de flujo de tráfico, fue propuesto por Greenshield (1935). Supone que, bajo condiciones de flujo ininterrumpido, la velocidad y la densidad están relacionados linealmente. Este modelo es considerado como la herramienta de gran alcance en el campo de la modelización del flujo de tráfico debido a su sencillez y bondad de ajuste razonable. Sin embargo, su aceptación no es universal, ya que no presenta un buen ajuste estadístico cuando hay bajos niveles de congestión. El modelo analítico de Greenshield (1935) es el siguiente:

$$V = v_0 \cdot \left[1 - \frac{D}{D_{jam}} \right] \rightarrow V = \alpha - \beta D, \quad \alpha = v_0, \quad \beta = \frac{1}{D_{jam}} \quad (1)$$

donde V corresponde a la velocidad para el nivel de densidad D , v_0 representa la velocidad a flujo libre, y D_{jam} la denominada “jam density”, la densidad para que el flujo sea cero. Un trabajo más reciente que relaciona velocidad con el uso del espacio por parte de los vehículos, en contexto de condiciones de equilibrio, es el de Martínez-Díaz y Pérez (2015). Si bien existen relaciones más complejas entre velocidad y densidad, la expresión (1) nos parece suficiente para desarrollar nuestro enfoque basado en densidades.

Por otra parte, a partir de la ecuación fundamental del tráfico podemos relacionar el flujo del arco a (f_a) con su velocidad (V_a) y su densidad, como $f_a = V_a \cdot D_a$. También podemos relacionar la velocidad con el costo o tiempo del arco a (c_a), y su longitud (l_a):

$$V_a = \frac{l_a}{c_a} \rightarrow c_a = \frac{l_a}{V_a} \rightarrow c_a(D_a) = \frac{l_a}{V_a(D_a)}$$

Finalmente, definiendo como N_a a la cantidad de vehículos que se encuentran dentro del arco a , se cumple que $N_a = l_a \cdot D_a$.

Una ventaja que tiene utilizar la expresión $V_a = V_a(D_a)$ es que permite definir el costo del arco en función de la densidad y no en función del flujo, incorporando así el típico problema que claramente se observa en la Figura 1, en el que, debido a la congestión, pueden generarse dos alternativas de tiempos de viaje o costos para un mismo nivel de flujo, como son c_a^* y c_a^{**} . En la Figura 2 se representa la típica relación entre flujo y costo considerada en los modelos de equilibrio de tráfico que incorporan congestión en la red vial, que evidentemente presenta limitaciones en situación de alta congestión debido a la relación monótona creciente entre flujo y costo.

Otra ventaja que tiene usar la densidad en lugar del flujo, es que se considera permanentemente una restricción de flujo máximo que es capaz de circular por los arcos o calles de la red. Tal como se observa en la Figura 1, el flujo del arco no puede superar el valor f_a^{max} .

Para cada arco a , el flujo máximo f_a^{max} está asociado a una determinada densidad D_a^* . Es decir, existe una densidad D_a^* para la cual se obtiene el máximo nivel de flujo del arco, definido por f_a^{max} . Por ejemplo, asumiendo una relación entre velocidad y densidad típica, como las que definió Greenshield (1935), tal que $V_a(D_a) = \alpha_a - \beta_a D_a$, con $\alpha_a > 0$ y $\beta_a > 0$, es fácil demostrar que $D_a^* = \alpha_a / 2\beta_a$ y además $f_a^{max} = \alpha_a^2 / 4\beta_a$. También es directo obtener la densidad máxima que es capaz de soportar un arco, que es aquella con la cual la velocidad en dicho arco sería cero: $D_a^{max} = \alpha_a / \beta_a$; por lo tanto, se tiene que $0 \leq D_a < \alpha_a / \beta_a$.

