
NODOS VULNERABLES EN REDES: UNA PERSPECTIVA DE AUTOCORRELACIÓN ESPACIAL

Natalia Ruminot¹, Antonio Páez^{2,*} y Juan Antonio Carrasco¹

¹ Área de Transporte, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Concepción. Casilla 160-C, Correo 3, Concepción, Chile. Email: j.carrasco@udec.cl

² Centre for Spatial Analysis, School of Geography and Earth Sciences, McMaster University. Hamilton, ON L8S 4K1, Canadá. Email: paezha@mcmaster.ca

RESUMEN

Comprender las características que influyen en la vulnerabilidad de las redes a interrupciones es muy relevante, considerando la importancia que tienen las redes de infraestructura, como las de transporte). Investigaciones recientes muestran que la vulnerabilidad en redes es relevante para el diseño y operación de procesos en red, identificando elementos sensibles a interrupciones en su integridad. Si bien sugieren que la configuración de la red puede influenciar la vulnerabilidad de elementos individuales, faltan investigaciones sistemáticas del rol de la topología en la vulnerabilidad, así como de la coherencia en los contenidos de la red (o flujos de autocorrelación). Este artículo busca investigar, desde la perspectiva de la integridad de sus nodos, la vulnerabilidad en la interrupción de elementos individuales de las redes, en relación a la topología y autocorrelación de la red. El análisis se basa en simulaciones numéricas para diferentes configuraciones de red y niveles de autocorrelación espacial. Los resultados obtenidos muestran que una apropiada evaluación de la vulnerabilidad de las redes requiere no sólo la comprensión de su topología, sino que también de la distribución de flujos.

Palabras clave: Vulnerabilidad en Redes, Autocorrelación Espacial, Distribución de Redes.

ABSTRACT

Understanding the network characteristics that make them vulnerable to disruption is a valuable endeavour, considering the relevance of infrastructure networks, and particularly transportation. Recent research demonstrates that network vulnerability is very relevant on the design and operation of networked processes, identifying network elements that are singularly sensible to disruptions to their integrity. While some literature suggests that the network configuration may influence the vulnerability of individual elements, a systematic investigation of network topology and vulnerability has not been conducted. Furthermore, neither has there been an account of the relevance of coherence in the contents of the network, or in other words, the autocorrelation of flows. Accordingly, the objective of this paper is to investigate, from the perspective of the integrity of nodes, the vulnerability to disruption of individual network elements, while controlling for network topology and autocorrelation. Analysis is based on extensive numerical simulations for different network configurations and spatial autocorrelation levels, and the results obtained demonstrate that the proper evaluation of network vulnerability requires not only an understanding of its topology, but also of the distribution of flows.

Keywords: Network Vulnerability, Spatial Autocorrelation, Network Distribution.

1. INTRODUCCION

1.1. Motivación y Objetivos

Las estructuras sociales y económicas modernas dependen, en un grado cada vez mayor del funcionamiento correcto de una extensa red de infraestructuras (Murray y Grubestic, 2007). De hecho, existen varios tipos de redes que constituyen los elementos claves de la economía espacial. Los bienes de la economía real, material, son movidos en redes de transporte desde sus lugares de extracción o producción a destinos y mercados espacialmente dispersos, donde son transformados o finalmente consumidos. Dada la importancia de las redes para un considerable número de aspectos en la vida moderna, la integridad de las redes es correctamente percibida como un área de investigación importante. Estudiada por varias disciplinas (Ingeniería, Geografía, Planificación, Economía), la investigación en el área de infraestructura crítica busca comprender las redes y diversos factores que afectan su potencial para contener daños o, de lo contrario, para fallar cuando su integridad se encuentra comprometida. Otro aspecto relevante en esta área de estudio es la interdicción, definida como la condición en que uno o más elementos de la red dejan de cumplir con su función (Murray *et al.*, 2007). La interdicción puede ocurrir como consecuencia de condiciones adversas medioambientales, fallas estructurales o de sistema, acción humana deliberada constructiva (e.g., mantenimiento) o destructiva (e.g., sabotaje), o una combinación de una serie de eventos no relacionados. La interdicción es relacionada a su vez con la pregunta de cómo los flujos en el sistema son afectados, y cuáles niveles de operación pueden ser mantenidos después de la interrupción.

En ese contexto, el objetivo de este artículo es contribuir al cada vez más relevante área de investigación de vulnerabilidad de redes, concentrándose en cómo forma y contenido se combinan para influenciar la habilidad de una red de enfrentar interrupciones. Específicamente, forma es definida en este caso como las características topológicas de las redes, es decir, cómo los distintos elementos se conectan para formar un todo (Wasserman and Faust, 1994). Por su parte, contenido es definido como los flujos y su nivel de autocorrelación dentro de la red, la que puede ser distribuida de manera aleatoria (especialmente independiente), u opuestamente, puede mostrar patrones coherentes y no aleatorios (o autocorrelacionados, ver Black, 1992). Existen distintas maneras para estudiar la vulnerabilidad en redes, incluyendo el uso de escenarios, estrategias, simulación y modelación matemática (Murray *et al.*, 2008). De tal forma de cumplir con el objetivo de este artículo, se diseñó un extensivo experimento de simulación para estudiar dos tipos claves de redes, basadas en la distribución de sus grados o probabilidad que un nodo tenga un determinado número de arcos conectado a él). La distribución Power Law es utilizada para producir configuraciones de red “hub-and-spoke” (Barabasi y Olivai, 2004), mientras que configuraciones “Punto-a-punto” son generadas usando la distribución de Poisson. Además de las propiedades distribucionales, se consideran varias medias de centralidad y transitividad de los nodos de la red, de forma de identificar características que permitirían que estos nodos fuesen más vulnerables a interrupciones. Respecto a los contenidos de las redes, se incorporan varios niveles de autocorrelación en la red para producir una vasta gama de distribuciones de flujos, desde aleatorio a altamente determinístico. Respecto a los distintos tipos de interdicción de los elementos de red, es posible investigar aquéllos que afectan la interrupción en arcos (Scott *et al.*, 2006; Taylor and D’Este, 2007) o por pérdida de nodos (Gubresic and Murray, 2006; Gubresic *et al.*, 2007). En este artículo, nuestro enfoque es respecto a las fallas en los nodos, notando que, en el caso de redes sin nodos aislados, la pérdida de un nodo invariablemente implica la pérdida de arcos. De esta forma, el impacto de perder un nodo es mayor que el impacto de perder un arco.

El artículo presenta en la siguiente sección algunos antecedentes que ayudan a posicionar este trabajo en la literatura, y su potencial contribución. Luego, se discuten algunas definiciones relevantes. Las secciones principales del artículo muestran la descripción detallada de los experimentos de simulación, y los correspondientes análisis y discusión de resultados.

1.2. Antecedentes

Un primer antecedente importante es el trabajo realizado por Virrantus *et al.* (2008), quienes analizan la vulnerabilidad de redes, utilizando como ejemplo el área metropolitana de Helsinki en Finlandia. Su trabajo está basado en el análisis de la topología y conectividad de la red, considerando como una medida relevante la intermediación, donde se intenta identificar aquellos arcos cuya eliminación interrumpirían el flujo normal de la red. En ese contexto, los autores logran identificar las vías más importantes (potencialmente críticas) de una red, a partir de medidas de topología y conectividad. Sin embargo, este trabajo no considera el rol de la geometría de la red u otros atributos específicos, tales como el ancho de las calles o el flujo vehicular.

Por otra parte, Scott *et al.* (2006) analizan la vulnerabilidad de redes desde el punto de vista de los arcos, aplicada a redes de transporte. Ellos introducen una medida para identificar los arcos principales de una red, basada en un índice de robustez (NRI), asociado a los costos y tiempo de viaje en cada arco de la red, que luego es comparado con los resultados obtenidos al utilizar la razón volumen/capacidad (V/C). Luego de analizar tres redes hipotéticas diferentes, sus resultados sugieren un mejor comportamiento del índice NRI respecto a V/C para estudiar la vulnerabilidad de redes en relación a sus arcos.

Un último antecedente relevante para el presente estudio, es el trabajo realizado por Knoop *et al.* (2007), quienes también se concentran en arcos críticos, basándose en el fallo del correcto funcionamiento de la red, causado por el bloqueo de algún arco. Para ello, simularon distintos flujos vehiculares en una red, bloqueando secuencialmente diferentes arcos en ella, encontrando que el bloqueo de una autopista influye de manera significativa en el buen funcionamiento de la red, no sólo para los usuarios utilizan siempre la misma ruta, sino que también para aquéllos que acomodan su ruta a las condiciones del tráfico.

En general, se puede observar que todos estos estudios estudian la vulnerabilidad de las redes considerando a los arcos como elementos críticos, sin tomar en cuenta la potencial relevancia de los nodos de una red. Además, tampoco estudian otros aspectos potencialmente importantes, tales como la forma en que se distribuye el contenido de la red, ni la concentración de zonas críticas, sino que el énfasis se centra únicamente en la topología de éstas.

2. DEFINICIONES

El lector interesado puede consultar una larga lista de posibles referencias acerca de teoría de redes de transporte (e.g., Sheffi, 1985), análisis de redes (e.g., Wasserman and Faust, 1994), y análisis espacial (e.g., Griffith, 1988) para discusiones en profundidad acerca de esta área de estudio. Para los

propósitos de este artículo, revisamos brevemente sólo algunos conceptos directamente relacionados con nuestro marco experimental.

2.1. Vulnerabilidad

La vulnerabilidad ha sido definida en la literatura de diferentes maneras y, aunque algunos aspectos específicos varían, en general tiende a existir consenso respecto a su definición. Agarwal *et al.* (2001) define las redes robustas como aquéllas que son capaces de enfrentar un daño arbitrario, definiendo vulnerabilidad como consecuencias desproporcionadas al daño. De la misma manera, Taylor and D'Este (2001) consideran que la vulnerabilidad está asociada a las consecuencias de la falla, independiente de su probabilidad. Un arco crítico es definido por Lleras-Echeverri y Sanchez-Silva (2001) como un arco cuya disrupción produce el mayor aumento en el costo de transporte. Ezell (2007) define vulnerabilidad como la susceptibilidad de un sistema a escenarios pesimistas. Finalmente, Berdica (2002) define vulnerabilidad como la susceptibilidad de una red de sufrir una pérdida significativa en su utilidad como consecuencia de un incidente.

Todas estas definiciones tienen una serie de puntos en común. Primero, están menos preocupadas de la probabilidad de falla y más de sus consecuencias. Segundo, las consecuencias tienden a ser negativas, por lo que los elementos más vulnerables de las redes serán aquéllos que produzcan mayores cambios. Finalmente, existe un umbral de aceptabilidad a los cambios, el que puede ser definido como pérdida significativa, mayor aumento en costos o daño desproporcionado, etc. Basado en lo anterior, para los propósitos de este artículo, definimos vulnerabilidad como la pérdida *significativa* de forma o funcionamiento, producto del daño al sistema. Más abajo profundizamos en este aspecto.

2.2. Medidas de Topología de las Redes

Para efectos de este artículo, se remarcan algunos conceptos relacionados con medidas específicas de centralidad en nodos y otras de topología de redes, las que serán utilizadas en el análisis posterior. Las tres medidas de centralidad más comúnmente usadas son grado, cercanía e intermediación, introducidas inicialmente en el análisis de redes sociales (Freeman, 1979). Las medidas de centralidad son valores que describen la importancia estructural de cada vértice en el grafo; vértices con una mayor centralidad, tienen un mayor impacto que otros vértices. Para esta investigación se analizan las medidas de grado e intermediación.

El *grado de un nodo* puede ser visto como una medida general de su actividad dentro de la red. Formalmente, el grado de un nodo está definido por Freeman (1979) de la siguiente manera:

$$C_D(N_i) = \frac{\sum_{k=1}^N a(p_i, p_k)}{N-1} \quad (1)$$

donde $C_D(N_i)$ corresponde al grado del nodo i , $a(p_i, p_k)$ adquiere un valor de 1 si y sólo si p_i y p_k están conectados a través de un arco, de caso contrario su valor es cero, y N corresponde a la cantidad de nodos que posee la red.