Figura 1

Representación Más Realista de la Relación Flujo-Demora en un Arco Vial

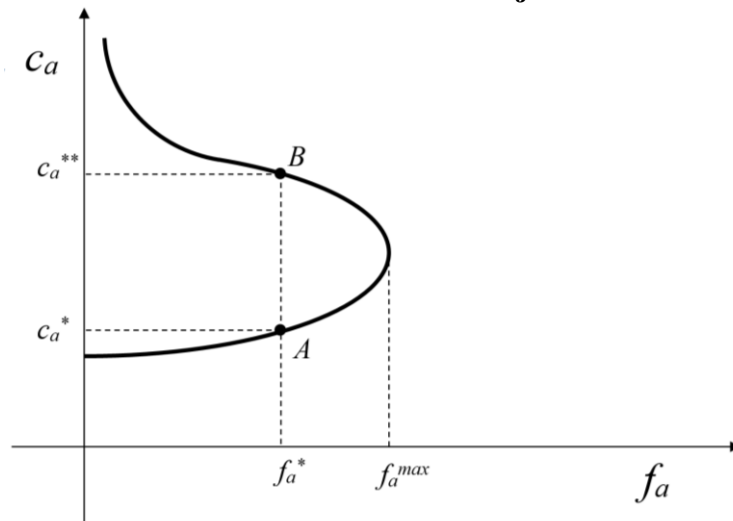
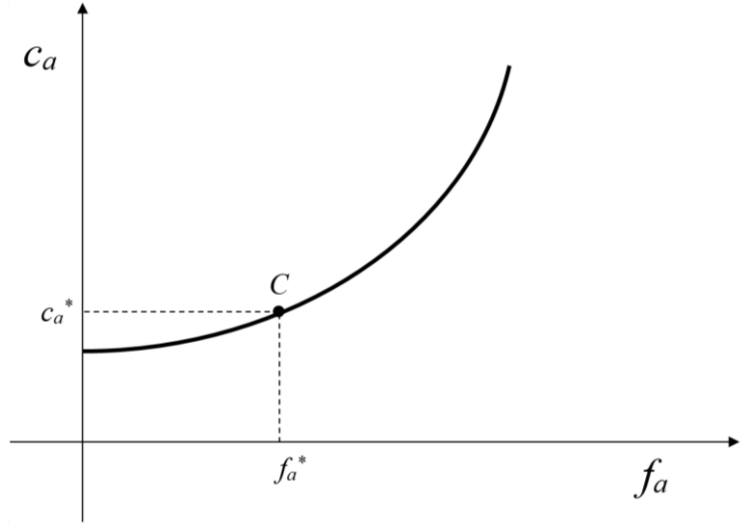
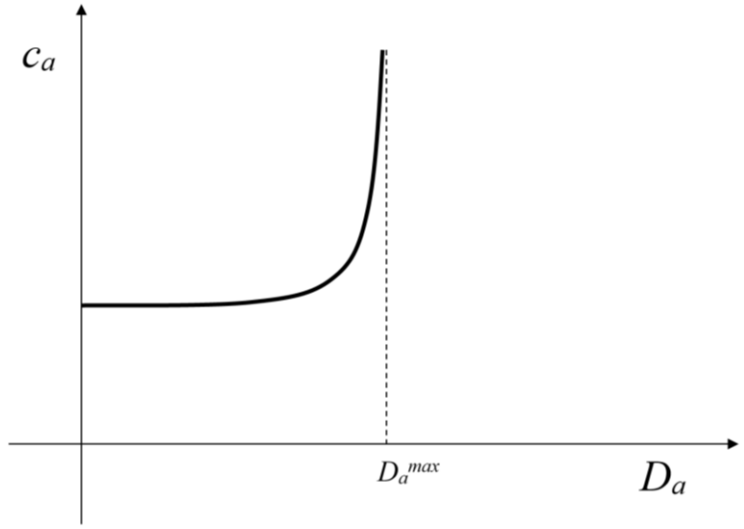


Figura 2
Representación Menos Realista de la Relación Flujo-Demora en un Arco Vial



Finalmente, la relación entre costo y densidad se representa en la Figura 3. Debe notarse que utilizar N_a en lugar de D_a , mantiene las propiedades descritas en la Figura 3.

Figura 3
Relación Densidad-Demora en un Arco Vial



2.2. Formulación Analítica del Modelo Basado en Densidades de Arcos

Consideremos un arco a con longitud l_a y cuyo costo para recorrerlo está dado por $c_a(N_a)$ donde, como ya definimos, $N_a = l_a \cdot D_a$ representa la cantidad de vehículos presentes en el arco a .

Definimos primero por W al conjunto de todos los pares origen-destino, por P el conjunto de todas las rutas en la red, y por L el conjunto de los arcos. Por cada ruta p , existe un único par origen-destino $w \in W$ tal que la ruta p recorre w . Notamos por N_p la cantidad de vehículos que recorren la ruta p . Suponemos que los vehículos se reparten de manera uniforme a lo largo de la ruta p , de tal forma que para cada arco a , N_a es la suma de las cantidades $\frac{l_a}{l_p} N_p$ donde p recorre el conjunto de las rutas que pasan por el arco a y l_p es la longitud de la ruta p , es decir

$$l_p = \sum_{a \in p} l_a.$$

Definimos además la matriz de incidencia $\Delta = (\delta_{ap})_{a \in L, p \in P}$ de tal manera que $\delta_{ap} = 1$ si la ruta p pasa por el arco a , $\delta_{ap} = 0$ sino. Entonces tenemos $N_a = \sum_{p \in P} \frac{l_a}{l_p} N_p \delta_{ap}$, que podemos escribir

$$N_a = \sum_{p \in P} q_{ap} N_p \quad \text{donde} \quad q_{ap} = \frac{l_a}{l_p} \delta_{ap}.$$