El segundo enfoque de la centralidad planteado por Freeman (1979) está basado en la frecuencia con la que un nodo se encuentra entre otros pares de nodos en la distancia geodésica. La medida de *intermediación* ha sido conceptualizada como una medida de control del flujo en la red (Wasserman y Faust, 1994), ya que intuitivamente mide los caminos donde un específico nodo se encuentra entre otros. Formalmente la intermediación está definida por Freeman (1979) como:

$$C_B(Ni) = \frac{\sum_{jk} g_{jk}(Ni) / g_{jk}}{(N-1)(N-2) / 2} \quad i \neq j, k \quad (2)$$

donde $C_B(Ni)$ corresponde a la intermediación del nodo i , $g_{jk}(Ni)$ corresponde a la cantidad de caminos geodésicos entre los nodos j y k que pasan a través del nodo i , g_{jk} es el número total de caminos geodésicos entre los nodos j y k , y N corresponde al número total de nodos de la red.

Otra característica relevante asociada a la topología de las redes es la *clusterización o transitividad* (Newman, 2003), quien la define de la siguiente manera:

$$C = \frac{3N_\Delta}{N_3} \quad (5)$$

donde C corresponde al coeficiente de clusterización, N_Δ corresponde al número de triadas en la red y N_3 corresponde al número nodos triples conectados.

2.3. Distribuciones Poisson y Power Law para la topología de la red

Con respecto a la topología de las redes, es posible diferenciar dos principales distribuciones de grado: la distribución Poisson (Erdos y Renyi, 1959) y la distribución Power Law (Barabási y Bonabeau, 2003). La distribución Poisson está definida de la siguiente manera:

$$P_k \sim e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (3)$$

Esta distribución describe *redes aleatorias*, en donde la mayoría de los nodos posee tiene aproximadamente el mismo número de arcos, cercano al grado promedio $\langle k \rangle$ (Barabási y Albert, 1999). Ejemplos de este tipo de redes corresponde a la red de carreteras secundarias en un país o de calles en una ciudad.

Por su parte, la distribución Power Law está definida de la siguiente manera:

$$P_k \sim k^{-\gamma} \quad (4)$$

Esta distribución describe *redes de escala libre*, con una pequeña cantidad de nodos con un alto grado, con una mayoría de los nodos tiene pocos arcos asociados a ellos (Reggiani *et al.*, 2008). Ejemplos de este tipo de redes corresponde a redes *hub-and-spoke* de rutas de aviones en un país.

2.4. Autocorrelación Espacial y el Coeficiente de Morán

El concepto de autocorrelación espacial fue introducido por Cliff y Ord (1973), quienes indican que una propiedad básica de datos espacialmente localizados es que los valores de las variables medidas están relacionados en el espacio. Este hecho hace directa alusión a la Primera Ley de la Geografía, que señala que si bien todas las cosas están relacionadas entre sí, las cosas más próximas en el espacio tienen una relación mayor que las distantes, formulada por Tobler (1970). Existen diferentes estadísticos para medir la autocorrelación espacial en la red; uno de los más utilizados corresponde al coeficiente I de Morán (1950), el que está definido de la siguiente manera:

$$I = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_{ij}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_{ij} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (6)$$

donde I corresponde al coeficiente de Morán, W_{ij} corresponde a la matriz de conexión de la red, en que W_{ij} es 1 si existe un arco entre el nodo i y el nodo j y W_{ij} es 0 de caso contrario. N corresponde a la cantidad de nodos de la red, x_i corresponde a la variable asociada al nodo i, x_j corresponde a la variable asociada al nodo j y por último \bar{x} corresponde al valor medio de las variables. El coeficiente de Morán varía entre +1 y -1, donde +1 significa una autocorrelación positiva perfecta (perfecta concentración), y -1 implica una autocorrelación negativa perfecta (perfecta dispersión); cero significa un patrón espacial totalmente aleatorio (Vilalta, 2005).

2.5. Nodo Vulnerable

En base a las definiciones anteriores, definimos como nodo vulnerable a aquél cuya remoción causaría un cambio en el nivel de coherencia en los flujos de la red (la autocorrelación espacial), *significativamente* diferente del estado inicial de la red. Significancia se utiliza desde el punto de vista estadístico, es decir, implica un test de diferencias.

3. DISEÑO EXPERIMENTAL

3.1. Características de las redes

Tal como se explicó anteriormente, se utilizaron dos tipos de distribuciones para la topología de las redes: Poisson y Power Law. El procedimiento usado para generar redes aleatorias con topologías controladas fue desarrollado por Volz (2004). Tres parámetros pueden ser controlados en la generación de redes simuladas utilizando esta técnica: el grado de la distribución, el grado medio, y el coeficiente de clusterización. Para cada una de las dos distribuciones de grado, se generaron 35 redes con diferentes niveles de grado y clusterización. Más detalles técnicos respecto al algoritmo, pueden ser encontrados en Volz (2004), y ejemplos de aplicaciones pueden ser encontrados en Páez *et al.* (2008) y Farber *et al.* (2009). La Tabla 1 resume de las características de las redes simuladas.

Todas las redes simuladas tuvieron un tamaño de 50 nodos, lo que implica un rango de entre 290 y 720 arcos para las redes con distribución Poisson, y entre 250 y 400 arcos para las redes con distribución Power Law. Este tamaño se fue elegido en el compromiso entre generar redes reales, pero factibles de simularen un tiempo computacional factible.

Tabla 1. Redes Simuladas

| | |
|--------------------------|-----------------------------------|
| Tamaño de Red | 50 nodos |
| Cantidad de Arcos | Entre 250 y 720 |
| Distribución de Red | Poisson, Power Law |
| Nivel de clusterización | 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 |
| Grado Medio (Poisson) | 6, 8, 10, 12, 14 |
| Grado Máximo (Power Law) | Entre 19 y 33 |

3.2. Generación de Flujos con Autocorrelación Espacial Positiva

Una vez que estas redes están generadas, el próximo paso del experimento consiste en simular los flujos de cada arco. Para ello, modelamos los flujos como variables aleatorias usando la distribución Poisson. Esta distribución es definida por conteos, lo que se juzga adecuado en el contexto de redes de transporte, en donde existen eventos discretos positivos, tales como el número de pasajeros por vehículo, el número de vuelos por aeropuerto y otras variables similares.