Dado un vector de cantidades de vehículos en rutas $N = (N_p)_{p \in P}$, definimos para cada ruta p su costo como $c_p(N_p) = \sum_{a \in L} c_a(N_a) \delta_{ap}$, donde

$$c_a(N_a) = \frac{l_a}{v_a}.$$

Por otra parte, el primer principio de Wardrop lo podemos expresar analíticamente como establece las condiciones expuestas en (2), donde λ^w es el costo para recorrer las rutas usadas que conectan el par origen-destino w , y $\mu_p \geq 0$ es el costo adicional para recorrer las rutas no usadas (que tienen un costo mayor que las rutas usadas por el principio de Wardrop).

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in L} c_a(N_a) \cdot \delta_{ap} &= \lambda^w + \mu_p, \quad \forall w \in W, \quad \forall p \in P^w \\
N_a &= \sum_{p \in P} N_p q_{ap} \quad \forall a \in L \\
N^w &= \sum_{p \in P^w} N_p \quad \forall w \in W \\
N_p &\geq 0 \quad \forall p \in P \\
\mu_p &\geq 0 \quad \forall p \in P \\
N_p \mu_p &= 0 \quad \forall p \in P \\
N_a &< N_a^{\max} \quad \forall a \in L
\end{aligned} \tag{2}$$

La solución del sistema expuesto en (2) proporciona el equilibrio de tráfico basado en densidades que estamos buscando. La cantidad N_a^{\max} representa la cantidad máxima de vehículos que pueden estar presentes en el arco a .

2.3. Estimación de Beneficios en la Red y Síntesis del Nuevo Modelo

Si se usara este nuevo modelo para evaluar el beneficio social de un proyecto de transporte, de tal forma que antes del proyecto el costo de equilibrio fuese C_0^w , y posterior al proyecto el costo de equilibrio fuese C_1^w , el cambio en el excedente de los consumidores (ΔEC) se puede estimar directamente como:

$$\Delta EC = \sum_w \int_{C_0^w}^{C_1^w} T^w dC^w = \sum_w \int_{C_0^w}^{C_1^w} \frac{N^w}{C^w} dC^w = \sum_w N^w \ln(C_1^w / C_0^w) \quad (3)$$

La estimación del cambio en el excedente de los consumidores en el caso del modelo clásico basado en flujos (en que los T^w son exógenos) es la siguiente:

$$\Delta EC = T^w (C_1^w - C_0^w) \quad (4)$$

En resumen, la expresión (3) establece como beneficio social de un proyecto o política de transporte, que más personas serán beneficiadas en el mismo período de tiempo. En cambio, la expresión (4) establece, como beneficio social, que las mismas personas enfrentarán un costo menor por realizar su viaje.

3. ANÁLISIS DE UNA APLICACIÓN Y COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Para aplicar nuestro modelo y compararlo con el enfoque clásico de asignación basado en flujos, utilizamos una adaptación de la red de Nguyen y Dupuis (1984), la que se expone en la Figura 4. Esta red consta de 13 nodos y de 19 arcos. Consideramos cuatro pares origen-destino: A-K, A-M, C-K y C-M.

La relación entre velocidad y densidad de cada arco la definimos como $V_a = 50 - D_a$. Es decir, la velocidad a flujo libre es de 50 km/h, la densidad que genera el flujo máximo es de 25 vehículos por kilómetro ($D_a^* = 25$), y la máxima densidad de autos es de 50 vehículos por kilómetro ($D_a^{max} = 50$). La longitud (en kilómetros) de cada uno de los 19 arcos, ordenados del 1 hasta el 13, es la siguiente: $l_a = [5 \ 1 \ 10 \ 3 \ 2 \ 9 \ 2 \ 10 \ 5 \ 10 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2]$. El flujo máximo es $f_a^{max} = 625$.

Realizamos la asignación de nuestro modelo considerando dos matrices diferentes para el número de vehículos que viaja entre cada par origen-destino (matrices N_1 y N_2):

$$\begin{aligned} N_1 &= [N_{A-K} \ N_{A-M} \ N_{C-K} \ N_{C-M}] = [500 \ 300 \ 300 \ 400] \\ N_2 &= [N_{A-K} \ N_{A-M} \ N_{C-K} \ N_{C-M}] = [300 \ 100 \ 100 \ 200] \end{aligned} \quad (5)$$

La matriz N_1 representa una situación de alta congestión en la red (1.500 autos en la red), mientras que la matriz N_2 representa una situación de menor o baja congestión (700 autos en la red). Los resultados de la asignación de ambas matrices se reportan y analizan a continuación; primero el caso de N_1 :

Figura 4

Adaptación de la red de Nguyen-Dupuis

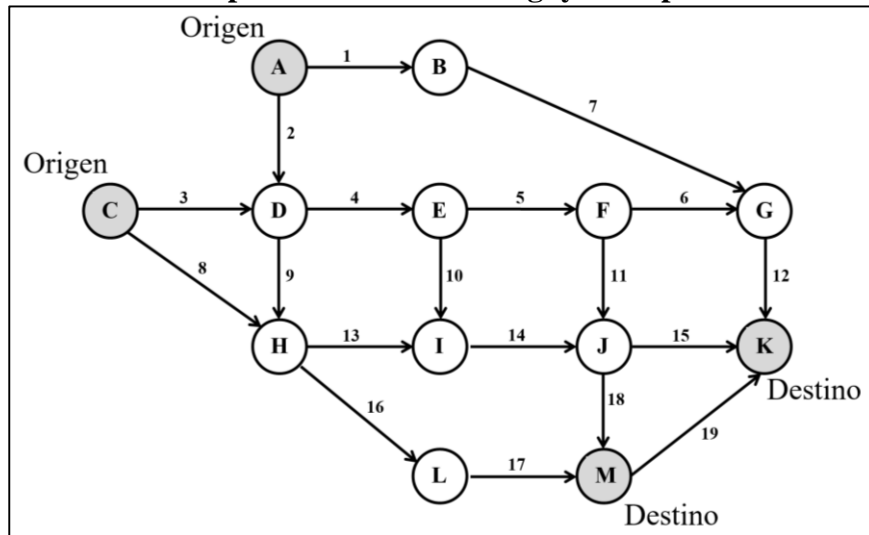


Tabla 1

Asignación de Equilibrio en Rutas para Matriz N_1 (alta congestión)

Ruta	Par Origen-Destino	N_p	C_p
1	A-K	324,11	0,643
2	A-K	0,00	0,741
3	A-K	117,43	0,643
4	A-K	0,00	0,718
5	A-K	56,19	0,643
6	A-K	1,13	0,643
7	A-K	1,14	0,643
8	A-M	111,98	0,603
9	A-M	0,00	0,678
10	A-M	54,92	0,603
11	A-M	133,10	0,603
12	C-K	0,00	0,854
13	C-K	100,24	0,757
14	C-K	0,00	0,831
15	C-K	51,93	0,757
16	C-K	145,53	0,757
17	C-K	1,14	0,757
18	C-K	1,16	0,757
19	C-M	55,67	0,717
20	C-M	0,00	0,791
21	C-M	36,71	0,717
22	C-M	67,30	0,717
23	C-M	240,32	0,717

Tabla 2
Asignación de Equilibrio en Arcos para Matriz N_1 (alta congestión)

Arco	N_a	l_a	D_a	V_a	c_a	f_a
1	180,06	5	36,01	13,99	0,357	503,74
2	43,45	1	43,45	6,55	0,153	284,44
3	124,26	10	12,43	37,57	0,266	466,90
4	93,47	3	31,15	18,85	0,159	587,22
5	62,29	2	31,15	18,85	0,106	587,22
6	0,00	9	0,00	50,00	0,180	0,00
7	72,02	2	36,01	13,99	0,143	503,74
8	284,50	10	28,45	21,55	0,464	613,10
9	123,67	5	24,73	25,27	0,198	624,93
10	0,00	10	0,00	50,00	0,200	0,00
11	62,29	2	31,15	18,85	0,106	587,22
12	72,02	2	36,01	13,99	0,143	503,74
13	53,85	2	26,93	23,07	0,087	621,29
14	53,85	2	26,93	23,07	0,087	621,29
15	66,54	2	33,27	16,73	0,120	556,60
16	78,77	3	26,26	23,74	0,126	623,42
17	78,77	3	26,26	23,74	0,126	623,42
18	49,61	2	24,80	25,20	0,079	624,96
19	0,58	2	0,29	49,71	0,040	14,40

Los resultados de la Tabla 1 muestran que para el par A-K se utilizan 5 de las 7 rutas existentes, y se verifica el primer principio de Wardrop (las rutas con vehículos tienen el mismo costo y las rutas sin vehículos tienen un costo superior). Para el par A-M, de las 4 rutas existentes, 3 están siendo usadas por vehículos. Para el par C-K, de las 7 rutas se usan 5, y por último para el par C-M, de las 5 rutas se usan 4.