Para incluir la presencia de autocorrelación espacial positiva en esta distribución Poisson de las variables, se utilizó lo que se conoce como *Método de Filtro Espacial* de Griffith (2002). Este método tiene como propósito transformar una variable que contiene dependencia en dos variables, una capturando la dependencia espacial latente mediante un filtro espacial y en otra libre de dependencia espacial.

Con este propósito, Griffith (2002) propone una transformación que depende de los vectores propios de la siguiente matriz:

$$A = (I - 1 \cdot 1^T / N) \cdot W \cdot (I - 1 \cdot 1^T / N) \quad (7)$$

donde I corresponde a la matriz identidad, 1 es un vector de unos de $N \times 1$, 1^T es la transpuesta del vector 1 , N es en número de nodos de la red y W es la matriz de conectividad de la red.

Griffith (2002) ha mostrado que cada uno de los N vectores propios en la matriz A representan un patrón de mapa latente, el que puede ser utilizado por sí mismo o en combinaciones lineales de otros vectores propios de A para generar patrones con los niveles deseados de autocorrelación. Estas variables sintéticas son llamadas filtros espaciales. El valor propio asociado con cada vector propio corresponde al coeficiente de autocorrelación de Morán del patrón correspondiente. Para asignar flujos a la red, el flujo en el arco i es aleatoriamente seleccionado usando la distribución de Poisson, con un parámetro de media dada por:

$$\lambda = \alpha + \beta A_{ij} \quad (8)$$

donde α es la media de la distribución que define el nivel de autocorrelación en la red, β es el parámetro que controla el grado de autocorrelación, y A_{ij} es el i -ésimo valor del j -ésimo valor propio de \mathbf{A} . Diferentes vectores propios producen distintos patrones de flujos, donde algunos estarán más autocorrelacionados que otros. En el caso de este artículo, se seleccionaron tres vectores con altos niveles de autocorrelación (I de Morán entre 0,6 y 1), y se controló la intensidad del patrón generado a través del parámetro β . Claramente, si este parámetro es cero, los flujos serán completamente aleatorios, y cuando se acerque a 1, los flujos tenderán a retener toda la autocorrelación asociada en el vector A_i . En total, cinco distintos niveles de autocorrelación especial fueron generados (0, 0,2; 0,4; 0,6; and 0,8). Los flujos son producidos de esta forma para un total de $R=1000$ réplicas.

3.3. Disrupción de los Nodos y Estadísticas

La generación de las redes y flujos son etapas preliminares del experimento de simulación en sí. Después que todas las $K=70$ redes han sido cargadas, el proceso de simulación continúa de la siguiente manera:

1. Definir $k=1$.
2. Seleccionar la red k para el experimento.
3. Definir $r=1$.
4. Calcular el coeficiente de autocorrelación de red I de Moran para la iteración r .
5. Definir $n=1$
6. Eliminar el nodo n de la red.
7. Calcular el coeficiente de autocorrelación I'_{rn} de la red perturbada.
8. Calcular la diferencia de medias entre I e I'_{rn} ; si la diferencia es significativa a un $\alpha=0.05$, contabilizar que este es un nodo vulnerable.
9. Definir $n=n+1$, volver al paso 6; si $n=50$ ir al paso 10.
10. Definir $r=r+1$, volver al paso 4; si $r=1000$ ir al paso 11
11. Definir $k=k+1$, volver al paso 2; si $k=70$ ir al paso 12.
12. Finalizar la simulación.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1. Análisis Descriptivo

El análisis de los resultados de las simulaciones se realizó en varias etapas. En primer lugar, se visualizaron algunas redes utilizando el software UCINET (Borgatti *et al.*, 2002), de tal manera de explorar características de las redes resultantes, en cuanto a sus topologías y características de nodos y arcos. Además, este programa permitió calcular las medidas de centralidad de los nodos (grado e intermediación). La Figura 1 muestra ejemplos de una red generada con la distribución

Poisson y otra con Power Law, comprobando que el procedimiento de simulación fue el adecuado, en cuanto a replicar las topologías deseadas.