De la Tabla 2 se observa que, de los 19 arcos, 2 no están siendo usados (no tienen vehículos, por lo que su flujo también es cero). También se observa que 13 arcos presentan un nivel de densidad mayor $D_a^* = 25$. Esto significa que el flujo se ubica en la parte decreciente de la Figura 1.

Para la matriz N_2 los resultados de la Tabla 3 muestran que para el par A-K se utilizan 3 de las 7 rutas existentes; para el par A-M, se utilizan 3 de las 4 rutas existentes; para el par C-K, de las 7 rutas se usan 3, y por último para el par C-M, de las 5 rutas se usan 4. Por otra parte, de la Tabla 4 se observa que, de los 19 arcos, 3 no están siendo usados (no tienen vehículos, por lo que su flujo es cero). También se observa que ningún arco presenta un nivel de densidad mayor $D_a^* = 25$. Esto significa que el flujo se ubica, para todos a los arcos, en la parte creciente de la curva presentada en la Figura 1.

Tabla 3
Asignación de Equilibrio en Rutas para Matriz N_2 (baja congestión)

Ruta	Par Origen-Destino	N_p	C_p
1	A-K	186,37	0,307
2	A-K	0,00	0,434
3	A-K	98,70	0,307
4	A-K	0,00	0,437
5	A-K	14,93	0,307
6	A-K	0,00	0,337
7	A-K	0,00	0,337
8	A-M	67,59	0,297
9	A-M	0,00	0,427
10	A-M	13,96	0,297
11	A-M	18,44	0,297
12	C-K	0,00	0,602
13	C-K	3,64	0,476
14	C-K	0,00	0,606
15	C-K	3,02	0,476
16	C-K	93,34	0,476
17	C-K	0,00	0,506
18	C-K	0,00	0,506
19	C-M	3,47	0,466
20	C-M	0,00	0,596
21	C-M	2,90	0,466
22	C-M	41,68	0,466
23	C-M	151,94	0,466

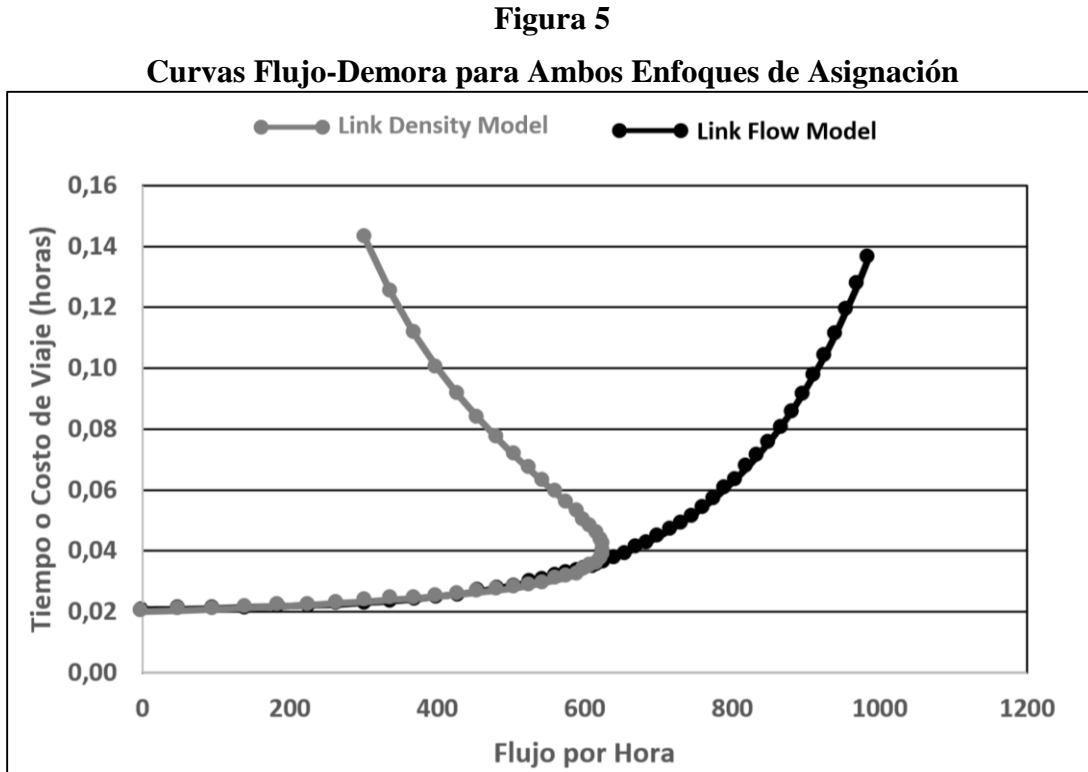
Tabla 4
Asignación de Equilibrio en Arcos para Matriz N_2 (baja congestión)

Arco	N_a	l_a	D_a	V_a	c_a	f_a
1	103,54	5	20,71	29,29	0,171	606,57
2	20,57	1	20,57	29,43	0,034	605,41
3	6,563	10	0,66	49,34	0,203	32,38
4	51,01	3	17,00	33,00	0,091	561,06
5	34,01	2	17,00	33,00	0,061	561,05
6	0,00	9	0,00	50,00	0,180	0,00
7	41,41	2	20,71	29,29	0,068	606,57
8	179,35	10	17,94	32,06	0,312	575,09
9	21,14	5	4,23	45,77	0,109	193,49
10	0,00	10	0,00	50,00	0,200	0,01
11	34,01	2	17,00	33,00	0,061	561,05
12	41,41	2	20,71	29,29	0,068	606,57
13	22,26	2	11,13	38,87	0,051	432,58
14	22,26	2	11,13	38,87	0,051	432,59
15	34,57	2	17,28	32,72	0,061	565,44
16	33,10	3	11,03	38,97	0,077	429,95
17	33,10	3	11,03	38,97	0,077	429,95
18	21,70	2	10,85	39,15	0,051	424,75
19	0,00	2	0,00	50,00	0,040	0,03

3.2. Comparación de los Modelos Basados en Densidades y en Flujos

Para realizar una comparación entre ambos enfoques de asignación, necesitamos estimar funciones flujo-demora (para el enfoque basado en flujos) que cumplan al menos dos condiciones: primero, que sean lo más parecido posible a las funciones flujo-demora consideradas en nuestra anterior asignación basada en densidades. Segundo, deben ser monótonas crecientes.

En la Figura 5 se muestra una estimación de una función flujo demora (para el enfoque basado en flujos) que satisface ambas condiciones (curva negra), y se compara con la correspondiente relación flujo-demora consistente con el modelo basado en densidades (curva gris).



Al usar funciones flujo-demora como las descritas en la curva negra de la Figura 5 se espera que, en situaciones de baja congestión, ambos enfoques de asignación (basado en densidades y basado en flujos), sean similares. Sin embargo, en situaciones de alta congestión, los resultados debieran ser diferentes. Para cada arco a de la red, la curva gris se puede estimar a partir de una función exponencial de la forma $c_a(f_a) = t_a^0 + \eta_a \exp(\rho_a \cdot f_a)$, donde t_a^0 es el tiempo a flujo libre del arco a y $[\eta_a, \rho_a]$ son parámetros positivos.

La curva punteada gris de la Figura 5 se construyó definiendo $\alpha_a = 50, \beta_a = 1$ para un arco de longitud $l_a = 1$. La curva punteada negra de la Figura 5 se construyó estimando los parámetros $[\eta_a, \rho_a]$ de tal forma que sea lo más parecida posible a la curva punteada gris en su parte creciente. Los parámetros fueron $\eta_a = 0.00053302, \rho_a = 0.0054674137$. El valor de t_a^0 consistente con una velocidad a flujo libre $\alpha_a = 50$ y una longitud $l_a = 1$ es $t_a^0 = \frac{1}{50} = 0.02$.

A partir de los valores de las matrices N_1 y N_2 , y de los respectivos costos de equilibrio entre cada par origen destino (ver Tabla 1 y Tabla 3), es posible estimar las matrices de flujos T_1 y T_2 :

$$T_1 = \begin{bmatrix} \frac{500}{0,643} & \frac{300}{0,603} & \frac{300}{0,757} & \frac{400}{0,717} \end{bmatrix} = [777,36 \quad 497,43 \quad 396,41 \quad 558,11]$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \frac{300}{0,307} & \frac{100}{0,297} & \frac{100}{0,476} & \frac{200}{0,466} \end{bmatrix} = [976,56 \quad 336,47 \quad 210,13 \quad 429,37]$$
(6)

El total de viajes de la matriz T_1 es 2.229,31 y el de la matriz T_2 es 1.952,53. Estas matrices las asignamos ahora a la misma red de la Figura 4, pero considerando ahora el clásico enfoque de asignación basado en flujos.

Por lo tanto, es esperable que para la asignación basada en flujos de la matriz T_1 , los resultados de flujos y costos en arcos sean más distintos a los obtenidos en la asignación basada en densidades de la matriz N_1 . Sin embargo, para la asignación basada en flujos de la matriz T_2 , los resultados de flujos y costos en arcos sean más similares a los obtenidos en la asignación basada en densidades de la matriz N_2 . Para el caso con alta congestión, los resultados de la asignación se reportan en la Tabla 5.