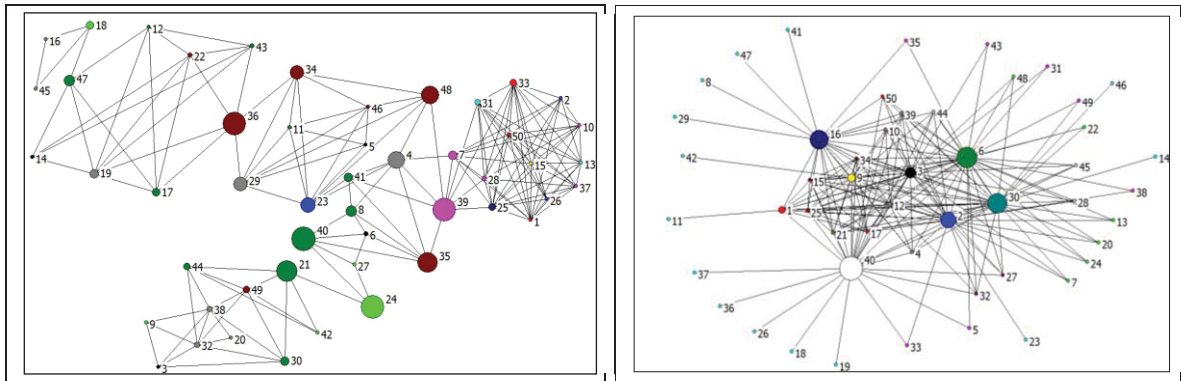


Figura 1. Ejemplos de Redes Simuladas

A continuación, se estudiaron las distribuciones de probabilidad de los coeficientes de Morán resultantes en cada experimento, así como de las diferencias entre ellos, antes y después de la eliminación de cada nodo. En ambos casos, se aceptó la hipótesis nula de Distribución Normal, mediante el método de Kolmogorov-Smirnov. De esta forma, fue posible utilizar los valores promedio de los coeficientes de Morán obtenidos de las réplicas, efectuando un test estadístico t para identificar aquéllos nodos que generan diferencias estadísticamente significativas, considerando los coeficientes de Morán antes y después de la eliminación de un nodo. Cabe notar que este test estadístico es de dos colas, es decir, la diferencia entre los promedios de los Coeficientes de Morán puede ser positiva o negativa, lo que implica que un nodo crítico puede aumentar o disminuir la vulnerabilidad de la red, al ser removido. Así, se censaron los nodos que generan diferencias estadísticamente significativas, ordenándose de mayor a menor, con el objeto de identificar cuáles nodos generan los mayores cambios desde el punto de vista de la autocorrelación espacial.

Como ejemplo de este análisis, la Figura 2 muestra que, en el caso de las redes anteriores, mayores coeficientes de Morán implican mayores coeficientes de Autocorrelación Espacial, resultado esperado, pues precisamente éste es un indicador de los niveles de relación espacial presentes en la red. Cabe destacar además, que mientras mayor es el valor propio utilizado en la simulación Poisson de las variables de los arcos de la red, mayores son los coeficientes de Morán obtenidos. Este último resultado ocurre tanto para redes con topologías distribuidas Poisson, así como en el caso de las distribuidas Power Law.

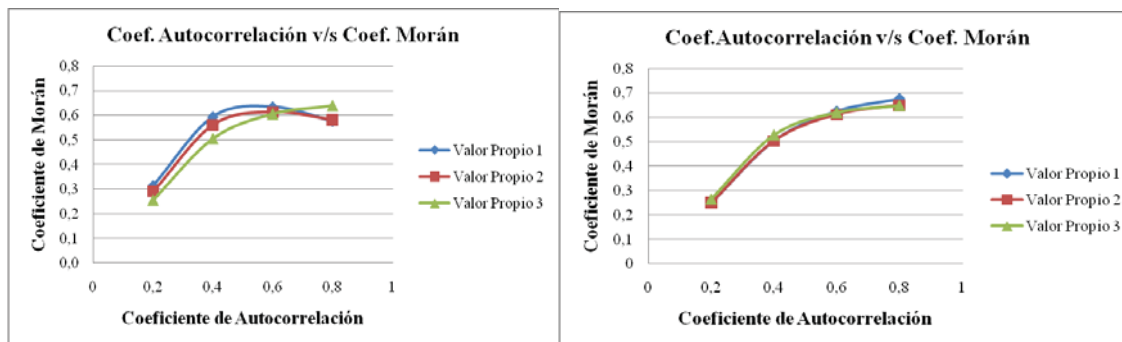


Figura 2. Coeficientes de Autocorrelación y de Morán, en Redes de Ejemplo

A continuación, se estudió la relación entre la autocorrelación existente en la red y la cantidad de nodos críticos existentes en la red. Se consideran nodos críticos a aquéllos que, al ser removidos, generan un cambio estadísticamente significativo en los niveles de autocorrelación existentes en la red, medido por el Coeficiente de Morán. La Figura 3 ilustra los resultados de estos test t para las redes de ejemplo anteriores. En general, se pudo observar que para cada uno de los vectores propios utilizados, existe una mayor cantidad de nodos críticos mientras mayor es el coeficiente de autocorrelación espacial. Es decir, el análisis sugiere que, mientras mayor sea la dependencia espacial dentro de la red, cada nodo cobra mayor importancia. Cabe notar que no se observaron diferencias significativas entre los diferentes vectores propios utilizados, lo que sugiere que el *patrón* de autocorrelación espacial existente en la red no parece ser muy relevante, si el *nivel* de autocorrelación espacial es alto.

Luego de realizado el análisis anterior a nivel de cada red, se realizó una comparación entre las distintas redes analizadas, respecto a su grado medio. Cabe notar que únicamente con las redes con distribución Poisson es posible obtener un grado medio del nodo en la red debido a que los valores de grado medio de las redes distribuidas Power Law fueron alterados, ya que el procedimiento de simulación de estas redes implicó enlazar algunos nodos que fueron generados aislados en una primera instancia.

La Figura 4 muestra la relación entre el número de nodos críticos, el grado medio de la red y el coeficiente de autocorrelación para distintos valor propio 1 y un coeficiente de clusterización de 0,2. En ella, se confirma la tendencia individual respecto a una relación positiva entre el coeficiente de autocorrelación espacial de la red y los valores de coeficiente de Morán alcanzados, resultado esperable debido a que precisamente el coeficiente de Morán mide la dependencia espacial dentro de la red. Cabe destacar que para el caso del coeficiente de autocorrelación 0,2, los valores de I de Morán alcanzados son bastante menores en comparación con los alcanzados para otros los coeficientes de autocorrelación 0,4; 0,6 y 0,8. Este último resultado sugiere que, mientras mayor es el coeficiente de autocorrelación espacial de la red, las diferencias entre valores cercanos de autocorrelación no son tan significativas, teniendo la red un nivel de vulnerabilidad similar en comparación con una red con autocorrelación espacial baja. Finalmente, de estos mismos gráficos, se observa que el grado medio de la red no tiene una influencia significativa en los coeficientes de Morán alcanzados, lo que sugiere que el coeficiente de Morán obtenido depende básicamente de la dependencia espacial existente en la red, la que a su vez no está relacionada con su grado medio.