Se aprecia ahora que ambos enfoques de modelación generan resultados más diferentes en relación al ejemplo anterior con baja congestión. La correlación entre los flujos en arcos obtenidos en ambos enfoques es de 0.60, mientras que la correlación entre los costos en arcos es de 0.84.

De hecho, en el modelo basado en flujos se obtienen, en algunos arcos, un flujo significativamente superior a la capacidad teórica de 625, mientras que en el modelo basado en densidades ello nunca ocurre. Los costos también presentan importantes diferencias a nivel de arcos, siendo siempre mayores los costos en el enfoque basado en densidades.

Tabla 5
Comparación de Asignación de Equilibrio en Arcos (caso con alta congestión)

Arco	Modelo Basado en Flujos		Modelo Basado en Densidades	
	c_a	f_a	c_a	f_a
1	0,126	709,20	0,357	503,74
2	0,032	565,54	0,153	284,44
3	0,201	17,52	0,266	466,90
4	0,073	583,02	0,159	587,22
5	0,053	583,02	0,106	587,22
6	0,181	0,00	0,180	0,00
7	0,066	709,20	0,143	503,74
8	0,290	936,98	0,464	613,10
9	0,101	0,03	0,198	624,93
10	0,200	0,00	0,200	0,01
11	0,053	583,02	0,106	587,22
12	0,066	709,20	0,143	503,74
13	0,045	407,17	0,087	621,29
14	0,045	407,17	0,087	621,29
15	0,047	464,48	0,120	556,60
16	0,070	529,85	0,126	623,42
17	0,070	529,85	0,126	623,42
18	0,049	525,71	0,079	624,96
19	0,041	0,01	0,040	14,40

Los resultados de las asignaciones basadas en flujos para la matriz T_2 se reportan en la siguiente tabla, en la cual también se incluyen los resultados de la asignación basada en densidades de la matriz N_2 .

Tabla 6
Comparación de Asignación de Equilibrio en Arcos (caso con baja congestión)

Arco	Modelo Basado en Flujos		Modelo Basado en Densidades	
	c_a	f_a	c_a	f_a
1	0,127	719,31	0,171	606,57
2	0,034	593,74	0,034	605,41
3	0,200	0,00	0,203	32,38
4	0,074	593,69	0,091	561,06
5	0,054	593,69	0,061	561,05
6	0,181	0,00	0,180	0,00
7	0,067	719,31	0,068	606,57
8	0,218	639,48	0,312	575,09
9	0,101	0,06	0,109	193,49
10	0,200	0,00	0,200	0,01
11	0,054	593,68	0,061	561,05
12	0,067	719,31	0,068	606,57
13	0,042	256,51	0,051	432,58
14	0,042	256,51	0,051	432,59
15	0,047	467,36	0,061	565,44
16	0,064	383,03	0,077	429,95
17	0,064	383,03	0,077	429,95
18	0,044	382,83	0,051	424,75
19	0,041	0,00	0,040	0,03

Los resultados de Tabla 6 muestran que tanto los flujos en arcos como los costos son relativamente similares. De hecho, la correlación simple entre los flujos de equilibrio obtenidos con ambos modelos es de 0.95, mientras que la correlación simple de los costos es de 0.96.

Es interesante notar también que, en este ejemplo con baja congestión, las densidades de arcos (ver Tabla 4) eran siempre inferiores a 25, por lo que ninguno de los arcos de la red se encuentra en presencia de una congestión alta. Sin embargo, al analizar los resultados del modelo basado en flujo, es posible observar que en cuatro arcos de la red se obtiene un flujo mayor a los 625 vehículos por hora, que en teoría debiera ser la capacidad máxima de los arcos. Esto ocurre porque el modelo basado en flujos lo permite.

Los resultados anteriores sugieren que, conforme aumente el nivel de congestión en la red, las diferencias entre ambos enfoques de modelación serán más notorias. De hecho, analizando los datos de las Tablas anteriores, es posible constatar que las mayores diferencias de costos entre ambos enfoques se producen en los arcos cuya densidad es mayor que $D_a^* = 25$.

Para reforzar esta conclusión, realizamos una tercera comparación entre ambos enfoques de asignación, en un nuevo escenario que denominamos “sin congestión”. En la Tabla 7 reportamos las correlaciones entre costos en arcos bajo ambos enfoques de modelación, y entre flujos en arcos bajo ambos enfoques de modelación, para los tres escenarios de congestión (Alta Congestión, Baja Congestión, y Sin Congestión):

Tabla 7
Correlación entre Costos y Flujos bajo Ambos Enfoques de Modelación, en 3 Escenarios Diferentes de Congestión