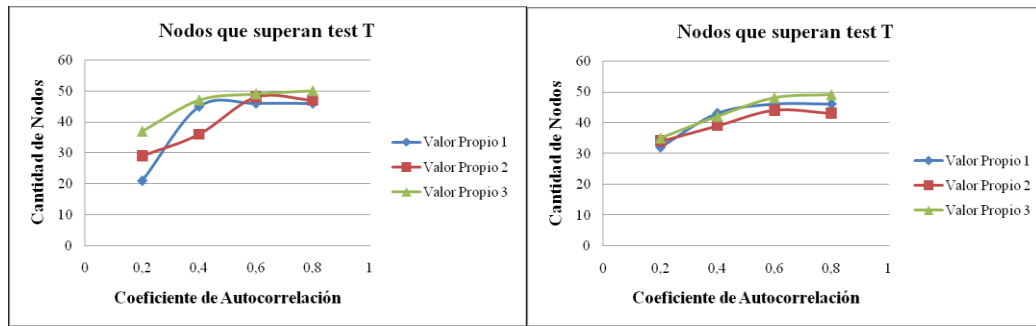


Figura 3. Nodos Críticos, Valores Propios y Coef. de Autocorrelación en Redes de Ejemplo

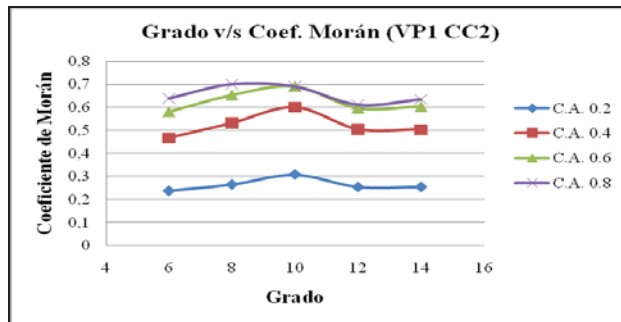


Figura 4. Rangos de Coeficientes de Morán para distintos Grados Medios, en la Red Poisson de Ejemplo, (Valor Propio1 y Coeficiente de Clusterización 0,2)

Complementando con el anterior análisis, la Figura 5 muestra la relación entre el número de nodos críticos, el grado medio de la red y el coeficiente de autocorrelación para un valor propio 1 y un coeficiente de clusterización de 0,2. Este análisis se repitió para todas las combinaciones de valores propios y coeficientes de clusterización, presentando un comportamiento muy similar. En primer lugar, se vuelve a confirmar la tendencia individual de la existencia de una mayor cantidad de nodos críticos cuando el coeficiente de autocorrelación es mayor. Es decir, mientras mayor sea la dependencia espacial de la red, mayor es la importancia de cada uno de sus nodos dentro de ella, respecto a su vulnerabilidad. Con respecto a la relación existente entre nodos críticos y el grado medio de la red, no se aprecia una tendencia clara, lo que sugiere que la forma en que la información está distribuida en la red, influye en su vulnerabilidad de manera más relevante. En otras palabras, la cantidad de nodos críticos dependería de los sectores de la red en que se concentren los valores de sus arcos más similares, y que hacen que la red posea autocorrelación espacial positiva. Es por esto, que parece ser que el grado medio de la red en términos generales no es un buen indicador para saber si la red es más o menos vulnerable.

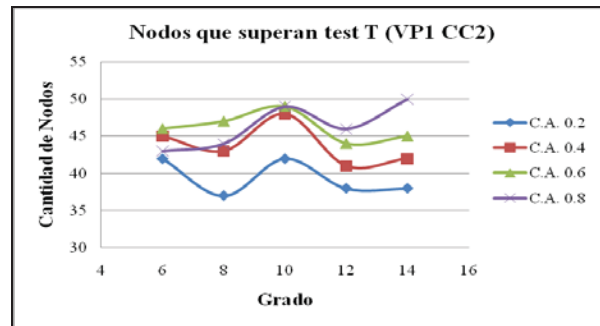


Figura 5. Nodos Críticos para distintos Grados Medios, en la Red Poisson de Ejemplo, (Valor Propio1 y Coeficiente de Clusterización 0,2)

4.2. Análisis Multivariado

Finalmente, se estimaron Modelos Lineales Generalizados (MLG) para ambos tipos de redes. Los modelos lineales generalizados son una extensión del modelo lineal clásico a una familia más general, propuesta por Nelder y Wedderburn (1972). Esta familia unifica tanto los modelos con variables independientes numéricas como categóricas, lo cual lleva a considerar otras distribuciones tales como Binomial y Poisson, entre otras, además de la normal. A diferencia de los modelos más tradicionales de regresión lineal, los MLG permiten modelar la variable dependiente con una distribución de probabilidades distinta a la Normal, además de ser capaz de incluir variables dependientes que se encuentren relacionadas linealmente con las variables independientes mediante una determinada función de *enlace*.

En el caso de los modelos empleados en este trabajo, los MLG son útiles pues modelan el caso en que se produce una cierta cantidad de eventos para un determinado número de ensayos. En este trabajo, el evento corresponde a que un nodo sea crítico en la red en un conjunto de 1000 simulaciones (i.e., ensayos). Esta variable dependiente es modelada con la distribución Binomial. A su vez, dado el carácter discreto de la formulación, la función de enlace es definida de la forma logit. Los modelos son estimados utilizando el software SPSS, y se presentan en la Tabla 5.

Para el caso de las redes con distribución Poisson se estimaron tres modelos, considerando variables a nivel de red y del nodo. La constante disminuye al incluir las características individuales de los nodos, lo que indica la relevancia de las características individuales de los nodos, en especial del grado. El coeficiente asociado a esta variable es positivo, lo que indica que, mientras mayor es el grado, mayor es su probabilidad de ser crítico en la red. A su vez, la intermediación, también resulta estadísticamente significativa, aunque con un efecto bastante bajo. En todos los modelos, la variable con mayor influencia es el coeficiente de autocorrelación espacial, indicando que, mientras mayor es el nivel de coherencia en la información de la red, más vulnerable es ésta. De esta forma, para el caso de las redes con distribución Poisson, la información que posea la red y la forma en que esté distribuida dentro de ella, es un elemento relevante para determinar su vulnerabilidad. Es decir, no basta con conocer la topología de la red, sino que se debe indagar en su contenido.

Para el caso de las redes con distribución Power Law, se estudiaron las mismas variables anteriores, con excepción de las características a nivel de red, debido a la alteración que sufrieron

éstas debido al enlazamiento de los nodos que resultaron asilados en el proceso de generación de la red. Se observa que el coeficiente asociado a la clusterización del nodo adquiere un valor considerable con respecto al resto de los coeficientes. Sin embargo, los órdenes de magnitud de la variable asociada al coeficiente de clusterización varían entre 0 y 1, por lo que la interacción del coeficiente estimado con la variable se hace bastante pequeña, teniendo casi la misma relevancia que la intermediación. De la misma forma que en la distribución Poisson, el coeficiente de autocorrelación espacial es muy relevante para modelar la vulnerabilidad de las redes.

Tabla 5. Modelos Lineales Generalizados

| Variable | Distribución Poisson | | | | | | Distribución Power Law | |
|---|----------------------|-------|------------|-------|------------|-------|------------------------|------------|
| | Modelo 1 | | Modelo 2 | | Modelo 3 | | Modelo 1 | |
| | Coef. | Sign. | Coef. | Sign. | Coef. | Sign. | Coef. | Sign. |
| Constante | 0.900 | 0.000 | 0.635 | 0.000 | 0.640 | 0.000 | -1.041 | 0.000 |
| G6 | Referencia | | Referencia | | Referencia | | - | - |
| G8 | 0.104 | 0.000 | 0.045 | 0.000 | 0.045 | 0.000 | - | - |
| G10 | 0.214 | 0.000 | 0.095 | 0.000 | 0.095 | 0.000 | - | - |
| G12 | 0.246 | 0.000 | 0.043 | 0.000 | 0.043 | 0.000 | - | - |
| G14 | 0.402 | 0.000 | 0.135 | 0.000 | 0.136 | 0.000 | - | - |
| CC2 | Referencia | | Referencia | | Referencia | | - | - |
| CC3 | -0.050 | 0.000 | -0.053 | 0.000 | -0.053 | 0.000 | - | - |
| CC4 | 0.019 | 0.000 | 0.018 | 0.000 | 0.019 | 0.000 | - | - |
| CC5 | 0.132 | 0.000 | 0.122 | 0.000 | 0.123 | 0.000 | - | - |
| CC6 | 0.045 | 0.000 | 0.036 | 0.000 | 0.037 | 0.000 | - | - |
| CC7 | -0.063 | 0.000 | -0.073 | 0.000 | -0.073 | 0.000 | - | - |
| CC8 | -0.050 | 0.000 | -0.061 | 0.000 | -0.061 | 0.000 | - | - |
| CA0 | Referencia | | Referencia | | Referencia | | Referencia | Referencia |
| CA2 | 0.499 | 0.000 | 0.501 | 0.000 | 0.501 | 0.000 | 0.203 | 0.000 |
| CA4 | 1.264 | 0.000 | 1.266 | 0.000 | 1.266 | 0.000 | 1.992 | 0.000 |
| CA6 | 1.770 | 0.000 | 1.774 | 0.000 | 1.774 | 0.000 | 2.912 | 0.000 |
| CA8 | 1.984 | 0.000 | 1.988 | 0.000 | 1.988 | 0.000 | 3.061 | 0.000 |
| Grado Nodo | - | - | 0.037 | 0.000 | 0.037 | 0.000 | 0.115 | 0.000 |
| Interm. | - | - | 0.001 | 0.000 | 0.001 | 0.000 | 0.002 | 0.000 |
| CC Nodo | - | - | 0.008 | 0.073 | - | - | 1.173 | 0.000 |
| Bondad de ajuste del modelo | | | | | | | | |
| Chi cuadrado de la razón de verosimilitudes | 863671.7 | 0.000 | 893220.6 | 0.000 | 893217.3 | 0.000 | 538214.5 | 0.000 |
| Grados de libertad | 14 | | 17 | | 16 | | 7 | |
| N (total datos) | 19800 | | 19800 | | 19800 | | 21699 | |

Nomenclatura: GX: red de grado X, CCX: red con coeficiente de clusterización X, CAX: red con coeficiente de autocorrelación X, Grado Nodo: grado del nodo, Interm.: intermediación del nodo, CC Nodo: clusterización del nodo

5. CONCLUSIONES

Con el objetivo de comprender la vulnerabilidad de distintas configuraciones de redes, utilizando indicadores de autocorrelación espacial, se estudió el rol de la topología, representada por la distribución de sus nodos, y el contenido o nivel de coherencia en la información, representado por los diferentes niveles de autocorrelación espacial.

Para ello, se realizó un proceso de simulación de las redes que contempló una compleja serie de transformaciones, que permitieron generar de manera fidedigna tanto las topologías deseadas, así como los niveles de autocorrelación a nivel de los nodos y arcos. Luego de generadas las redes, se realizó un análisis descriptivo a nivel de cada red y entre redes, y otro estadístico, a través de los MLG, de tal forma de identificar las características más relevantes de las redes en sus niveles de vulnerabilidad.

En general, en ambos tipos de redes, el análisis descriptivo muestra que, a medida que aumenta el nivel de dependencia espacial en la red, una mayor cantidad de nodos son críticos. Por otra parte, mientras mayor es el coeficiente de autocorrelación espacial utilizado, mayor es el valor de los coeficientes de Morán obtenidos. De los MLG obtenidos con ambas distribuciones, se destaca el rol no sólo de las características a nivel de red, sino que también a nivel de cada nodo. Sin embargo, la variable que influye de manera más significativa en el modelo corresponde a la autocorrelación espacial en la red, en donde se observan mayores coeficientes estimados, mientras mayor es la dependencia espacial en la red. De aquí se puede extraer que la información que posea la red y la forma en que esta esté distribuida dentro de ella es relevante para determinar su vulnerabilidad, por lo que no basta con conocer la topología de la red, sino que se debe ver más allá de su forma e indagar en el contenido de ella.

Futuras líneas de investigación, entre otras, implican la aplicación de este análisis a redes de transporte real y con otras topologías. Así mismo, parece relevante contrastar los resultados presentados acá con un análisis en donde se eliminen varios nodos en forma secuencial, para así comprender la relevancia de los nodos críticos respecto a su entorno.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Graduate Exchange Student Program, del Gobierno de Canadá; una beca de este programa financió la visita de investigación de la primera autora en la universidad McMaster, donde este artículo fue concebido e iniciado. Este estudio fue además facilitado por el Proyecto Fondecyt 11070075, que financió una visita de investigación del segundo autor a la Universidad de Concepción, donde el estudio fue finalizado.