Escenario	Vehículos	Flujos	Link Cost Correlation	Link Flow Correlation
Alta Congestión	$N_1 = 1,500$	$T_1 = 2,229.3$	0,8368	0,6043
Baja Congestión	$N_2 = 700$	$T_2 = 1,952.5$	0,9632	0,9459
Sin Congestión	$N_3 = 70$	$T_3 = 295.4$	0,9926	0,9995

De la Tabla 7 podemos concluir que, conforme aumenta el nivel de congestión, los resultados de costos y flujos en los arcos de la red son cada vez más diferentes entre ambos enfoques de asignación, mientras que si la congestión se reduce, son más parecidos.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo desarrollamos, validamos e implementamos un modelo determinístico de asignación de tráfico basado en densidades en arcos. Nuestro modelo se basa en resolver una desigualdad variacional, pero considerando la relación entre flujo, velocidad y densidad que proporciona la ecuación fundamental del tráfico para los costos de cada arco de la red. La solución de nuestro modelo proporciona un equilibrio a nivel de densidades en arcos que satisface el primer principio de Wardrop.

Nuestro modelo presenta varias ventajas al usar densidades en arcos para obtener el equilibrio de tráfico en una red, proporcionando un mayor nivel de realismo en la modelación.

En primer lugar, permite reconocer que la capacidad de los arcos (o flujo máximo) no es fija, sino que depende del nivel de densidad. Es decir, el flujo máximo que es capaz de cruzar por un arco es variable y dependerá de la demanda (i.e. densidad).

En segundo lugar, y producto de lo anterior, nuestro modelo impide que los flujos superen las capacidades máximas teóricas de los arcos. Estas capacidades o flujos máximos se determinan en función de la velocidad y densidad en cada arco, a partir de la ecuación fundamental del tráfico.

En tercer lugar, nuestro modelo nos permite identificar si un flujo bajo en un determinado arco se debe a una baja demanda latente por usar dicho arco (e.g. baja densidad) o, por el contrario, a que existe mucha congestión (e.g. alta densidad) y por lo tanto el flujo que es capaz de circular por dicho arco es bajo, generando cola y un mayor nivel de demora.

También nos permite identificar los pares origen-destino cuyos vehículos alcanzan, en promedio, a llegar a su destino durante el período modelado, y aquellos que no alcanzarían.

El impacto de la densidad sobre el flujo efectivo que es capaz de circular por un arco de la red es un antecedente importante para el diseño vial, ingresos de autopistas tarifadas, y análisis de mecanismos de precios basados en niveles de saturación.

El modelo desarrollado lo validamos mediante un microsimulador de tráfico. También aplicamos nuestro modelo para la conocida red definida por Nguyen-Dupuis.

La principal conclusión que obtuvimos de esta comparación, es que el clásico modelo basado en flujos tiende a subestimar los costos de equilibrio en la red, y que es común que los flujos superen la capacidad teórica de los arcos, incluso en situaciones de baja congestión. Además, al subestimar los costos, el modelo basado en flujos también tiende a subestimar los beneficios asociados a un proyecto vial o a políticas tendientes a reducir el uso del automóvil, como tarificación vial. Esto se debe a que, en los arcos de la red hipercongestionados, cuando se reduce el número de autos que los usan (por ejemplo, debido a que cambiaron de ruta al implementar un nuevo proyecto o a que se implementó una política de desincentivo al uso del automóvil), junto con reducir el costo se está también aumentando su capacidad. Estos inconvenientes son superados por nuestro nuevo modelo basado en densidades.

Consideramos que nuestro nuevo modelo basado en densidades representa una nueva metodología para analizar y evaluar proyectos y políticas de transporte en redes congestionadas, y que supera varias limitaciones de las clásicas metodologías que usan modelos basados en flujos en rutas.

REFERENCIAS

Arasan, V.T. and Krishnamurthy, K. (2008). Effect of Traffic Volume on PCU of Vehicles under Heterogeneous Traffic Conditions. *Road and Transport Research Journal, ARRB*, 17, 32-49.

Greenshield, B.D. (1935). A Study of Traffic Capacity. *Highway Research Board Proceedings*, 14, 448-477.

Martínez-Díaz, M. and Pérez, I. (2015). A simple algorithm for the estimation of road traffic space mean speeds from data available to most management centres. *Transportation Research Part B*, 75, 19-35.

Nguyen, S. and Dupuis, C. (1984). An efficient method for computing traffic equilibria in networks with asymmetric transportation costs. *Transportation Science*, 18, 185-202.

Wang, H.; Li, J.; Chen, Q.Y. and Ni, D. (2009). Speed-density relationship: From deterministic to stochastic In *Transportation Research Board 88th Annual Meeting*, 10 (January 2009).

Wardrop, J.G. (1952). Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. *Proceedings Institution of Civil Engineers*, II(1), 325-378.