REFERENCIAS

- Agarwal, J., Blockley, D.I., and Woodman, N.J. (2001) Vulnerability of systems. **Civil Engineering and Environmental Systems**, 18, 2, 141-165.
- Barabasi, L. y Albert, R. (1999) Emerging of scaling in random networks. **Science**, 286, 509-512.
- Barabasi, L. y Bonabeau, E. (2003) Scale-Free networks. **Scientific American**, 288, 60-69.
- Barabasi, A.L. and Oltvai, Z.N. (2004) Network biology: Understanding the cell's functional organization. **Nature Reviews Genetics**, Vol. 5, No. 2, 101-115.

Berdica, K. (2002) An introduction to road vulnerability: what has been done, is done and should be done. **Transport Policy**, 9, 2, 117-127.

Black, W.R. (1992) Network Autocorrelation in Transport Network and Flow Systems. **Geographical Analysis**, Vol. 24, No. 3, 207-222.

Borgatti, S.P., Everett, M.G. y Freeman, L.C. (2002). Ucinet 6 for Windows: Software for Social Network Analysis. Harvard: Analytic Technologies.

Cliff, A.D. y Ord, J.K. (1973) **Spatial Autocorrelation**. Pion, Londres.

D'Este, G. and Taylor, M.A.P. (2001) Modelling Network Vulnerability at the Level of the National Strategic Transportation Network. **Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies**, Vol. 4, 1, 1-14.

Erdos, P. y Renyi, A. (1959) On random graphs. **Publicationes Mathematicae**, 6, 290- 297.

Ezell, B.C. (2007) Infrastructure vulnerability assessment model (I-VAM). **Risk Analysis**, 27, 3, 571-583.

Farber, S., Páez, A., and Volz, E. (2009) Topology and dependency tests in spatial and network autoregressive models. **Geographical Analysis**, 41, 2, 158-180.

Freeman, L. (1979) Centrality in social networks, conceptual clarification. **Social Networks**. **1**. 215 – 239.

Griffith, D.A. (1988) **Advanced Spatial Statistics: Special Topics in the Exploration of Quantitative Spatial Data Series**. Kluwer, Dordrecht.

Griffith, D.A. (2002) A spatial filtering specification for the auto-Poisson model. **Statistics and Probability Letters**, 58, 245 – 251.

Grubestic, T.H. and Murray, A.T. (2006) Vital nodes, interconnected infrastructures, and the geographies of network survivability. **Annals of the Association of American Geographers**, Vol. 96, 1, 64-83.

Grubestic, T.H., Murray, A T, and Mefford, J N (2007) Continuity in Critical Network Infrastructures: Accounting for Nodal Disruptions. In Murray, A. T. and Grubestic, T. H. (Eds.) **Critical Infrastructure: Reliability and Vulnerability**. Springer, Heidelberg, 197-220.

Lleras-Echeverri, G. and Sanchez-Silva, M. (2001) Vulnerability analysis of highway networks, methodology and case study. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Transport**, Vol. 147, 4, 223-230.

Moran, P.A.P. (1950) The interpretation of statistical maps. **Biometrika**, 37, 17- 23.

Murray, A.T. and Grubestic, T H (2007) Overview of Reliability and Vulnerability in Critical Infrastructure. In Murray, A. T. and Grubestic, T. H. (Eds.) **Critical Infrastructure: Reliability and Vulnerability** . Springer, Heidelberg, 2007, pp. 1-8.

Murray, A.T., Matisziw, T.C., and Grubestic, T.H. (2007) Critical network infrastructure analysis: interdiction and system flow. **Journal of Geographical Systems**, Vol. 9, No. 2, 103-117.

Murray, A.T., Matisziw, T.C., and Grubestic, T.H. (2008) A Methodological Overview of Network Vulnerability Analysis. **Growth and Change**, Vol. 39, No. 4, 573-592.

Nelder, J. A. and Wedderburn, R.W. M. (1972). Generalized Linear Models. **Journal of the Royal Statistical Society, Series A**, 135, 370-384.

Newman, M.E.J. (2003) **The structure and function of complex networks**. Department of Physics, University of Michigan and Santa Fe Institute. U.S.A.

Páez, A., Scott, D.M., and Volz, E. (2008) A discrete-choice approach to modeling social influence on individual decision making. **Environment and Planning B: Planning and Design**, 35, 1055-69.

Regianni, A., Signoretti, S., Nijkamp, P., Cento, A (2006) **Network Measure in Civil Air Transport: a case of study of Lufthansa**. Università di Torino. Italy.

Scott, D.M., Novak, D.C., Ultman-Hall, L., and Guo, F. (2006) Network Robustness Index: A new method for identifying critical links and evaluating the performance of transportation networks. **Journal of Transport Geography**. Vol. 14, No. 3, 215-227.

Sheffi, Y. (1985) **Urban Transportation Networks**. Prentice-Hall. New Jersey.

Taylor, M.A.P. and D'Este, G (2007) Transport Network Vulnerability: A Method for Diagnosis of Critical Locations in Transport Infrastructure Systems. In Murray, A. T. and Grubestic, T. H. (Eds.) **Critical Infrastructure: Reliability and Vulnerability**. Springer, Heidelberg, 9-30.

Tobler, W.R. (1970) A computer movie simulating urban growth in the Detroit Region. **Economic Geography**, 46, 234- 240.

Virrantus, K., Demsar, U. y Spatenková, O. (2008) Identifying critical locations in spatial network with graph theory. **Transactions in GIS**, 12(1), 61- 82.

Volz, E. (2004) Random networks with tunable degree distribution and clustering. **Physical Review E**, 70, 5, 5056115-1-5056115-8.

Wasserman, S. y Faust K. (1994) **Social Network Analysis: Methods and Applications**. Cambridge University Press. U.K.